

# 基于因子先验的非凸张量塔克分解的红外小目标检测方法

杨俊刚, 刘 婷, 刘永贤, 李博扬, 王应谦, 盛卫东, 安 玮

(国防科技大学 电子科学学院, 长沙 410073)

**摘要:** 低秩稀疏分解方法因其好的检测性能在红外小目标检测领域受到广泛关注。然而, 现有低秩稀疏分解方法在复杂场景中仍然面临检测性能不高, 检测速度较慢等问题。虽然现有的低秩塔克分解方法在复杂场景下取得了令人满意的检测性能, 但基于低秩塔克分解的方法需要根据经验提前定义秩, 预估的秩过大或者过小会导致漏检或虚警。而且, 不同场景中秩的大小不一样, 这不适用于实际场景。为了解决这一问题, 本文采用非凸秩接近范数约束低秩塔克分解的潜在因子, 这避免了根据经验提前设置秩, 提高了算法在不同场景中的鲁棒性。同时, 设计了基于对称高斯-赛德尔的交替方向乘法(symmetric GaussSeidel based alternating direction method of multipliers algorithm, sGSADMM)来求解所提模型。与现有基于交替方法乘法不同的是, sGSADMM 算法可以利用更多的结构信息来获得更高的精度。大量的实验结果表明, 该方法与其他先进算法在检测性能和背景抑制等方面具有优越性。

**关键词:** 红外小目标检测; 非凸张量塔克分解; 非凸秩接近范数; 对称高斯-赛德尔的交替方向乘法

中图分类号: TP753

文献标识码: A

## Infrared small target detection method based on nonconvex tensor Tuck decomposition with factor prior

YANG Jun-Gang, LIU Ting, LIU Yong-Xian, LI Bo-Yang, WANG Ying-Qian, SHENG Wei-Dong, AN Wei

(College of electronic science and technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

**Abstract:** Low-rank and sparse decomposition method (LRSD) has been widely concerned in the field of infrared small target detection because of its good detection performance. However, existing LRSD-based methods still face the problems of low detection performance and slow detection speed in complex scenes. Although existing low-rank Tuck decomposition methods achieve satisfactory detection performance in complex scenes, they need to define ranks in advance according to experience, and too large or too small the estimated ranks will lead to missed detection or false alarms. Meanwhile, the size of rank is different in different scenes. This means that they are not suitable for real-world scenes. To solve this problem, this paper uses non-convex rank approach norm to constrain latent factors of low-rank Tucker decomposition, which avoids setting ranks in advance according to experience and improves the robustness of the algorithm in different scenes. Meanwhile, an symmetric GaussSeidel (sGS) based alternating direction method of multipliers algorithm (sGSADMM) is designed to solve the proposed method. Different from ADMM, the sGSADMM algorithm can use more structural information to obtain higher accuracy. Extensive experiment results show that the proposed method is superior to other advanced algorithms in detection performance and background suppression.

**Key words:** infrared small target detection, nonconvex tensor Tuck decomposition, nonconvex rank approximation norm, symmetric GaussSeidel based alternating direction method of multipliers algorithm

**PACS:**

收稿日期: 2024-06-13, Received date: 2024-06-13,

基金项目: 国家自然科学基金(61921001), 湖南省杰出青年基金(2024JJ2063), 博士后面上基金, 博士后资助计划(GZB20230982, 2023M744321) Foundation items: Supported by the National Natural Science Foundation of China(61921001), Outstanding Youth Foundation in Hunan Province (2024JJ2063), China Postdoctoral Science Foundation (GZB20230982, 2023M744321) 作者简介(Biography): 杨俊刚(1984—), 男, 江西人, 副教授, 博士学位, 主要研究领域为新型成像技术与图像处理技术。\*通讯作者(Corresponding author): E-mail: liuting@nudt.edu.cn, yangjungang@nudt.edu.cn,

## 引言

红外小目标探测在国防预警<sup>[1]</sup>、航空航天技术<sup>[2-3]</sup>和海事领域<sup>[4-5]</sup>等多种实际应用中发挥着至关重要的作用。近年来,低秩稀疏分解方法在红外小目标检测领域得到了迅速发展。然而,由于红外目标成像距离较远,往往缺乏有效的形状和纹理信息。因此,研究复杂场景下的红外小目标检测是一项具有挑战性的任务。

现有的红外小目标检测方法可以分为基于滤波的方法,基于人类视觉对比机制的方法,基于低秩稀疏分解的方法和深度学习的方法这四大类。第一类是基于滤波的方法,基于滤波的方法主要通过不同的滤波器来评估背景,如顶帽变换(top-hat transformation, Top-hat)算法<sup>[6]</sup>,最大中值滤波器(max-mean filter, Max-mean)算法<sup>[7]</sup>。基于滤波的方法检测效率很高,但是检测结果中背景杂波残留较多。

第二类是基于人类视觉对比机制的方法,受人类视觉系统对比机制的启发,Chen等<sup>[8]</sup>开创性地设计了一种局部对比度测量(local contrast measure, LCM)算法。该算法通过提高目标和背景之间的对比度来增强目标的显著度,通常适用于目标和背景对比度差异较大的场景,而且在增强目标的同时还会增强背景,检测效率不高。

第三类是基于低秩稀疏分解的方法,近年来,低秩稀疏分解方法引入到红外小目标检测领域,Gao等<sup>[9]</sup>首先设计了红外块图像模型。为了提高复杂场景下的检测性能,Wang等<sup>[10]</sup>提出了一种新的稳定多子空间学习方法。Zhang等<sup>[11]</sup>提出了一种非凸秩近似模型(non-convex rank approximation model NRAM),该模型使用 $l_{2,1}$ 范数约束背景杂波。为了充分利用图像的信息,Dai等<sup>[12]</sup>进一步将局部图像块堆叠成三维张量,提出了重加权红外块张量(Rewighted infrared patch-tensor, RIPT)模型。考虑到RIPT方法的有效性,提出了许多改进的张量范数来更准确地评估背景<sup>[13-14]</sup>。此外,Liu等<sup>[15]</sup>结合深度去噪器先验和低秩先验来更好地检测复杂噪声场景中的红外小目标。在文献[16]中,结合低秩塔克分解和多形态轮廓方法为了在复杂场景中更准确地检测目标。然而,上述方法忽略了时域信息,在红外序列小目标检测中性能不佳。

为了充分地利用时域信息,Sun等<sup>[17]</sup>设计了一

种新的时空块张量模型,该模型通过最小化加权 Schatten  $p$  范数(WSNMSTIPT)来更准确地评估背景。随后,Sun等<sup>[18]</sup>将二维总变分正则项扩展到三维时空总变分正则项,以更好地去除噪声和利用时域信息(STTV-WNIPT)。受STTV-WNIPT方法的启发,Liu等<sup>[19]</sup>将非凸张量低秩近似与非对称时空总变分正则项相结合用于红外小目标检测。为了准确地区分稀疏背景和目标成分,Zhang等<sup>[20]</sup>设计了一种基于边角感知的时空张量(Edge and corner awareness-based spatial-temporal tensor, ECASST)模型。为了进一步提高方法在复杂场景中的检测能力,Sun等<sup>[21]</sup>在现有的时空域张量模型中引入了多子空间学习策略。但上述方法忽略了局部信息的有效性,影响了检测性能。因此,Liu等<sup>[22]</sup>将局部信息与通过采集时空块立方体,建立了一种新的时空张量模型。Wang等<sup>[23]</sup>进一步建立了非重叠块时空张量(NPSTT)模型。Luo等<sup>[24]</sup>将改进的多模核范数(improved multi-mode nuclear norm, IMNN)和局部加权熵对比(local weighted entropy contrast, LWEC)整合为一个统一的框架,提出了一种IMNN-LWEC模型,提高了目标检测能力。Liu等<sup>[25]</sup>提出了基于描述系数总变分正则项的快速的红外小目标检测,该方法可以在复杂场景中快速准确地检测红外小目标,但是需要预先根据经验提前设置秩,不满足实际工程的应用。受文献[16]的启发,Pang等<sup>[26]</sup>将分面模型与低秩塔克张量分解方法相结合用于小目标检测。Li等<sup>[27]</sup>基于目标在时空域中的局部连续性,通过透视转换建立扭转张量模型,使复杂的背景成分更加结构化,增加了背景与目标之间的差异,提出了一种用于红外小目标检测的稀疏正则化扭曲张量模型(SRSTT)。为了在复杂的场景中取得好的检测性能,Luo等<sup>[28]</sup>提出了基于聚类和跟踪引导的红外小目标时空预测补全模型来检测红外小目标。为了更充分地利用时空域信息,Wu等<sup>[29]</sup>设计了一种时空四维张量环(4D tensor ring, 4D-TR)和四维张量列(4D tensor train, 4D-TT)方法来检测红外小目标。进一步地,Luo等<sup>[30]</sup>提出了一种基于块项分解范数和多方向导数先验的4D时空张量分解的红外小目标检测方法。尽管上述方法在复杂场景中取得了好的检测性能,但是上述方法计算复杂度高,检测速度慢,不满足实时检测。

第四类方法是基于深度学习的方法,近年来,基于数据驱动的深度学习的方法逐渐成为红外小目

标检测领域新的研究热点。Li 等<sup>[31]</sup>提出了一种基于密集嵌套并融合注意力模块的红外小目标检测网络 (Dense Nested Attention Network, DNANet)。进一步的,采用单点监督的方式训练红外小目标检测网络的策略提了出来<sup>[32]</sup>。为了提高检测网络的检测速度,一些轻量化的红外小目标检测网络提了出来<sup>[33]</sup>。尽管基于深度学习的方法获得了较好的检测性能,但是深度学习方法非常依赖数据和标签的数量和质量,当训练数据不够或者标签不准确时,检测性能会下降。

