

# 大气介质红外辐射场混沌与分形特征

徐文君, 孙胜利\*, 刘高睿\*

(中国科学院上海技术物理研究所 智能红外感知重点实验室, 上海 200083)

**摘要:** 大气介质是红外光学的重要传播媒介,也是影响红外动态信号检测与追踪的复杂背景。与固、液态介质相对稳定的性质相比,大气介质具有动态复杂性与长期不可预测性,阻碍了将其他领域成功的波动技术(如弹性波成像与反演、量子场波函数等)引入大气电磁波场,故传统经典物理学理论无法精确刻画此类复杂系统问题。但自然界此类场中产生的无序性与随机性通常可用分形的概念来阐述。利用风云4A 气象卫星记录的红外云图,以水汽-二氧化碳波段的红外辐射波场为例,选取云图上任一无规时间序列,计算分形维度为分数与最大 Lyapunov 指数为正,初步判断大气介质红外辐射场具有混沌特征,也证明红外辐射场的动力学行为是有限自由度控制的动态非线性不规则行为。根据排列熵参数取值范围(0.87, 0.92)趋于 1 判定,风云4A 涵盖 0.45~13.8  $\mu\text{m}$  波段的全红外数据 displays 强混沌性,且混沌强度分布具有空间不均匀性。本项工作既为利用混沌特性来研究动目标及背景杂波动态演化机理、捕捉时敏微扰信号以及对水陆空红外辐射场进行中长期非线性预测等提供了理论前提;也为建立大气红外辐射场的非保守耗散方程,刻画传输介质特性以及研究宏观与微观传播机理等基本问题奠定了实验基础。

**关键词:** 混沌; Lyapunov 指数; 分形维度; 相关维度; 排列熵

中图分类号: O43; O29 文献标识码: A

## Chaotic and fractal characteristics of infrared electromagnetic wavefield in the media of atmosphere

XU Wen-Jun, SUN Sheng-Li\*, LIU Gao-Rui\*

(Key Laboratory of Intelligent Infrared Sensing, Shanghai Institutes of Technical Physics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200083, China)

**Abstract:** Chaotic dynamics is a significant systematic feature of infrared electromagnetic wavefields that requires further study. Understanding the chaotic dynamics of infrared radiation wavefields can lead to advancements in high-performance detection, imaging, and recognition of weak, moving, time-varying signals. To extract the time series of the dynamic system, we have established a 4D time-space observing system. We then use the FFT transform on a random time series of frequency-band infrared data to obtain the fractional Brownian motion dimension, indicating a fractal structure in the atmospheric infrared radiation wavefield. By using time-delay analysis, we construct a dimensional phase space and compute the fractal dimension. We also observe that the first Lyapunov exponent remains positive in different phase spaces, leading to the initial conclusion that the atmospheric infrared wavefield is chaotic. To measure the chaotic strength of real cases in the time-space domain, we use the permutation entropy. These results serve as a foundation for further research, such as understanding the dynamic evolution mechanism of moving objects and their background wavefields, capturing time-varying signals, and making long-term nonlinear predictions of infrared wave behaviors in different domains.

**Key words:** chaos, Lyapunov exponents, fractal dimension, correlation dimension, permutation entropy

### 引言

大气是红外光学被动探测与成像的重要媒介。

大气中的云、雨、雾或气溶胶、固体颗粒等会引起光的强散射或吸收等作用。由大气介质的复杂性、时

收稿日期: 2023-06-29, 修回日期: 2024-01-04

Received date: 2023-06-29, Revised date: 2024-01-04

基金项目: 万人计划领军人才项目; 中国科学院引才计划-B类人才项目

Foundation items: Supported by the Leading Talent of "Ten Thousand Plan" - National High Level Talents Special Support Plan; the One Hundred Person Project of the Chinese Academy of Sciences - B

作者简介 (Biography): 徐文君 (1981-), 女, 山东青岛人, 中国科学院百人副研究员, 博士, 主要研究领域为复杂系统理论与波动力学的多源传播及耦合机制研究. E-mail: xuwenjun@mail.sitp.ac.cn

\*通讯作者 (Corresponding authors): E-mail: palm\_sun@mail.sitp.ac.cn; liugaorui@mail.sitp.ac.cn

变性与非线性形成的复杂红外辐射背景严重制约遥感图像处理、地面目标识别、空中交通管制和水面船只导航等信息领域中的红外弱目标检测与追踪。换言之,目标辐射与背景辐射之间的时间、空间关系是制约红外暗弱目标探测技术的关键难题。综上,对低信噪比与大气红外辐射背景这一非线性复杂系统进行研究是一项亟待突破且极具挑战的课题。