考虑到现有的低秩稀疏分解方法在复杂场景中计算复杂度高,检测速度慢的问题。虽然现有的基于低秩塔克分解的方法在复杂场景下已经取得了令人满意的检测性能,但现有的基于塔克分解的方法需要提前选择塔克秩,不同场景中秩的大小是不一样的,这不适用于实际场景和实际工程中的应用。针对秩选择问题,提出了基于因子先验的非凸张量塔克分解的红外小目标检测方法。图1展示了本文所提方法的流程图。在本文所提方法中,采用非凸秩接近范数约束低秩塔克分解的潜在因子,这避免了根据经验提前设置秩,提高了算法在不同场景中的鲁棒性。同时,为了使用更多的结构信息,设计了基于对称高斯-赛德尔的交替方向乘法(sGSADMM)来求解所提模型。综上,所提 NFTD-sGSADMM 算法有以下三个创新点:

(1) 本文采用非凸秩接近范数约束低秩塔克分解方法的潜在因子,这避免了根据经验提前设置秩,有效提高算法的鲁棒性。同时,对因子矩阵施加低秩约束可以降低计算复杂度,提高计算效率。

(2) 设计基于对称高斯-赛德尔的交替方向乘法来求解提出的模型。与直接使用交替方向乘

子法相比,基于对称高斯-赛德尔的交替方向乘法可以利用更多的结构信息,从而获得更高的检测精度。

(3) 为了证明 NFTD-sGSADMM 模型的有效性,在六种不同的红外场景下进行了实验。大量的实验结果表明,所提方法在检测精度和背景抑制这两个方面都具有优越的性能。

## 1 相关知识介绍

### 1.1 低秩塔克分解

塔克分解的数学定义式表示如下:

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{U}_1 \times_2 \mathbf{U}_2 \cdots \times_N \mathbf{U}_N \quad (1)$$

式(1)中, $\mathbf{U}_i$ 和 $\mathcal{G}$ 分别表示因子矩阵和核张量。假设三维张量的维度为 $m \times n \times b$ ,并且假定塔克分解的秩为 $r = (r_1, r_2, r_3)$ ,其中 $r_1, r_2, r_3$ 分别是对应于三个维度的秩,那么,分解后得到的三个因子矩阵的大小表示如下:因子矩阵 $\mathbf{U}_1$ 的大小为 $m \times r_1$ ,因子矩阵 $\mathbf{U}_2$ 的大小为 $n \times r_2$ ,因子矩阵 $\mathbf{U}_3$ 的大小为 $b \times r_3$ 。近年来,低秩塔克分解方法在红外小目标检测中取得了较好的检测性能<sup>[16]</sup>,<sup>[26]</sup>。然而,现有的低秩塔克分解方法需要根据经验预先定义秩,而不准确的预定义秩可能导致漏检或虚警等问题。对于秩选择问题,Tian 等<sup>[29]</sup>首先证明了模 $n$ 展开的秩上界为相应因子矩阵的秩。因此,可以利用核范数来约束低秩塔克分解的因子矩阵 (Factor matrices of Tucker decomposition, FTD) 来检测红外小目标。FTD 的定义式表示如下:

$$K(\mathcal{X}) = \beta_n \sum_{n=1}^N \|\mathbf{U}_n\|_* + \lambda \|\mathcal{G}\|_F^2 \quad (2)$$

其中, $\mathcal{X}$ 表示输入的张量, $\|\cdot\|_*$ 表示核范数, $\|\cdot\|_F^2$ 表示 Frobenius 范数, $\beta_n$ 和 $\lambda$ 是常数。

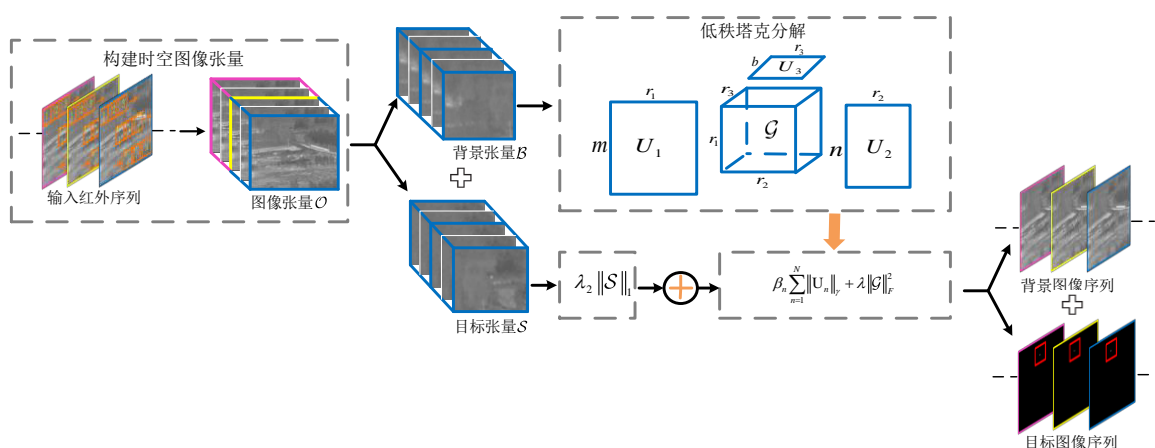


图1 本文方法的整体流程图

## 2 本文方法

对于一个给定的红外图像,其数学模型表示如下:

$$f_o = f_B + f_S \quad (3)$$

其中,  $f_o, f_B$  和  $f_S$  分别表示输入红外图像,背景图像和目标图像。根据文献[13],式(3)的时空张量模型表示如下:

$$\mathcal{O} = \mathcal{B} + \mathcal{S} \quad (4)$$

其中,  $\mathcal{O}, \mathcal{B}, \mathcal{S}$  分别表示输入红外图像张量,背景张量和目标张量。

### 2.1 基于因子先验的非凸张量塔克分解方法

受到文献[34]中FTD的启发,考虑到核范数同等的对待每一个奇异值,在一些场景中检测性能受限,这主要是因为核范数忽略了不同的奇异值有不同的的重要性,应该区别对待。针对这一问题,采用文献[35]中提出的非凸秩接近范数,称之为  $\gamma$  范数,其定义式如下:

$$\|B\|_\gamma = \sum_i \frac{(1+\gamma)\sigma_i(B)}{\gamma + \sigma_i(B)}, \gamma > 0 \quad (5)$$

基于此,新的基于因子先验的非凸张量塔克分解 NFTD 的定义式如下所示:

$$K_1(\mathcal{X}) = \beta_n \sum_{n=1}^N \|\mathcal{U}_n\|_\gamma + \lambda \|\mathcal{G}\|_F^2 \quad (6)$$

综上所述,为了解决现有低秩塔克分解方法的秩选择问题,本文提出了基于因子先验的非凸张量塔克分解的红外小目标检测方法,模型表示如下:

$$\min_{\mathcal{B}, \mathcal{S}} \beta_n \sum_{n=1}^N \|\mathcal{U}_n\|_\gamma + \lambda_1 \|\mathcal{G}\|_F^2 + \lambda_2 \|\mathcal{S}\|_1 \quad (7)$$

$$s.t. \quad \mathcal{B} = \mathcal{G} \times_1 \mathcal{U}_1 \times_2 \mathcal{U}_2 \cdots \times_N \mathcal{U}_N, \mathcal{O} = \mathcal{B} + \mathcal{S}$$

其中,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  表示正的正则化参数。

### 2.2 本文模型的优化求解

通过引入辅助变量  $\{\mathcal{W}_n\}_{n=1}^N$ ,式(7)构建成如下形式:

$$\min_{\mathcal{B}, \mathcal{S}} \beta_n \sum_{n=1}^N \|\mathcal{U}_n\|_\gamma + \lambda_1 \|\mathcal{G}\|_F^2 + \lambda_2 \|\mathcal{S}\|_1 \quad (8)$$

$$s.t. \quad \{\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n\}_{n=1}^N, \mathcal{O} = \mathcal{B} + \mathcal{S}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{G} \times_1 \mathcal{W}_1 \times_2 \mathcal{W}_2 \cdots \times_N \mathcal{W}_N.$$

然后,增广拉格朗日函数表示如下:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{U}_n, \mathcal{W}_n, \mathcal{B}, \mathcal{S}, \mathcal{G}, \delta_n, \Lambda, \Gamma) &= \beta_n \sum_{n=1}^N \|\mathcal{U}_n\|_\gamma + \lambda_1 \|\mathcal{G}\|_F^2 + \lambda_2 \|\mathcal{S}\|_1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho}{2} \|\mathcal{W}_n - \mathcal{U}_n\|_F^2 \\ &+ \sum_{n=1}^N \langle \delta_n, \mathcal{W}_n - \mathcal{U}_n \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{B} - \mathcal{G} \times_1 \mathcal{W}_1 \times_2 \mathcal{W}_2 \cdots \times_N \mathcal{W}_N\|_F^2 \\ &+ \langle \Gamma, \mathcal{B} - \mathcal{G} \times_1 \mathcal{W}_1 \times_2 \mathcal{W}_2 \cdots \times_N \mathcal{W}_N \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{O} - \mathcal{B} - \mathcal{S}\|_F^2 \\ &+ \langle \Lambda, \mathcal{O} - \mathcal{B} - \mathcal{S} \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\delta_n, \Gamma, \Lambda$  表示拉格朗日乘子,  $\rho$  表示惩罚参数。图2展示了ADMM算法和sGSADMM算法的比较。从图2(a)中可以看出,ADMM在一个周期内按顺序更新所有变量,并平等对待每个变量。如图2(b)所示,可以看到sGSADMM在每次迭代中更新所有变量,然后重复更新一些变量,形成对称迭代结构。与ADMM相比,sGSADMM可以充分利用式(8)中的非光滑结构信息,因此可以获得更高的检测精度。接下来,我们使用sGSADMM将式(9)分解为几个子问题,然后交替迭代更新每个变量。