自然界中的背景场,例如电场、磁场、重力场、温度场、波场(包括电磁波与机械波)、大气与洋流变化等通常呈现非常复杂的时空分布。自然界此类场中产生的随机性或无序性,可用分形(fractal)的概念来描述。分形最显著的特征为看似非常复杂无序的现象,实际可用很少的参量来控制,即简单的非线性系统可以产生复杂的混沌效应<sup>[1]</sup>。就现代数学而言,混沌是指系统在沿着时间维度演化的过程中表现出来的、其微观个体状态的不可预测性,它是系统演变复杂的重要表现。混沌现象(即对小扰动产生指数级的敏感性)在自然界中几乎随处可见,如:生物系统(神经形态动力学<sup>[2]</sup>和基因神经调控网络<sup>[3]</sup>)、大气动力系统(大气边界层湍流<sup>[4]</sup>与大气电场强度<sup>[5]</sup>)、腔光学力学系统(硅基单片光机械振荡器<sup>[6]</sup>)、微观系统(布朗运动<sup>[7]</sup>与量子混沌<sup>[8]</sup>)等。混沌已经彻底改变了涵盖宏观到微观尺度的非线性科学领域,并激发了从神经网络、极端事件统计到物理学的基础研究。

大气介质红外辐射场的演化过程反映了地球内部电磁辐射、天体辐射、大气辐射等红外辐射源与地表地貌、大气等介质的复杂交互作用。整个物理过程是复杂的、动态非线性不规则行为。那么,这种复杂的动态非线性系统是否是混沌的?通常,我们认为系统具有混沌性,如果该系统满足<sup>[3]</sup>:(a)有界性。系统有界是指,比如,行星绕恒星旋转,它的运动轨迹在轨道之内,而不是无限远离;(b)系统具有确定性。该确定性是指固定的初始条件会演化出固定的状态;(c)小的扰动导致系统状态的指数级增大。有确定性方程的模拟系统,可以很简单地判定是否具有混沌性。只需要稍微改变初始条件,多次运行模拟程序,然后观察模拟系统状态是否发生较大分歧,即判定系统是否具有混沌性。真实系统(包括我们拟讨论的大气系统,也包括生物系统、地磁场等)由于动态噪声等因素影响,不具有严格数学定义下的完全混沌性。同时由于噪声在时空

域的动态变化,不完全混沌系统的混沌强度在空间分布上必然有所差异。本文以风云4A静止卫星L1级数据记录的红外全波段数据为例,通过分数维布朗运动维度、吸引子相关维度、最大Lyapunov指数以及排列熵等参数,对大气介质宏观红外辐射场的混沌与分形特征进行分析。其中,分数维布朗运动维度、吸引子相关维度与最大Lyapunov指数称为静态复杂性测量参数,用以衡量系统状态的多样性;而排列熵与0-1测试相关参数称为动态复杂性测量参数,用以衡量系统状态的变化。数值分析结果显示,大气红外辐射场具有混沌特征,本文首次给出了混沌强度与排列熵在宏观观测尺度上的空间分布特征。

## 1 理论与计算

### 1.1 四维时空域观测系统

以FY-4A号静止卫星L1数据采集的二氧化碳与水汽频段为例,该波段记录的不同时刻红外气象云图,如图1所示。建立四维时空域观测系统,本文设定起始采集时间为 $t = t_0$ ,采样间隔为 $\Delta t = 4 \text{ min}$ ,总采样时长为997个小时,采样点数为14959,采样高度 $z = z_0$ ,空间像素采样点为 $(x \times y) = (600 \times 1500)$ 。 $t_0$ 到 $t_2$ 时刻记录了红外电磁辐射波场的演化过程,称这个记录时间演化过程的红外数据体为红外影像(具有四维时空特征)。图2是固定像素点(如图1红色点处)采集到的红外辐射强度随时间的变化曲线。

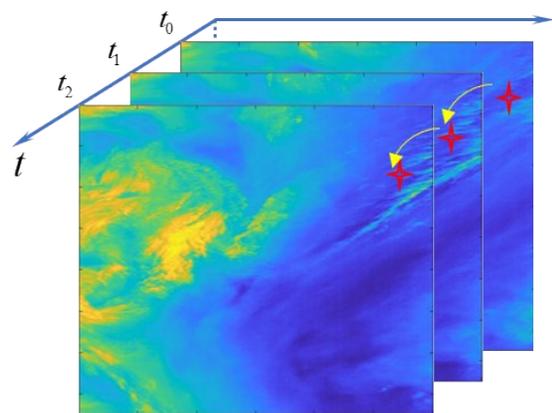


图1 FY-4A红外云图随时间演化过程(二氧化碳与水汽波段)  
Fig. 1 Evolution of infrared clouds with time (carbon dioxide and water vapor bands from Satellite FY-4A)

### 1.2 分数维布朗运动的维度 $D_b$

考虑一无规时间序列 $x(t)$ ,是随机的且具有特

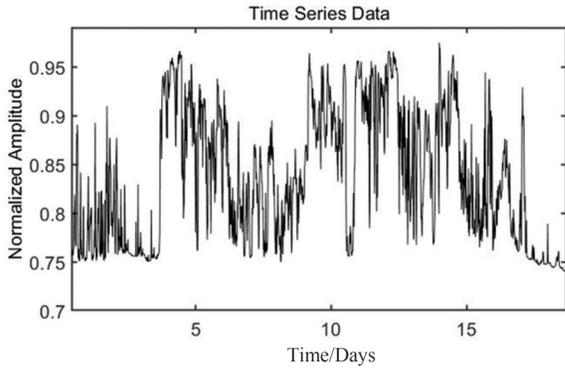


图2 如图1红色像点处提取的时间序列,也称为波信号  
Fig. 2 Time series (i. e. wave signals) recorded at the point in Fig. 1 marked by a red star

定的谱。谱密度具有以频率的幂次律依赖关系,即可求出分数维布朗运动的维度  $D_b$ , 确定一个分形结构。它大致反映了时间序列的不规则性程度。 $D_b$  越大,时间序列变化就越复杂<sup>[1,9]</sup>。计算时间序列的傅里叶频谱,谱指数  $\beta$  值即为频谱图在双对数坐标系下曲线的拟合斜率(见图3所示)。 $\beta$  与  $D_b$  的关系为<sup>[9]</sup>:

$$\beta = 5 - 2D_b \quad , \quad (1)$$

由此可求得分数维布朗运动的维度  $D_b$ 。本文中  $\beta = -1.40 \pm 0.2$ , 求得的  $D_b = 3.2 \pm 0.1$ 。

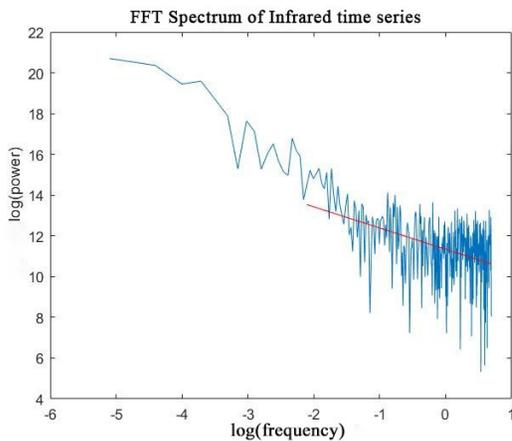


图3 红外波场某一时间序列的频谱(采用双对数坐标)  
Fig. 3 Time series spectrum of infrared wave-fields in log-log coordinates

### 1.3 吸引子的相关维度(即分形维度)

提取  $x_{ij} = (x_i, y_j, z_0)$  处的时间序列  $p(x_{ij}, t)$ , 利用时间延迟方法, 构建嵌入维度为  $M$  维相空间内的一个矢量点  $X_i$ , 坐标为  $\{X_i(t_0), X_i(t_0 + \tau), \dots, X_i(t_0 + (M - 1)\tau)\}$ 。 $\tau$  称为嵌入延迟, 计算嵌入延迟的常用方法有自相关函数法、平均位移法、复自相关函数

法, 以及互信息法<sup>[22]</sup>等。本文采用的计算嵌入延迟  $\tau$  方法是互信息法。互信息指的是两个集合之间的相关性, 交互信息法就是基于混沌序列的互信息函数实现对嵌入时延的计算, 其中一个很重要的参数叫做信息熵, 信息熵是指系统对一个变量的平均信息量。

对于时间序列  $S(i), i = 1, 2, \dots, ns$  和  $Q(j), j = 1, 2, \dots, nq$ , 其信息熵的计算公式如下:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{ns} P_s(s_i) \ln P_s(s_i) \quad , \quad (2)$$

$$H(Q) = -\sum_{j=1}^{nq} P_q(q_j) \ln P_q(q_j) \quad , \quad (3)$$

其中,  $P_s(s_i)$  和  $P_q(q_j)$  分别指变量  $s_i$  和  $q_j$  出现的概率。

同理, 定义  $P_{sq}(s_i, q_j)$  为变量  $s_i$  和  $q_j$  的联合概率分布, 则其联合熵和条件熵的计算公式为:

$$H(S, Q) = -\sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{nq} P_{sq}(s_i, q_j) \ln P_{sq}(s_i, q_j) \quad . \quad (4)$$

设在时刻  $t_0$  时,  $X$  已知, 则在  $t + T$  时刻的  $X$  平均不确定性为:

$$H(Q|S) = -\sum_i P_{sq}(s_i, q_j) \ln \frac{P_{sq}(s_i, q_j)}{P_s(s_i)} \quad . \quad (5)$$

$$= H(S, Q) - H(S)$$

故  $S$  和  $Q$  的互信息函数定义为:

$$I(S, Q) = H(S) - H(Q|S)$$

$$= \sum_i \sum_j P_{sq}(s_i, q_j) \ln \frac{P_{sq}(s_i, q_j)}{P_s(s_i)P_q(q_j)} \quad , \quad (6)$$