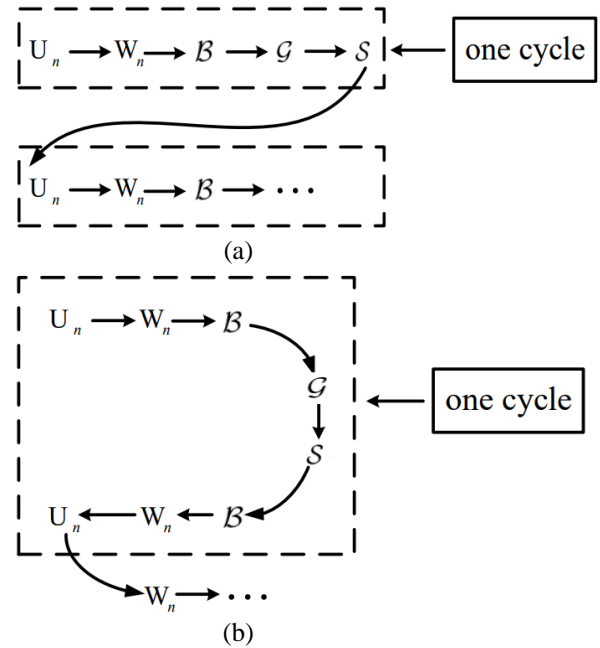


图2 ADMM算法和sGSADMM算法的比较,(a) ADMM, (b) sGSADMM

#### 1) 固定其他变量,更新 $\mathcal{U}_n$

$$\mathcal{U}_n = \arg \min_{\mathcal{U}_n} \beta_n \sum_{n=1}^N \|\mathcal{U}_n\|_\gamma + \sum_{n=1}^N \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{W}_n - \mathcal{U}_n + \frac{\delta_n}{\rho} \right\|_F^2 \quad (10)$$

式(10)的闭式解表示如下:

$$\mathcal{U}_n = D_{\frac{\beta_n}{\rho}} \left( \mathcal{W}_n + \frac{\delta_n}{\rho} \right) \quad (11)$$



## 2) 固定其他变量,更新 $W_n$

$$W_n = \arg \min_{W_n} \sum_{n=1}^N \frac{\rho}{2} \left\| W_n - U_n + \frac{\delta_n}{\rho} \right\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{B} - \mathcal{G} \times_1 W_1 \times_2 W_2 \cdots \times_N W_N + \frac{\Gamma}{\rho} \right\|_F^2 \quad (12)$$

根据文献[29]中的 Lemma 1, 式(12)改写成如下形式:

$$W_n = \arg \min_{W_n} \sum_{n=1}^N \frac{\rho}{2} \left\| W_n - U_n + \frac{\delta_n}{\rho} \right\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \left\| B_{(n)} - W_n G_{(n)} (W^{(n)})^T + \frac{\Gamma_{(n)}}{\rho} \right\|_F^2 \quad (13)$$

然后,  $W_n$  的解的形式如下所示:

$$W_n = \frac{-\delta_n + \rho U_n + (\Gamma_{(n)} + \rho B_{(n)}) W^{(n)} G_{(n)}^T}{\rho I + \rho G_{(n)} (W^{(n)})^T (W^{(n)}) G_{(n)}^T} \quad (14)$$

其中,  $W^{(n)} = W_N \otimes \cdots \otimes W_{n+1} \otimes W_{n-1} \cdots \otimes W_1$ .

## 3) 固定其他变量,更新 $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \arg \min_{\mathcal{B}} \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{O} - \mathcal{B} - \mathcal{S} + \frac{\Lambda}{\rho} \right\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{B} - \mathcal{G} \times_1 W_1 \times_2 W_2 \cdots \times_N W_N + \frac{\Gamma}{\rho} \right\|_F^2 \quad (15)$$

式(15)的解的形式表示如下:

$$\mathcal{B} = \frac{-\Gamma + \rho H + \rho(\mathcal{O} - \mathcal{S}) + \Lambda}{2\rho} \quad (16)$$

其中,  $H = \mathcal{G} \times_1 W_1 \times_2 W_2 \cdots \times_N W_N$ .

## 4) 固定其它变量,更新 $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} = \arg \min_{\mathcal{G}} \lambda_1 \left\| \mathcal{G} \right\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{B} - \mathcal{G} \times_1 W_1 \times_2 W_2 \cdots \times_N W_N + \frac{\Gamma}{\rho} \right\|_F^2 \quad (17)$$

为了求解式(17), 采用 Lemma 1 中的方法将核张量展开为  $n$ -th 的模  $G_{(n)}$ , 式(17)改写成如下形式:

$$G_{(n)} = \arg \min_{G_{(n)}} \lambda_1 \left\| G_{(n)} \right\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \left\| B_{(n)} - W_n G_{(n)} (W^{(n)})^T + \frac{\Gamma_{(n)}}{\rho} \right\|_F^2 \quad (18)$$

利用 Kronecker 积与  $\text{vec}(\text{AMC}) = (C^T \otimes A) \text{vec}(M)$  的性质, 结合最优性条件, 更新  $\mathcal{G}$  的表示形式如下:

$$\text{vec}(G) = \frac{\text{vec}(W_n^T (\Gamma_{(n)} + \rho B_{(n)}) (W^{(n)}))^T}{W^{(n)} W^{(n)T} \otimes \rho W_n^T W_n + 2\lambda_1 I} \quad (19)$$

其中,  $\text{vec}(\cdot)$  表示其将张量或矩阵的列叠加成单个列向量的操作。

## 5) 固定其他变量,更新 $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \arg \min_{\mathcal{S}} \lambda_2 \left\| \mathcal{S} \right\|_1 + \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{O} - \mathcal{B} - \mathcal{S} + \frac{\Lambda}{\rho} \right\|_F^2 \quad (20)$$

根据文献[21], 式(20)的解表示如下:

$$\mathcal{S} = \text{Th}_{\frac{\lambda_2}{\rho}} \left( \mathcal{O} - \mathcal{B} + \frac{\Lambda}{\rho} \right) \quad (21)$$

其中,  $\text{Th}$  表示软阈值收缩算子。

## 6) 固定其他变量,更新 $\{\delta_n\}_{n=1}^N$

$$\begin{cases} \delta_n = \delta_n + \rho(W_n - U_n) \\ \Gamma = \Gamma + \rho(\mathcal{B} - \mathcal{G} \times_1 W_1 \times_2 W_2 \cdots \times_N W_N) \\ \Lambda = \Lambda + \rho(\mathcal{O} - \mathcal{B} - \mathcal{S}) \end{cases} \quad (22)$$

## 7) 固定其他变量,更新 $\rho$

$$\rho = \min(\mu \rho, \rho_{\max}) \quad (23)$$

算法 1 中总结了求解本文方法 NFTD-sGSADMM 的详细步骤。

### 算法 1 本文的 NFTD-sGSADMM 算法

1. 输入. 红外图像序列,  $\mathcal{O}, \mathcal{B}^0 = \mathcal{S}^0 = 0, L, H, \lambda_1, \lambda_2, \rho_0 = 0.01$ ,

$\rho_{\max} = 1e7, \mu = 1.5, \zeta = 1e-6$

2. 重复以下步骤,直到满足停止条件:

步骤 1. 根据式(11)更新  $U_n$

步骤 2. 根据式(14)更新  $W_n$

步骤 3. 根据式(16)更新  $\mathcal{B}$

步骤 4. 根据式(19)更新  $\mathcal{G}$

步骤 5. 根据式(21)更新  $\mathcal{S}$

步骤 6. 根据式(16)更新  $\mathcal{B}$

步骤 7. 根据式(14)更新  $W_n$

步骤 8. 根据式(11)更新  $U_n$

步骤 9. 根据式(22)更新  $\{\delta_n\}_{n=1}^N, \Gamma, \Lambda$

步骤 10. 根据式(23)更新  $\rho$

步骤 11. 检查是否达到收敛条件  $\frac{\|\mathcal{O} - \mathcal{B} - \mathcal{S}\|_F^2}{\|\mathcal{O}\|_F^2} \leq \zeta$

3. 输出. 背景图像  $\mathcal{B}$ , 目标图像  $\mathcal{S}$

## 2.3 计算复杂度分析

这一章节主要讨论本文所提 NFTD-sGSADMM 算法的计算复杂度。假定输入红外张量为  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 更新  $U_n$  需要的计算复杂度为  $O(n_1^3 + n_2^3 + n_3^3)$ 。同理, 更新  $W_n$  的计算复杂度为  $O(n_1^3 + n_2^3 + n_3^3)$ 。更新  $\mathcal{G}$  的计算复杂度为  $O((n_1 n_2 n_3)^3)$ 。更新  $\mathcal{B}$  需要进行张量矩阵乘积计算, 需要的计算复杂

度为  $O\left(\sum_{i=1}^N \left(n_i \prod_{m=1}^N n_m\right)\right)$ 。更新  $\mathcal{S}$  需要进行软阈值收缩计算,需要的计算复杂度为  $O(n_1 n_2 n_3)$ 。

#### 2.4 收敛性分析

在这一章节中,主要分析本文所提 NFTD-sGSADMM 算法的收敛性。由于 NFTD 正则项的存在,式(7)的求解过程是一个非凸优化问题。基于此,根据文献[36]中的定理 3,采用收敛条件  $\frac{\|\mathcal{O} - \beta - \mathcal{S}\|_F^2}{\|\mathcal{O}\|_F^2} \leq \zeta$  来分析收敛性。在序列 6 上的收敛曲线如图 3 所示。从图 3 中可以看出,随着迭代次数的增加,相对误差值可以快速收敛到零。这说明本文所提 NFTD-sGSADMM 方法可以快速收敛并获得最优解。

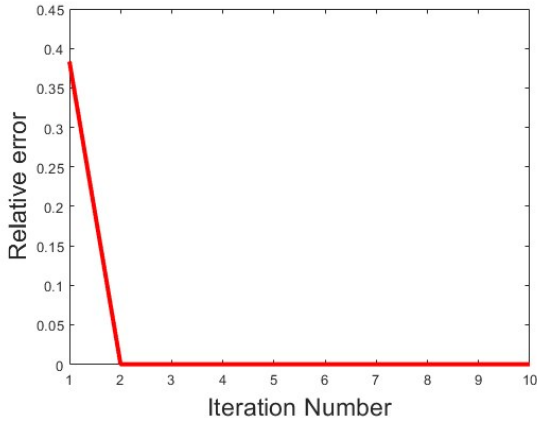


图3 本文方法在序列 6 上的收敛曲线

### 3 实验结果与分析

#### 3.1 评价指标与数据集

##### 3.1.1 评价指标

本文采用检测率 (Probability of Detection, PD) 和虚警率 (False-Alarm Rate, FA), 3D 受试者工作特征 (3D receiver operating characteristic, 3D ROC) 曲线和 AUC 指标来评估检测性能和背景抑制能力。其中, 3D ROC 曲线由 3 个 2D ROC 曲线组成, 分别是 2D ROC 曲线  $(F_a, P_d)$ ,  $(\tau, P_d)$  和  $(\tau, F_a)$ 。三个 2D ROC 对应的 AUC 指标分别表示为  $AUC_{(F_a, P_d)}$ ,  $AUC_{(\tau, P_d)}$  和  $AUC_{(\tau, F_a)}$ 。评价指标的定义和公式如下所示:

1) 检测率的计算公式如下:

$$P_d = \frac{N_d}{N_g}, \quad (24)$$

其中,  $N_d$  和  $N_g$  分别表示检测到的真实像素数和真值图中的真实像素数。

2) 虚警率的计算公式如下:

$$F_a = \frac{N_f}{N_t} \quad (25)$$

其中,  $N_f$  和  $N_t$  分别表示检测到的错误像素数和检测到的总像素数。

3)  $AUC_{OA}$  的计算公式如下:

$$AUC_{OA} = AUC_{(F_a, P_d)} + AUC_{(\tau, P_d)} - AUC_{(\tau, F_a)} \quad (26)$$

4)  $AUC_{SNPR}$  的计算公式如下:

$$AUC_{SNPR} = \frac{AUC_{(\tau, P_d)}}{AUC_{(\tau, F_a)}} \quad (27)$$

##### 3.1.2 数据集分析

为了验证本文方法和对比方法在复杂场景中的检测性能,我们的数据集包含 6 组地面场景。序列 1-序列 3 的红外图像来自于文献[37], 序列 4-序列 6 的红外图像来自于文献[38]。从图 4-5 可以看出, 序列 1-序列 3 展示的是有植被干扰的场景。序列 4-序列 6 是包含有建筑物, 植被干扰的场景。序列 1 和序列 3 是包含有疑似目标点干扰的地面场景, 这容易造成错检和漏检。序列 2 的场景整体较平滑, 但是包含少许高亮的植被, 容易造成虚警。相较于序列 1-序列 3, 序列 4-序列 6 的场景更复杂, 更具有挑战性。序列 4 包含一些山脉和路面的高亮杂波干扰。序列 5 中包含大块面积的高亮区域干扰, 容易引起虚警。序列 6 包含房屋, 道路等高亮杂波的干扰, 容易引起虚警和漏检。综上所述, 数据集包含了简单和复杂的背景, 这些具有各种场景的多样化数据集可以帮助全面评估每个算法的性能。

##### 3.2 参数分析

这个章节主要讨论 NFTD-sGSADMM 方法中的两个重要参数 L、H。在序列 1 上分析了不同参数 L 和 H 对检测性能的影响, 实验结果如表 1 所示。

1) 帧数: 为了测试不同 L 值对检测性能的影响, 将 L 在 [3-7] 的范围内以 1 的步长变化。不同 L 值对应的 AUC 指标列在表 1 中。从表 1 中可以看到, 过大的 L 值对应的  $AUC_{(\tau, F_a)}$  的值越大,  $AUC_{(\tau, P_d)}$  的值越小, 这说明检测结果中有较多背景杂波残留。L 值较小的  $AUC_{(\tau, P_d)}$  值也偏小, 这说明检测能力较弱, 从表 1 中可以看到,  $L = 5$  时  $AUC_{OA}$  和  $AUC_{SNPR}$  值最高, 这说明  $L = 5$  时能获得最高的检测能力和背景抑制能力。在接下来的实验中, 设置  $L = 5$ 。

2) 权值参数: 为了测试不同 H 值对检测性能的

影响,将 $H$ 在 $[2-10]$ 的范围内以2的步长变化。不同 $H$ 值对应的AUC指标列在表1中。从表1中可以看到,当 $H=2$ 时, $AUC_{(\tau, F_d)}$ 的值最大,这说明检测结果中背景杂波残留最多。随着 $H$ 值增大, $AUC_{(\tau, F_d)}$ 值逐渐降低,这说明背景抑制能力逐渐增强。当 $H=8$ 时,取得最高的 $AUC_{OA}$ 值和 $AUC_{SNPR}$ 值,这说明 $H=8$ 时能取得最高的检测能力和背景抑制能力。在接下来的实验中,设置 $H=8$ 。

### 3.3 对比实验分析

为评估本文所提方法在检测精度和背景抑制等方面的综合性能,与领域内现有的8种不同的检测方法进行比较,包括两个基于单帧的方法(Top-hat方法, NRAM方法)和6个基于序列的方法(ECASTT, MSLSTIPT, ASTTV-NTLA, IMNN-LWEC, SRSTT, 4D-TT)。定量和定性结果分析显示本文提出的NFTD-sGSADMM方法在不同的场景中都能取得好的检测性能和背景抑制性能。具体分析过程见3.3.1和3.3.2节。

#### 3.3.1 定性分析

为了验证本文方法的检测性能,本文在序列1-6上与8种不同的检测算法进行比较。图4-5展示了不同算法的检测结果。从图4-5中可以看出,Top-hat方法在6个不同的场景中都有较多的背景杂波残留。这是因为Top-hat方法结构设计简单,计算复杂度低,适用于简单均匀的场景。由于序列1-序列6都是地面场景,包含较多的杂波干扰,因此Top-hat方法在序列1-6上的检测性能降低。相较于Top-hat方法, NRAM方法在不同场景中背景杂波残留较少,但在序列1和序列3中, NRAM方法过收

缩目标,目标能量较低。这主要是因为序列1和序列3是包含有疑似目标点干扰的地面场景,这容易造成错检和漏检,检测性能会下降。从图4-5中可以看出, ECASTT方法虽然能够在很大程度上提高目标和背景之间的对比度,但是ECASTT方法在序列4-序列6上仍然有背景杂波残留,这是因为序列4-序列6包含有建筑物,植被等干扰,容易带来虚警。从图4-5中可以看出, MSLSTIPT和ASTTV-NTLA方法都能较好的保留目标,但是它们的检测结果通常呈现灰色,尤其是序列2,序列5-序列6等包含高亮杂波干扰的场景,这说明MSLSTIPT和ASTTV-NTLA方法不能很好地抑制高亮杂波背景。相较之下, IMNN-LWEC, SRSTT和4D-TT方法能够很好地抑制背景杂波,但是IMNN-LWEC方法通常过收缩目标,目标强度较弱。这说明它的目标检测能力有待进一步提高。从图4-5中可以看到,本文提出的NFTD-sGSADMM方法在增强目标的同时可以很好地抑制背景杂波,检测结果中几乎没有杂波的残留,这说明NFTD-sGSADMM方法在不同的场景中检测性能和背景抑制能力都高于其他的对比方法。

#### 3.3.2 定量分析

接下来,采用3D ROC曲线和5个不同的AUC指标来定量评估不同方法在序列1-6上的检测性能。图6展示了不同方法在序列1-6上的3D ROC曲线。为了突出不同方法之间的差异,在虚警率轴上采用对数刻度。2D ROC曲线( $F_d, P_d$ )越靠近坐标轴的左上角表明检测器的整体检测性能越好,2D ROC曲线( $\tau, P_d$ )越靠近坐标轴的右上角表明检测器的检测能力越强,2D ROC曲线( $\tau, F_d$ )越靠近坐标

表1 不同L和H值在序列1中的AUC指标

| L | H  | $AUC_{(F_d, P_d)}$ | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | $AUC_{(\tau, F_d)}$ | $AUC_{OA}$    | $AUC_{SNPR}$  |
|---|----|--------------------|---------------------|---------------------|---------------|---------------|
| 3 | 8  | 0.9916             | 0.9683              | <b>0.0020</b>       | 1.9579        | 484.15        |
| 4 | 8  | <b>0.9999</b>      | <u>0.9966</u>       | <b>0.0020</b>       | <u>1.9945</u> | <u>498.30</u> |
| 5 | 8  | <b>0.9999</b>      | <b>0.9995</b>       | <b>0.0020</b>       | <b>1.9974</b> | <b>499.75</b> |
| 6 | 8  | <b>0.9999</b>      | 0.8608              | <u>0.0022</u>       | 1.8585        | 391.27        |
| 7 | 8  | <b>0.9999</b>      | 0.7980              | 0.0037              | 1.7942        | 215.68        |
| 8 | 8  | <b>0.9999</b>      | 0.7980              | 0.0052              | 1.7927        | 153.46        |
| L | H  | $AUC_{(F_d, P_d)}$ | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | $AUC_{(\tau, F_d)}$ | $AUC_{OA}$    | $AUC_{SNPR}$  |
| 5 | 2  | <b>0.9999</b>      | 0.8804              | 0.1133              | 1.7670        | 7.7705        |
| 5 | 4  | <b>0.9999</b>      | 0.8529              | 0.0335              | 1.8193        | 25.460        |
| 5 | 6  | <b>0.9999</b>      | 0.8176              | <u>0.0078</u>       | 1.8097        | 104.82        |
| 5 | 8  | <b>0.9999</b>      | <b>0.9995</b>       | <b>0.0020</b>       | <b>1.9974</b> | <b>499.75</b> |
| 5 | 10 | <b>0.9999</b>      | <u>0.9974</u>       | <b>0.0020</b>       | <u>1.9953</u> | <u>498.70</u> |