记  $[s, q] = [X(t), X(t + \tau)]$ , 则互信息函数  $I(S, Q)$  可以变成关于嵌入时延  $\tau$  的函数, 用于表示  $X(t)$  和  $X(t + \tau)$  之间的相关性。当  $I(S, Q)$  取得极小值时,  $X(t)$  和  $X(t + \tau)$  之间的相关性也最小。因此, 为求得嵌入延迟时间, 取不同的延迟时间参数  $\tau$ , 依次计算互信息:

$$I(\tau) = H(x) + H(x_\tau) - H(x, x_\tau) \quad , \quad (7)$$

绘制  $\tau \sim I(\tau)$  曲线, 取曲线的第一个极小点对应的时间为嵌入延迟时间。

从这些数据中任意选取一个参考点  $\bar{X}_i$ , 计算它至其余  $M - 1$  个点  $X_j, j \neq i$  的距离  $d_{ij} = |\bar{X}_i - X_j|$ , 便得到以  $\bar{X}_i$  为中心、以  $\bar{r}$  为半径的相点数目。对所有的  $i$  重复这一过程, 得到:

$$C(\bar{r}) = \frac{1}{M^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M \theta(|\bar{r}| - |\bar{X}_i - X_j|) \quad , \quad (8)$$

上式中  $\theta$  为 Heaviside 函数,  $C(\bar{r})$  为相空间的状态度

量。定义  $C(\vec{r}) = a|\vec{r}|^d$ , 其中,  $a$  为常数, 即可由  $\lg C(\vec{r})$  对  $\lg|\vec{r}|$  的斜率得到表征混沌吸引子几何结构的分形维数  $d_2$ 。吸引子的分形维度又称为相关维度<sup>[10]</sup>。

根据该定义, 可以求得相关维度(图4)。分形维度是分数值, 是系统具有分形结构的必要条件。通过线性拟合求最优斜率, 计算得到吸引子的分形维度为  $4.2 \pm 0.6$ 。

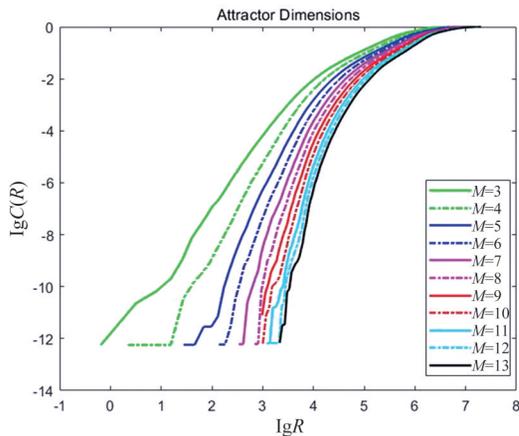


图4 计算得到的分形维度随相空间维度增高的变化曲线  
Fig. 4 Variation curves of the fractal dimensions with the increase of phase-space dimensions

## 1.4 Lyapunov 指数

### 1.4.1 计算 Lyapunov 谱 ( $\lambda_i$ ) 的方法

时空域观测系统建立后, 根据 Devaney 混沌定义及混沌的拓扑传递性, 度量空间  $Y$  的混沌映射是自映射, 即映射  $p: Y \rightarrow Y$ 。则对于  $\forall C(\vec{r}, t) \in Y$ ,  $C$  为相空间的状态度量。红外辐射波场的非线性动力学过程在数学上可表达为:  $C(\vec{r}_{n+1}) = p(C(\vec{r}_n))$ , 这是一个离散迭代方程。该动力学过程关于时间的连续表达为:

$$\frac{dC(\vec{r}, t)}{dt} = p(C(\vec{r}, t)) \text{ 或 } \frac{dC(r_i, t)}{dt} = p_i(C(r_j, t)), \quad (9)$$

$r_i$  与  $r_j$  为相空间各自独立的矢量点,  $i, j = 1, 2, \dots, M$ ,  $M$  为相空间维度。方程(9)的 Jacobian (雅可比) 矩阵为:

$$A_{ij} = \frac{\partial p_i(r_j, t)}{\partial r_j}, \quad (10)$$

或写为:  $A = \nabla \cdot \vec{p}$ 。因为混沌映射是自映射, 故该动力系统的 Jacobian 矩阵是  $M \times M$  维方阵, 此时 Jacobian 矩阵也称为 Jacobian 行列式, 矩阵的特征值称为 Lyapunov 指数谱,  $M$  维雅可比矩阵对应  $M$  个 Ly-

apunov 指数。方程(4)的 Jacobian 矩阵是可求解的, 求解顺序是按照特征值  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, M$  的大小, 由大到小逐次求解。