轴的左下角表明检测器的背景抑制能力越强。从图 6 中可以看到, MSLSTIPT, SRSTT, 4D-TT 和 NFTD-sGSADMM 方法的 2D ROC 曲线 ( $F_a, P_d$ ) 可以较快速地接近坐标轴的左上角。这表明它们在整体检测性能方面的表现较好。然而, MSLSTIPT 方法的二维 ROC 曲线 ( $\tau, F_a$ ) 偏离坐标轴的左下角, 这说明它抑制背景杂波的能力较弱。相较之下, IMNN-LWEC, 4D-TT 和本文所提 NFTD-sGSADMM 方法的 2D ROC 曲线 ( $\tau, F_a$ ) 可以快速接近坐标轴的左下角。这说明它们有着更好地抑制背景杂波的能力。从图 6 中可以看出, NRAM, 4D-TT 和 SRSTT 方法的 2D ROC 曲线 ( $\tau, P_d$ ) 低于其他方法, 这说明这些方法过收缩目标, 检测能力有待进一步提高。综上所述, 本文所提 NFTD-sGSADMM 方法具有较高的检测能力和较强的背景抑制能力。

由于一些对比方法的 ROC 曲线重叠在一起, 进一步采用 AUC 指标来评估各个对比方法之间的性能, 如表 2 所示。粗体表示最佳结果, 下划线表示表现第二佳的结果。如表 2 所示, 在序列 5 中, ASTTV-NTLA 方法的  $AUC_{(\tau, P_d)}$  值最大。在序列 6 中, Top-hat 方法的  $AUC_{(\tau, P_d)}$  值最大。在序列 1-3 中, 本文所提的 NFTD-sGSADMM 方法的  $AUC_{(\tau, P_d)}$  最大。这说明上述三个方法的检测能力较强。然而, ASTTV-NTLA 方法和 Top-hat 方法在序列 1-6 上的  $AUC_{(\tau, F_a)}$  值较高, 这说明 ASTTV-NTLA 方法和 Top-hat 方法不能很好地抑制复杂地面场景中的高亮杂波。这也进一步导致了 ASTTV-NTLA 和 Top-hat 方法在序列 1-6 上的  $AUC_{OA}$  和  $AUC_{SNPR}$  值较低。从表 2 中可以看出, IMNN-LWEC, SRSTT, 4D-TT 和本文所提 NFTD-sGSADMM 方法的  $AUC_{(\tau, F_a)}$  最低, 这说明它们在序列 1-序列 6 上能够很好地抑制背景杂波的干扰, 能够准确地评估背景。但是 IMNN-LWEC, SRSTT 和 4D-TT 的  $AUC_{(\tau, P_d)}$  值不高, 说明上述三个方法在序列 1-序列 6 上过收缩目标, 这也导致  $AUC_{OA}$  值较低, 这说明它们的检测能力有待提升。从表 2 中可以看出, 本文所提 NFTD-sGSADMM 方法在序列 1-序列 6 上都可以取得高的  $AUC_{OA}$  和  $AUC_{SNPR}$  值, 这说明 NFTD-sGSADMM 方法在 6 组场景中都能很好地抑制高亮杂波干扰和疑似目标的高亮杂波点干扰。综上所述, NFTD-sGSADMM 方法在不同难度的地面场景中都能取得好的检测性能, 并且具有较强的鲁棒性。这得益于从因子矩阵

中可以挖掘数据更多的潜在结构信息, 这可以帮助提高检测性能, 同时, 采用对称高斯-赛德尔的交替方向乘子法来求解提出的模型可以利用更多的结构信息, 从而获得更高的检测精度。

### 3.4 消融实验

#### 3.4.1 基于因子先验的非凸张量塔克分解

在本文所提 NFTD-sGSADMM 方法中, 基于因子先验的非凸张量塔克分解是为了避免根据经验选择提前设置秩和更准确地评估背景。为了证明 NFTD 正则项的有效性, 引入了基于因子先验的塔克分解 FTD 正则项进行比较, 表 3 列出了 NFTD 和 FTD 在序列 4-6 上的比较结果。从表 3 中可以看出, NFTD-ADMM 的方法的  $AUC_{(\tau, P_d)}$  值和  $AUC_{OA}$  值高于 FTD-ADMM 方法, NFTD-sGSADMM 方法的  $AUC_{OA}$  和  $AUC_{(\tau, P_d)}$  值要高于 FTD-sGSADMM 方法。这说明 NFTD 正则项能够更准确地评估背景, 这主要是因为与核范数相比, 非凸张量秩接近范数能够更准确地逼近塔克秩。同时, 从表 3 中可以看出, 在序列 4-6 上, NFTD-ADMM 方法的  $AUC_{SNPR}$  值要高于 FTD-ADMM 方法, NFTD-sGSADMM 方法的  $AUC_{SNPR}$  值要高于 FTD-sGSADMM 方法, 这说明 NFTD 正则项的背景抑制能力比 FTD 正则项的背景抑制能力强。

#### 3.4.2 对称高斯-赛德尔的交替方向乘子法

为验证高斯-赛德尔的交替方向乘子法 (sGSADMM) 的有效性, 引入了交替方向乘子法 (ADMM) 进行比较, 表 3 列出了 sGSADMM 和 ADMM 在序列 4-6 上的比较结果。从表 3 中可以看出, FTD-sGSADMM 方法的  $AUC_{(\tau, P_d)}$  值和  $AUC_{OA}$  值高于 FTD-ADMM 方法, 这说明 FTD-sGSADMM 方法的检测能力高于 FTD-ADMM 方法。这是因为与直接使用 ADMM 算法求解模型相比, 采用对称高斯-赛德尔的交替方向乘子法可以利用更多的结构信息, 这有助于更准确地检测目标。同时, 从表 3 中可以看出, NFTD-sGSADMM 方法的  $AUC_{SNPR}$  值高于 NFTD-ADMM 方法, 这说明采用对称高斯-赛德尔的交替方向乘子法有助于更好地抑制背景杂波, 从而更准确地评估背景, 进一步提高检测性能。综上所述, 结合 NFTD 正则项和 sGSADMM 算法可以提高方法的检测能力和背景抑制能力。

### 3.5 运行时间分析

对于检测器来说, 算法的计算效率是红外小目标检测研究的一个主要关注点。在这一章节中, 分



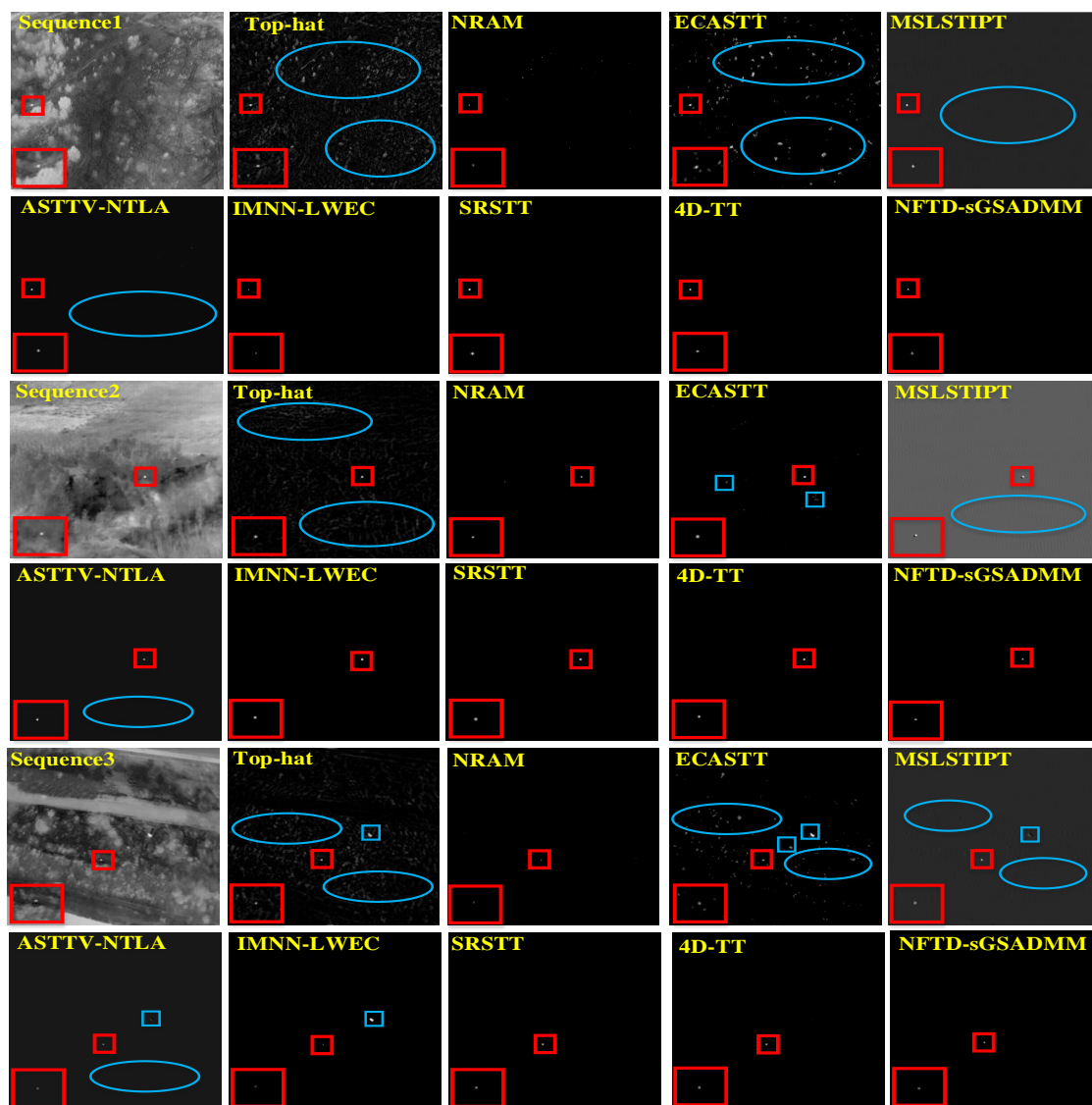


图4 本文方法和8种对比方法在序列1-3上的定性实验结果对比图,红色矩形框表示目标,蓝色椭圆表示背景杂波和虚警

析了本文方法和对比方法在6组场景中的运行时间。表4中列出了这些方法平均处理每帧图像需要的时间。从表4中可以看到,Top-hat方法的运行时间最短,效率最快。这主要是因为基于滤波的方法结构设计简单,复杂度低。但是基于滤波的方法适用于简单均匀的场景,在复杂场景中有许多背景杂波残留。从表4中可以看到,基于低秩稀疏分解的方法都需要较长的时间。NRAM方法处理一帧图像需要的时间比利用时域信息的方法(MSLSTIPT, ASTTV-NTLA, IMNN-LWEC)需要的时间短,这是因为NRAM方法不需要构造时空张量,这有助于缩短时间。从表4中可以看到,SRSTT方法处理一帧图像需要的时间是所有方法中最长的。这主要是因为SRSTT方法在构造张量时未进行块构建操作,

这使得张量的维度很大,因此很费时。除了SRSTT方法,ECASTT方法也需要较长的时间,主要是因为非局部总变分正则项的存在。在基于低秩稀疏分解的方法中,4D-TT方法需要的时间短于其他的低秩稀疏分解方法,这主要是因为4D-TT方法是在因子矩阵上进行计算的,这能够降低计算复杂度,但是构造4D张量是一个比较耗时的操作。相较于上述方法,本文提出的NFTD-sGSADMM方法处理一帧图像的时间仅次于Top-hat方法,这主要是NFTD-sGSADMM方法是对因子矩阵添加低秩约束,这样不仅可以充分挖掘数据的潜在结构信息,更有利于降低计算复杂度,提高计算效率。综上所述,本文提出的NFTD-sGSADMM方法不仅可以获得高的检测性能,还能有较快的检测速度。

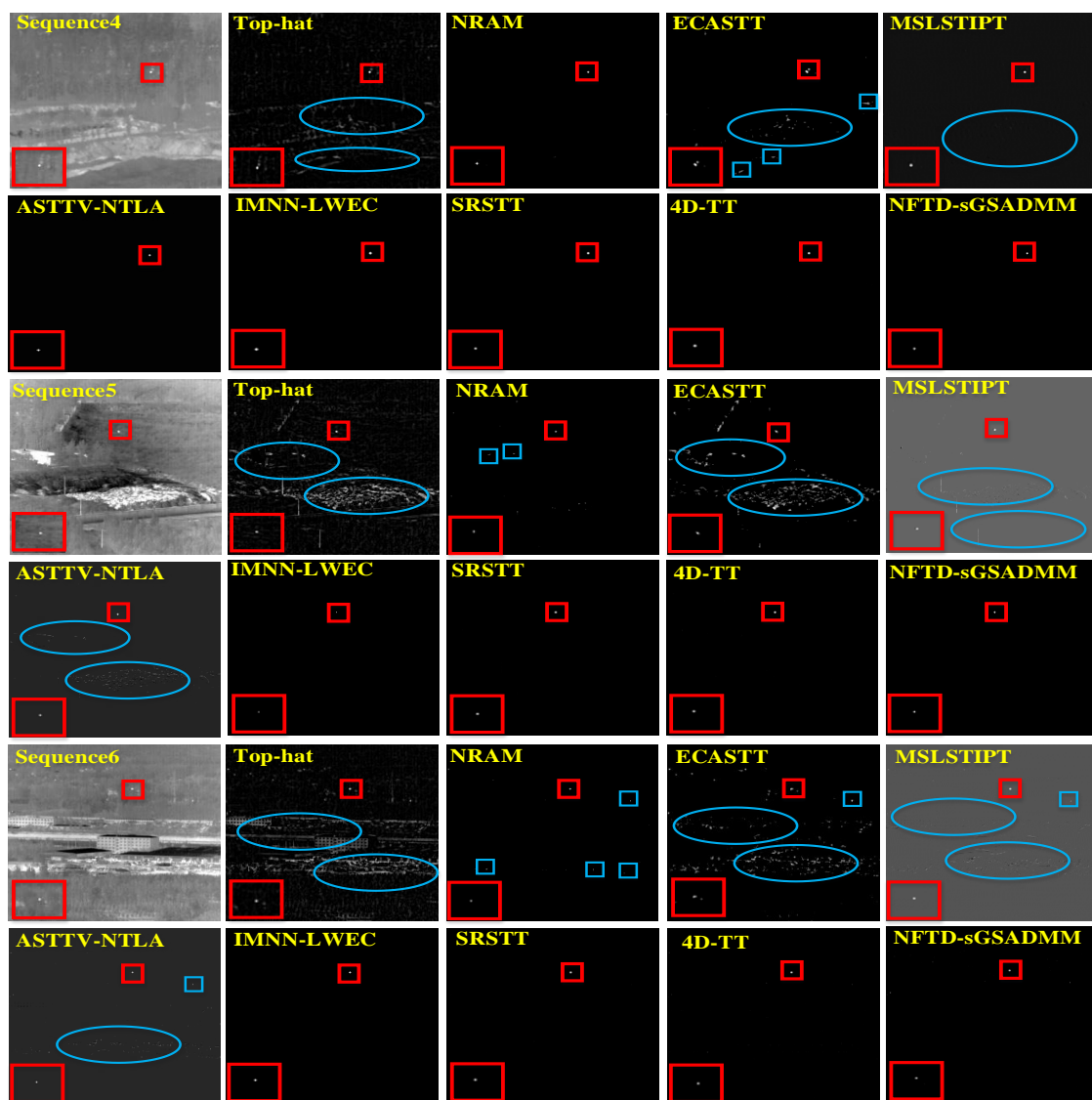


图5 本文算法和8种对比算法在序列4-6上的定性实验结果对比图,红色矩形框表示目标,蓝色椭圆表示背景杂波和虚警

## 4 结 论

本文创新性地提出了一种基于因子先验的非凸张量塔克分解的红外小目标检测方法。具体结论如下:

(1) 为了避免现有低秩塔克分解方法需要根据经验提前设置秩,在不同场景中秩的大小不一样,不适用于实际工程的应用,本文采用非凸秩接近范数约束低秩塔克分解方法的潜在因子,这避免了根据经验提前设置秩,有效提高算法的鲁棒性。同时,对因子矩阵施加低秩约束可以降低计算复杂度,提高计算效率。

(2) 与现有低秩稀疏分解方法不同的是,本文设计了基于对称高斯-赛德尔的交替方向乘法器算法来求解提出的模型。与直接使用交替方向乘子

法相比,基于对称高斯-赛德尔的交替方向乘法器算法可以利用更多的结构信息,从而获得更高的检测精度。

综上所述,本文提出的 NFTD-sGSADMM 方法通过结合 NFTD 正则项和 sGSADMM 算法能够很好地解决根据经验提前设置秩的问题,提高了算法在不同场景中的鲁棒性。定性和定量实验结果表明,本文提出的 NFTD-sGSADMM 算法在检测能力和背景抑制能力方面都优于对比方法。尽管本文方法在复杂的场景中能够取得好的检测性能和快的检测速度,但是所提方法需要手动调节正则化参数,这不适用于实际场景。受到深度展开方法的启发,未来的工作将聚焦于基于低秩稀疏分解方法的参数自学习,这有助于进一步提高方法的检测性能和