### 1.4.2 最大 Lyapunov 指数

对于一个复杂系统, 如果它是混沌的, 则至少有一个 Lyapunov 指数为正。正的 Lyapunov 指数意味着映射对“初始条件敏感依赖”。数学上定义混沌的“初始条件敏感依赖”为<sup>[5, 6]</sup>: 设映射  $f: X \rightarrow X$ , 称  $f$  是对初始条件敏感依赖的, 如果  $\exists \varepsilon > 0$ , 对于  $\forall x, y \in X$ , 且  $x \neq y$ , 满足对于任意的  $\delta > 0$ , 使得度量空间  $X$  中的度量函数  $d(x, y) < \delta$ , 且存在自然数  $n$ , 使得  $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ 。该定义的物理意义为任意两个无限接近的初始条件  $x, y$ , 他们的初始状态差异定义为  $d(x, y) < \delta$ , 经过  $n$  个时间长度的演化  $f^n$ , 其最终的状态差异  $d(f^n(x), f^n(y))$  可以无限大。最大 Lyapunov 指数  $\lambda_1$  可表示为:

$$\lambda_1 \propto \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{d(f^n(x), f^n(y))}{d(x, y)} \right). \quad (11)$$

在式(11)中, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{d(f^n(x), f^n(y))}{d(x, y)}$  可

以定义为函数  $f^n(x)$  在  $x$  处的一阶导数。因此, 在实际计算 Lyapunov 指数时, 问题便简化为求窗口大小数据拟合的直线的斜率。

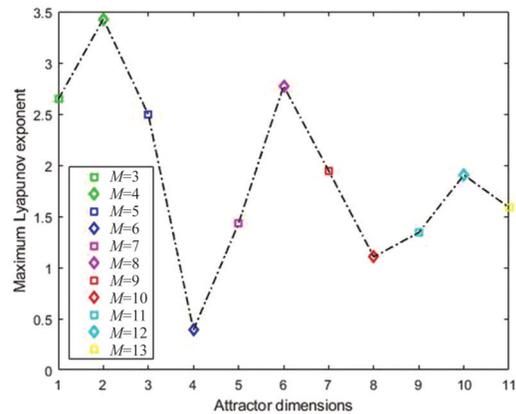


图5 最大 Lyapunov 指数随相空间维度的变化曲线  
Fig. 5 The change of maximum Lyapunov exponents with the increase of phase-space dimensions

## 1.5 排列熵 (Permutation Entropy, PE) 与 0-1 混沌测试

### 1.5.1 排列熵

观测时间序列的复杂性测量是研究复杂动态系统特性的重要途径。如何定义系统的复杂性是

非常复杂且有挑战性的工作。该问题可有多种可能的答案<sup>[12-14]</sup>,其中一种解决方法是测量输出时间序列的非规则性。如果复杂系统有不规则和不同的状态,则对这些状态进行编码需要大量信息,我们称之为系统具有高度静态(结构)复杂性。Lyapunov指数、分形维度与熵等物理量统称为静态复杂性测量参数,用以衡量状态的多样性,而不是状态的动态变化。排列熵(PE)是信息论中的一种复杂性测度,也被用以检测时间序列中状态的动态变化<sup>[15]</sup>,具有计算简单、速度快、鲁棒性强等优点。具体算法为:

时间序列  $x(t_i) = \{x_i\}_{i=1}^N$  在给定嵌入维度为  $m$ 、时间延迟为  $\tau$  时构建的相空间嵌入矢量可表示为:

$$X(j) = \{x_j, x_{j+\tau}, \dots, x_{j+(m-1)\tau}\}, \quad (12)$$

其中,  $j = 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau$ 。将  $N - (m-1)\tau$  个子嵌入矢量按升序排列:

$$x(j + (k_1 - 1)\tau) \leq x(j + (k_2 - 1)\tau) \leq \dots \leq x(j + (k_m - 1)\tau) \quad (13)$$

如果  $x(j + (k_{l1} - 1)\tau) = x(j + (k_{l2} - 1)\tau)$ , 则按照其时间序列先后排列。即若  $k_{l1} < k_{l2}$ , 则  $x(j + (k_{l1} - 1)\tau) \leq x(j + (k_{l2} - 1)\tau)$ 。嵌入矢量子集的排列组合可记作:

$$\pi_l(j) = (k_1, k_2, \dots, k_m) \quad (14)$$

其中,  $1 \leq l \leq m!$ 。按照顺序计算概率分布  $p_l$ , 则归一化的排列熵最终定义为:

$$H_{PE}(m, \tau) = \frac{[-\sum_{l=1}^{m!} p_l \ln(p_l)]}{\ln(m!)} \quad (15)$$

公式中  $h \leq m!$ ,  $\ln(m!)$  是排列熵  $H_{PE}$  的最大值。排列熵是进行复杂性分析的强大工具。但该方法存在一些固有局限性,包括信号的振幅差异被忽视、信号中的相等值没有得到恰当处理等。比如,矢量  $[1.01, 1.2, 3]$ 、 $[1, 2.7, 3]$ 、 $[1, 1.2, 1.3]$  和  $[2.6, 2.8, 3]$  被映射成同一个排列值(012)。矢量  $[1, 1, 1]$  和  $[2, 2, 2]$  同样被映射成(012)。这导致时间序列中某些排列组合的概率分布被高估,这种情况被称为有偏排列熵估计<sup>[13]</sup>(a biased PE evaluation)。针对有偏排列熵估计,一个较为简单的处理方式校正过采样(correct oversampling),具体见文献[3]。本文采用文献[3]的方式减少有偏排列熵估计与噪声限制。