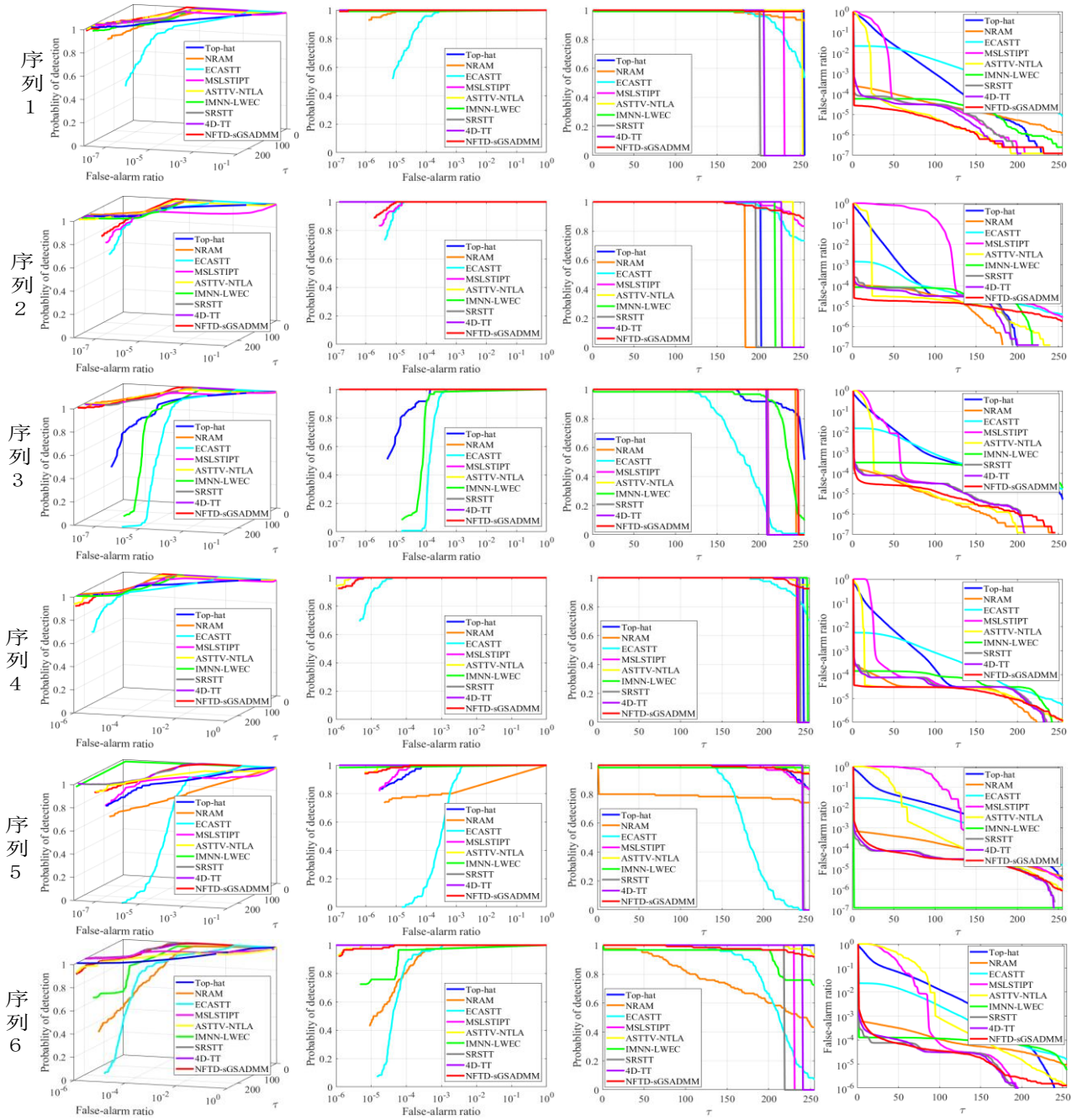


图6 本文算法在序列1-6上的3D ROC曲线,每一行从左到右分别表示3D ROC曲线,2D ROC曲线( $F_a, P_d$ ),2D ROC曲线( $\tau, P_d$ ),2D ROC曲线( $\tau, F_a$ )。

在实际场景中的实用性。相关代码将于不久后公开在 <https://github.com/LiuTing20a>。



表 2 不同方法在序列 1-序列 6 上的检测性能评价

| 场景   | 指标                  | Top-hat       | NRAM          | ECASTT        | MSLSTIPT      | ASTTV-<br>NTLA | IMNN-<br>LWEC | SRSTT         | 4D-TT         | NFTD-<br>sGSADMM |
|------|---------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|------------------|
| 序列 1 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <b>0.9999</b> | <u>0.9958</u> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>  | <u>0.9958</u> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>    |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | <u>0.9941</u> | 0.9835        | 0.9577        | 0.9000        | 0.9863         | 0.9936        | 0.7863        | 0.8059        | <b>0.9995</b>    |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | 0.0512        | <b>0.0020</b> | 0.0082        | 0.0752        | <u>0.0300</u>  | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b>    |
|      | $AUC_{OA}$          | 1.9428        | 1.9773        | 1.9494        | 1.8247        | 1.9562         | <u>1.9874</u> | 1.7842        | 1.8038        | <b>1.9974</b>    |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 19.416        | 491.75        | 116.79        | 11.968        | 32.877         | <u>496.80</u> | 393.15        | 402.95        | <b>499.75</b>    |
| 序列 2 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>  | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>    |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | 0.7902        | 0.7157        | 0.9682        | <b>0.9866</b> | 0.9431         | 0.8569        | 0.7667        | 0.8882        | <u>0.9830</u>    |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | 0.0270        | <b>0.0020</b> | <u>0.0022</u> | 0.2867        | 0.0439         | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b>    |
|      | $AUC_{OA}$          | 1.7631        | 1.7136        | <u>1.9659</u> | 1.6998        | 1.8991         | 1.8548        | 1.7646        | 1.8861        | <b>1.9809</b>    |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 29.267        | 357.85        | 440.09        | 3.4412        | 21.483         | 428.45        | 383.35        | <u>444.10</u> | <b>491.50</b>    |
| 序列 3 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <u>0.9998</u> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>  | 0.9915        | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>    |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | <u>0.9617</u> | 0.9549        | 0.7065        | 0.8255        | 0.8176         | 0.9056        | 0.8216        | 0.8176        | <b>0.9667</b>    |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | 0.0309        | <b>0.0020</b> | 0.0051        | 0.0643        | 0.0455         | <u>0.0022</u> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b>    |
|      | $AUC_{OA}$          | 1.9307        | <u>1.9528</u> | 1.7012        | 1.7611        | 1.7720         | 1.8949        | 1.8195        | 1.8155        | <b>1.9646</b>    |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 31.123        | <u>477.45</u> | 138.53        | 12.838        | 17.969         | 411.64        | 410.80        | 408.80        | <b>483.35</b>    |
| 序列 4 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>  | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>    |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | 0.9667        | 0.9353        | 0.9766        | 0.9471        | <b>0.9984</b>  | 0.9863        | 0.9510        | 0.9392        | <u>0.9947</u>    |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | 0.0247        | <b>0.0020</b> | <u>0.0034</u> | 0.0741        | 0.0204         | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b>    |
|      | $AUC_{OA}$          | 1.9419        | 1.9332        | 1.9731        | 1.8729        | 1.9779         | <u>1.9842</u> | 1.9489        | 1.9371        | <b>1.9926</b>    |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 39.138        | 467.65        | 287.24        | 12.781        | 48.941         | <u>493.15</u> | 475.50        | 469.60        | <b>497.35</b>    |
| 序列 5 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <b>0.9999</b> | 0.8999        | <u>0.9995</u> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>  | 0.9916        | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>    |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | 0.9878        | 0.7855        | 0.7130        | 0.9846        | <b>0.9976</b>  | 0.9853        | 0.9667        | 0.9627        | <u>0.9911</u>    |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | <b>0.0479</b> | <u>0.0022</u> | 0.0099        | 0.3427        | 0.1384         | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b>    |
|      | $AUC_{OA}$          | 1.9398        | 1.6832        | 1.7026        | 1.6418        | 1.8591         | <u>1.9749</u> | 1.9646        | 1.9606        | <b>1.9890</b>    |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 20.622        | 357.05        | 72.020        | 2.8731        | 7.2081         | <u>492.65</u> | 483.35        | 481.35        | <b>495.55</b>    |
| 序列 6 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <b>0.9999</b> | <u>0.9874</u> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>  | 0.9833        | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b>    |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | <b>1.0000</b> | 0.7614        | 0.8175        | 0.9000        | <u>0.9976</u>  | 0.9290        | 0.8529        | 0.9392        | 0.9812           |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | 0.0521        | <u>0.0021</u> | 0.0075        | 0.1386        | 0.1776         | <u>0.0021</u> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b>    |
|      | $AUC_{OA}$          | <u>1.9478</u> | 1.7467        | 1.8099        | 1.7613        | 1.8199         | 1.9102        | 1.8508        | 1.9371        | <b>1.9791</b>    |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 19.194        | 362.57        | 109.00        | 6.4935        | 5.6171         | 442.38        | 426.45        | <u>469.60</u> | <b>490.60</b>    |

表 3 消融实验相关的性能评价

| 场景   | 指标                  | FTD-AD-MM     | FTD-sGSADMM   | NFTD-ADMM     | NFTD-sGSADMM  |
|------|---------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 序列 4 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <u>0.9833</u> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | 0.8888        | <u>0.9881</u> | 0.9865        | <b>0.9947</b> |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> |
|      | $AUC_{OA}$          | 1.8701        | <u>1.9860</u> | 1.9844        | <b>1.9926</b> |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 444.40        | <u>494.05</u> | 493.25        | <b>497.35</b> |
| 序列 5 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <b>0.9999</b> | <u>0.9958</u> | <b>0.9999</b> | <b>0.9999</b> |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | <b>0.9941</b> | 0.9751        | 0.9814        | <u>0.9911</u> |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | <u>0.0199</u> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> |
|      | $AUC_{OA}$          | 1.9741        | 1.9689        | <u>1.9793</u> | <b>1.9890</b> |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 49.955        | 487.55        | <u>490.70</u> | <b>495.55</b> |
| 序列 6 | $AUC_{(F_s, P_d)}$  | <b>0.9999</b> | 0.9749        | <u>0.9916</u> | <b>0.9999</b> |
|      | $AUC_{(\tau, P_d)}$ | 0.9314        | 0.9411        | <u>0.9600</u> | <b>0.9812</b> |
|      | $AUC_{(\tau, F_s)}$ | <u>0.0217</u> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> | <b>0.0020</b> |
|      | $AUC_{OA}$          | 1.9096        | 1.9140        | <u>1.9496</u> | <b>1.9791</b> |
|      | $AUC_{SNPR}$        | 42.922        | 470.55        | <u>480.00</u> | <b>490.60</b> |

表 4 本文方法和对比方法在六个场景中的时间对比

|              | 序列 1           | 序列 2           | 序列 3           | 序列 4           | 序列 5           | 序列 6           |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Top-hat      | <b>0.0043s</b> | <b>0.0042s</b> | <b>0.0042s</b> | <b>0.0042s</b> | <b>0.0050s</b> | <b>0.0041s</b> |
| NRAM         | 1.3736s        | 0.9492s        | 1.3235s        | 1.4354s        | 1.2867s        | 1.3546s        |
| ECASTT       | 4.7305s        | 4.8508s        | 4.7872s        | 4.7385s        | 4.9369s        | 4.6887s        |
| MSLSTIPT     | 2.1905s        | 2.2949s        | 2.2691s        | 2.2357s        | 2.2702s        | 2.2541s        |
| ASTTV-NTLA   | 1.9818s        | 1.8454s        | 1.8661s        | 1.7746s        | 1.8840s        | 1.8520s        |
| IMNN-LWEC    | 2.5232s        | 2.5428s        | 2.5530s        | 2.6821s        | 2.5472s        | 2.7229s        |
| SRSTT        | 13.994s        | 12.236s        | 13.235s        | 14.389s        | 14.287s        | 14.566s        |
| 4D-TT        | 0.9129s        | 0.9272s        | 0.9319s        | 0.9310s        | 0.9881s        | 0.9635s        |
| NFTD-sGSADMM | <u>0.1807s</u> | <u>0.1795s</u> | <u>0.2418s</u> | <u>0.1778s</u> | <u>0.4583s</u> | <u>0.4309s</u> |

## References

- [1] Li B, Wang Y, Wang L, *et al.* Monte Carlo linear clustering with single-point supervision is enough for infrared small target detection[C]//Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2023: 1009–1019.
- [2] Liu T, Yang J, Li B, *et al.* Infrared small target detection via nonconvex tensor tucker decomposition with factor prior [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. **60**, pp. 1–17, 2023.
- [3] 林再平, 罗伊杭, 李博扬, 等. 基于梯度可感知通道注意力模块的红外小目标检测前去噪网络(英文)[J]. 红外与毫米波学报, 2024, **43**(02): 254–260.
- [4] Li B, Wang L, Wang Y, *et al.* Mixed-Precision Network Quantization for Infrared Small Target Segmentation [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2024.
- [5] 林再平, 李博扬, 李森, 王龙光, 吴天昊, 罗伊杭, 肖超, 李若敬, 安玮. 结合跨尺度特征融合与瓶颈注意力模块的轻量型红外小目标检测网络 [J]. 红外与毫米波学报. 2022: 1102–1112.
- [6] TOM V T, PELI T, LEUNG M, *et al.* Morphology-based algorithm for point target detection in infrared backgrounds [C]//Proceedings of the International Society for Optics and Photonics. [S.l.]: SPIE, 1993: 2–11.
- [7] DESHPANDE S D, MENG H E, RONDA V, *et al.* Max-mean and max-median filters for detection of small-targets [C]// Proceedings of SPIE-The International Society for Optical Engineering. Denver, CO, United States: SPIE, 1999: 74–83..
- [8] CHEN C L P, LI H, WEI Y T, *et al.* A local contrast method for small infrared target detection[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2013, **52**(1): 574–581..
- [9] C. Gao, D. Meng, Y. Yang, Y. Wang, X. Zhou, and A. G. Hauptmann, “Infrared patch-image model for small target detection in a single image,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. **22**, no. 12, pp.4996–5009, 2013.
- [10] X. Wang, Z. Peng, D. Kong, and Y. He, “Infrared dim and small target detection based on stable multisubspace learning in heterogeneous scene,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. **55**, no. 10, pp. 5481–5493, 2017.
- [11] L. Zhang, L. Peng, T. Zhang, S. Cao, and Z. Peng, “Infrared small target detection via non-convex rank approximation minimization joint  $l_2, l_1$  norm,” *Remote Sensing*, vol. **10**, no. 11, p. 1821, 2018.
- [12] Y. Dai and Y. Wu, “Reweighted infrared patch-tensor model with both nonlocal and local priors for single-frame small target detection,” *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. **10**, no. 8, pp. 3752–3767, 2017.
- [13] L. Zhang and Z. Peng, “Infrared small target detection based on partial sum of the tensor nuclear norm,” *Remote Sensing*, vol. **11**, no. 4, p. 382, 2019.
- [14] Kong X, Yang C, Cao S, *et al.* Infrared small target detection via nonconvex tensor fibered rank approximation [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2021, **60**: 1–21.
- [15] Liu T, Yin Q, Yang J, *et al.* Combining deep denoiser and low-rank priors for infrared small target detection[J]. *Pattern Recognition*, 2023, **135**: 109184.
- [16] M. Zhao, W. Li, L. Li, P. Ma, Z. Cai, and R. Tao, “Three-order tensor creation and tucker decomposition for infrared small-target detection,” (*IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*), vol. **60**, pp. 1–16, 2021.
- [17] Y. Sun, J. Yang, M. Li, and W. An, “Infrared small target detection via spatial-temporal infrared patch-tensor model and weighted Schatten  $p$ -norm minimization,” *Infrared Physics & Technology*, vol. **102**, p. 103050, 2019..
- [18] Y. Sun, J. Yang, Y. Long, and W. An, “Infrared small target detection via spatial-temporal total variation regularization and weighted tensor nuclear norm,” *IEEE Access*, vol. **7**, pp. 56667–56682, 2019.
- [19] T. Liu, J. Yang, B. Li, C. Xiao, Y. Sun, Y. Wang, and W. An, “Nonconvex tensor low-rank approximation for infrared small target detection,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. **60**, pp. 1–18, 2021.
- [20] P. Zhang, L. Zhang, X. Wang, F. Shen, T. Pu, and C. Fei, “Edge and corner awareness-based spatial-temporal tensor model for infrared small-target detection,” *IEEE TGRS*, vol. **59**, no. 12, pp. 10708–10724, 2020.
- [21] Y. Sun, J. Yang, W. An. Infrared dim and small target detection via multiple subspace learning and spatial-temporal patch-tensor model [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2020, **59**(5): 3737–3752.
- [22] H.-K. Liu, L. Zhang, and H. Huang, “Small target detection in infrared videos based on spatio-temporal tensor model,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. **58**, no. 12, pp. 8689–8700, 2020.
- [23] Wang, B. Tao, X. Kong, and Z. Peng, “Infrared small target detection using nonoverlapping patch spatial-temporal tensor factorization with capped nuclear norm regularization,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. **60**, pp. 1–17, 2021.
- [24] Y. Luo, X. Li, S. Chen, C. Xia, and L. Zhao, “Imn-lwec: A novel infrared small target detection based on spatial-temporal tensor model,” *IEEE TGRS*, vol. **60**, pp. 1–22, 2022.[18] Wu K, Otoo E, Shoshani A. Optimizing connected component labeling algorithms[C]//Medical Imaging 2005: Image Processing. SPIE, **2005**, 5747: 1965–1976.
- [25] Liu T, Yang J, Li B, *et al.* Representative coefficient total variation for efficient infrared small target detection[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. **61**, pp. 1–18, 2023.
- [26] D. Pang, Shan T, Li W, *et al.* Facet derivative-based multidirectional edge awareness and spatial-temporal tensor model for infrared small target detection[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2021, **60**: 1–15.
- [27] Li J, Zhang P, Zhang L, *et al.* Sparse regularization-based spatial-temporal twist tensor model for infrared small target detection [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2023, **61**: 1–17..
- [28] Luo Y, Li X, Wang J, *et al.* Clustering and Tracking-



- Guided Infrared Spatial-Temporal Small Target Detection [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2024.
- [29] F. Wu, Yu H, Liu A, *et al.* Infrared small target detection using spatiotemporal 4-D tensor train and ring unfolding [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2023, **61**: 1–22.
- [30] Luo Y, Li X, Chen S, *et al.* 4DST-BTMD: An Infrared Small Target Detection Method based on 4D Data-Sphered Space [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2023.
- [31] Li B, Xiao C, Wang L, *et al.* Dense nested attention network for infrared small target detection [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, **32**: 1745–1758.
- [32] Ying X, Liu L, Wang Y, *et al.* Mapping degeneration meets label evolution: Learning infrared small target detection with single point supervision [C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2023: 15528–15538.
- [33] Wu S, Xiao C, Wang L, *et al.* RepISD-Net: Learning efficient infrared small-target detection network via structural re-parameterization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2023.
- [34] X. Tian, Xie K, Zhang H. A low-rank tensor decomposition model with factors prior and total variation for impulsive noise removal [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, **31**: 4776–4789.
- [35] Kang Z.; Peng C.; Cheng Q. Robust PCA via Nonconvex Rank Approximation. *IEEE Data Min.* **2015**, b211 – 220.
- [36] Y. Xie, S. Gu, Y. Liu, W. Zuo, W. Zhang, and L. Zhang, “Weighted Schatten  $p$ -norm minimization for image denoising and background subtraction,” *IEEE TIP*, vol. **25**, no. 10, pp. 4842 – 4857, 2016..
- [37] X. Sun, L. Guo, W. Zhang, Z. Wang, and Q. Yu, “Small aerial target detection for airborne infrared detection systems using lightgbm and trajectory constraints,” *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. **14**, pp. 9959 – 9973, 2021.
- [38] B. Hui, Z. Song, H. Fan, P. Zhong, W. Hu, X. Zhang, J. Lin, H. Su, W. Jin, Y. Zhang *et al.*, “A dataset for infrared image dim-small aircraft target detection and tracking under ground/air background,” *Sci. Data Bank*, vol. **5**, p. 12, 2019.