### 1.5.2 0-1测试

由于动态噪声等因素存在,真实复杂系统不具备严格数学定义下的完全混沌性。即,将有噪声的

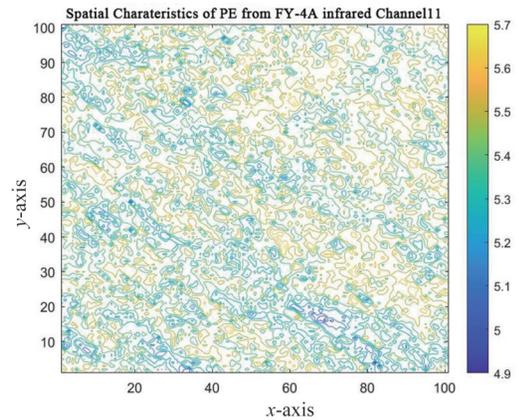


图6 FY-4A一级数据水汽与CO<sub>2</sub>波段的排列熵空间分布特征  
Fig. 6 Spatial Characteristics of permutation entropy of the first prime water vapor and carbon dioxide in Satellite FY-4A

混沌时间序列与周期序列分离开来不是一项简单的任务。传统区分方式是利用一种切空间的方法,比如1.4.2节使用最大Lyapunov指数的符号来分类系统行为。该方法从理论上是可靠的<sup>[16, 17]</sup>,但对于未知模型系统或处理高维数据时,求解复杂且在有噪声时表现不佳。0-1测试可用于识别具有已知或未知模型(即实际数据)的时间序列中的混沌。与切空间方法不同,0-1测试不需要进行相空间重构,故该方法对状态变量无法全部观测到的数据流(工程与自然系统常见的例子)较为有利。具体算法为<sup>[18]</sup>:确定一个动力系统某些可观测量特性为  $x(j)$ , 并利用其构建了  $(p, q)$  平面数组, 根据公式:

$$p(n) = \sum_{j=1}^n x(j) \cos jc, \text{ 与 } q(n) = \sum_{j=1}^n x(j) \sin jc, \quad (16)$$

其中,  $c$  是从  $(0, \pi)$  的均匀分布中抽取的随机数,  $n = (0, 1, \dots, N)$ 。使用长度为  $N$  的单个数据集, 所选  $c$  值的个数在  $(p, q)$  平面上产生了  $N_c$  个数据集。则  $(p, q)$  数据被用来计算均方位移:

$$M_c(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N [p_c(j+n) - p_c(j)]^2 + [q_c(j+n) - q_c(j)]^2 \quad (17)$$

注意方程(16)中  $n = (1, 2, \dots, n_{cut})$ , 其中,  $n_{cut} = N/10$ 。混沌检测是基于以  $n$  为自变量的函数  $M_c(n)$  的渐近增量, 该增量函数是周期性动力系统时间的有界函数, 随着混沌系统时间的增长而增长<sup>[19]</sup>。文献[19]指出修正的均方位移  $D_c(n)$  具有更好的收敛特性。为构造  $D_c(n)$ , 引入一个震荡项:

$$V_{osc}(c, n) = (E\phi)^2 \frac{1 - \cos(nc)}{1 - \cos(c)} \quad (18)$$

将  $V_{osc}$  项从均方位移中减掉,即得修正均方位移:

$$D_c(n) = M_c(n) - V_{osc} \quad (19)$$

现在可使用相关或回归方法进行测试,分别使用协方差和方差的标准定义:

$$\text{cov}(x,y) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q (x(j) - \bar{x})(y(j) - \bar{y}),$$

$$\text{与 } \text{var}(x) = \text{cov}(x,x) \quad (20)$$

则相关参数  $K_c$  值可用相关函数计算:

$$K_c = \text{corr}(\xi, \Delta) = \frac{\text{cov}(\xi, \Delta)}{\sqrt{\text{var}(\xi) \text{var}(\Delta)}} \in [-1, 1], \quad (21)$$

其中  $\xi = (1, 2, \dots, n_{cut}), \Delta = (D_c(1), D_c(2), \dots, D_c(n_{cut}))$ 。则时间序列的 0-1 诊断的相关  $K$  值定义为  $K_c$  的中值,中值接近于 0 表示周期时间序列,中值接近 1 表示混沌时间序列。

或者,0-1 回归测试的相关参数可定义为:

$$K_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tilde{D}_c(n)}{\log n}, \tilde{D}_c(n) = D_c(n) - \min_{n=1, \dots, n_{cut}} D_c(n) \quad (22)$$

在文献[20]中,  $K_c$  是通过  $M_c(n)$  而不是  $D_c(n)$  计算得到的,由其得到的修正的 0-1 回归测试为:

$$K_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_c(n)}{\log n} \quad (23)$$

对于有限数据,  $K_c$  值是通过拟合函数  $\log M_c(n)$  对  $\log(n)$  的曲线斜率,使其绝对值误差最小而计算得到。由于修正 0-1 回归算法相对标准回归算法对噪音有更好的容忍度,本文选用了修正 0-1 回归算法。

## 2 结果与讨论

为探索大气介质红外电磁辐射场的混沌特性,我们进行了一些数据测试。我们判断一个系统是否是混沌的,有两个判断准则:

一、切空间准则:包括(1)是否具有分形特征,即分形维度是否是分数的;(2)最大 Lyapunov 指数是否为正。为求得分形维度和最大 Lyapunov 指数,我们以 FY-4A 一级数据的水汽与二氧化碳波段为例,抽取了空间坐标为( $x=101$  个采样点,  $y=101$  个采样点,  $z$ =接收高度)处的时间序列,见图 1,总记录时长为 997 个小时,时间采样间隔为 4 分钟。根据分形的特点,局部即整体,即局部结构反映了整体的结构特点,故只需要提取一空间点处的时间序列进行研究,即可得到全局的结构特征。对图 2 时间序列的傅里叶谱,计算得到的分数维布朗运动的维度  $D_b = 3.2 \pm 0.1$ 。分数维布朗运动的维度  $D_b$ ,可确

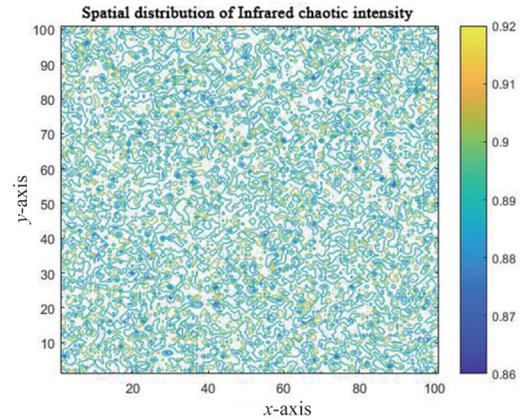


图 7 FY-4A 一级数据水汽与  $\text{CO}_2$  波段的混沌强度参数  $K_c$  空间分布特征,由于实际数据含噪声,计算得到的  $K_c$  值范围在 (0.86~0.92) 之间

Fig. 7 The spatial distribution of chaotic intensity  $K_c$  of the first prime water vapor and carbon dioxide in Satellite FY-4A, due to the influence of actual data noise, the calculated  $K_c$  ranges in (0.86-0.92)

定一个分形结构。它大致反映了时间序列在时间维度上的不规则程度。对时间序列进行相空间重构,计算得到吸引子维度即分形维度随相空间维度变化曲线,如图 4 所示。分形维度曲线随着相空间维度的增高,渐近于一条稳定的曲线(相空间维度  $M=13$ ),说明分形维度随着相空间维度的增高而逐渐趋向于固定值。分形维度等于 13 维相空间分形曲线的最佳拟合直线的斜率,在这个例子中,该值约等于 4.2。最大 Lyapunov 指数在不同维度的相空间中始终为正。由这些结果,我们初步判断红外电磁辐射场具有混沌效应。这些数值结果奠定了红外电磁辐射场混沌特性的研究基础,也初步证明了我们所研究的红外电磁系统是一个复杂的非线性动态系统。

二、排列熵与混沌强度参数  $K_c$ : 排列熵分布特征刻画的是时间序列的状态动态变化。在时间序列检测过程中,排列熵主要用于区分时间序列是否随机。检测算法称为替换算法(surrogate algorithm)。替换算法有傅里叶法、振幅自适应傅里叶法、迭代振幅自适应算法、循环相排列等<sup>[21]</sup>。即计算数据的排列熵,和 1000 个由替换算法计算的随机数据的排列熵相比较,如果排列熵位于随机排列熵之内,则该时间序列为随机序列,否则为混沌序列或周期序列。而混沌序列与周期性序列的区分,主要依赖 0-1 测试中的混沌强度相关参数  $K_c$ 。

$K_c \rightarrow 1$ , 则序列为混沌的;  $K_c \rightarrow 0$ , 则为周期性的。由图6得到的空间每一点处时间序列排列熵的数值分布, 不在随机排列熵值以内, 且  $K_c \in (0.86, 0.92) \rightarrow 1$ , 判断大气介质红外辐射场水汽与  $\text{CO}_2$  波段具有混沌性。同理, 计算得到的大气介质红外全波段数据具有普遍混沌性。

### 3 结语

大气介质红外辐射场具有混沌性是我们判断大气复杂系统非线性与动态特性的重要指标, 是进行系统非线性与动力学信息预测及重构的理论基础, 也是开展红外电磁波正演、成像与反演的前期必要条件, 具有重要的科学意义和应用价值。

本文通过两种判别方式判定大气介质红外辐射场具有混沌性。一是切空间准则, 利用分形维度为分数, 最大 Lyapunov 指数为止判别红外辐射场具有混沌效应。由于最大 Lyapunov 指数的计算精度受测量噪声与数据维度影响, 我们同时采用了排列熵与混沌强度相关参数的判定方法。两种判定准则的结果显示大气介质红外全波段数据具有普遍混沌性, 即证明红外辐射场的动力学行为是有限自由度控制的动态非线性不规则行为。

本文工作是后续研究的理论先决条件, 为后续待解决的物理问题奠定了基础。这些物理问题包括但不限于: 1) 如何利用混沌特性来研究动目标及背景杂波动态演化机理、捕捉时敏微扰信号以及对水陆空红外辐射场进行中长期非线性预测; 2) 如何建立时变大气系统内红外辐射场的非保守耗散方程, 如何利用混沌特性来刻画传输介质特征以及宏观传播机理等。

### References

- [1] C. WANG, J. CHEN, S. WANG. Fractal and Chaotic Features for Varying Component of the Earth's Magnetic Field [J]. *Chinese Journal of Geophysics* (王亦, 陈金波, 王水. 地球变化磁场的分形与混沌特征[J]. *地球物理学报*), 1995, **38**(1): 16-24.
- [2] J. Hochstetter, R. Zhu, A. Loeffler, et al. Avalanches and edge-of-chaos learning in neuromorphic nanowire networks [J]. *Nature Communications*, 2021, **12**: 1-13.
- [3] D. Toker, F.T. Sommer, M. D'Esposito. A simple method for detecting chaos in nature[J]. *Nature Communications biology*, 2020, 1-13.
- [4] X. LI. Chaos Theory and its Applications of Atmospheric Boundary Layer Turbulence Research [J]. *Advance in Earth Sciences* (李昕. 混沌理论与大气边界层湍流研究[J]. *地球科学进展*), 2000, **15**(2): 178-183.
- [5] Y. Li, A. Wu. Analysis of Chaos Characteristics of Atmospheric Electric Field based on Wavelet Decomposition and Phase Space Reconstruction [J]. *Value Engineering* (李艳, 吴安坤. 基于小波分解和相空间重构的大气电场混沌特征浅析[J]. *价值工程*), 2016, 161-163.
- [6] J. Wu, S. Huang, Y. Huang, et al. Mesoscopic chaos mediated by Drude electronhole plasma in silicon optomechanical oscillators [J]. *Nature Communications*, 2017, **8**: 1-7.
- [7] P. Gaspard, M. E. Briggs, M. K. Francis, et al. Microscopic chaos from brownian motion? [J]. *Nature*, 1999, **401**: 876.
- [8] M. Abmann, J. Thewes, D. Fröhlich, et al. Quantum chaos and breaking of all anti-unitary symmetries in Rydberg excitons [J]. *Nature Materials*, 2016, **15**: 741-745.
- [9] K. Zhao, Z. Zhu, J. Huang. Introduction to Nonlinear Physics [M]. Center for Nonlinear Science, Peking University (赵凯华, 朱照宣, 黄珣. *非线性物理导论*) [M]. 北京大学非线性科学中心, 1992, 108-111.
- [10] S. Haykin, S. Puthusserypady. Chaotic dynamics of sea clutter [M]. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, INC, 1999.
- [11] Degirmenci, N. Koçak, Ş. Chaos in product maps [J]. *Turk. J. Math.*, 2011, **34**, 593-600.
- [12] D. Ke. Unifying complexity and information [J]. *Science Report*, 2013, **3**(4): 1585.
- [13] X. Zhao, M. Ji, N. Zhang, et al. Permutation transition entropy: Measuring the dynamical complexity of financial time series [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, **139**: 10992.
- [14] J. Richman, Jr. Moorman. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy [J]. *Am J. Physiol Heart Circ Physiol*, 2000, **278**(6): 40005.
- [15] C. Bandt, B. Pompe. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series [J]. *Phys Rev Lett*, 2002, **88**(17): 174102.
- [16] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: A method for computing all of them. part2: Numerical application [J]. *Meccanica*, 1980, **15**: 21 - 30.
- [17] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, et al. Determining lyapunov exponents from a time series [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, **16**: 285 - 317.
- [18] J.R. Tempelman, F.A. Khasawneh. A look into Chaos Detection through Topological Data Analysis [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2020, **406**: 132226.
- [19] G. A. Gottwald, I. Melbourne. On the implementation of the 0 - 1 test for chaos [J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2009, **8**: 129 - 145.
- [20] G. A. Gottwald, I. Melbourne. Testing for chaos in deterministic systems with noise [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2005, **212**: 100-110.
- [21] G. Lancaster, D. Iatsenko, A. Pidde, V. Ticcinelli, and A. Stefanovska. Surrogate data for hypothesis testing of physical system [J]. *Physics Reports*, 2018, **748**: 1-60.
- [22] Fraser A M, Swinney H L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information [J]. *Physical review A*, 1986, **33**(2): 1134-1140.