

文章编号:1001-9014(2007)03-0237-04

一种改进型各向异性扩散滤波器

高翔¹, 秦琴², 王汝笠¹

(1. 中国科学院上海技术物理研究所, 上海 20083;

2. 上海第二工业大学电子与电气工程学院, 上海 201209)

摘要:通过分析 Perona 和 Malik (PM) 扩散滤波器扩散率函数的统计学意义, 提出一种关于扩散率函数的统计学解释模型, 即扩散率函数定义了一个以边界估计算子为随机变量的概率密度函数, 解决了扩散率函数设计和选择没有统一理论的问题. 依据这一解释模型, 设计出一种改进型的各向异性扩散滤波器. 实验结果显示, 改进型扩散滤波器只需要相对于 PM 方法较少的迭代次数, 就能得到预期的图像去噪效果, 证明统计学解释模型为各向异性扩散滤波器提供了一种有效的设计方法.

关键词: 图像去噪; 各向异性扩散; 统计学解释模型

中图分类号: TP991.73 **文献标识码:** A

NOVEL ANISOTROPIC DIFFUSION FILTER

GAO Xiang¹, QIN Qin², WANG Ru-Li¹

(1. Shanghai Institute of Technical Physics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200083, China;

2. Shanghai Second Polytechnic University, School of Electronics & Electrical Engineering, Shanghai 201209, China)

Abstract: The statistic meaning of the diffusivity function of Perona-Malik diffusion filter was analyzed. A statistic interpretation model was proposed that the diffusivity function defines a probability density function (PDF) for the edge estimator as a random variable. This model overcomes the difficulty of no unified theory of designing and selecting the diffusivity functions. A novel anisotropic diffusion filter based on this model was designed. Experiments demonstrate that the novel filter promises the same efficiency in images denoising as PM method, and with less recursion times. So our interpretation model of the diffusivity function provides an effectively method to custom anisotropic diffusion filter for special application.

Key words: images denoising; anisotropic diffusion; statistic interpretation model

引言

由 Perona 和 Malik 于 1990 年提出的经典的各向异性扩散滤波器在图像去噪与增强领域有非常重要的应用^[1, 2], 是偏微分方程图像处理方法研究的一个重要内容, 也是一个基本的研究对象. 在 Perona 和 Malik 的框架下, 许多研究者都提出了不同的改进或变形^[3-9], 我们把它们统称为 PM 扩散滤波器. 按扩散率或对比度^[5]函数的不同定义, PM 扩散滤波器可以分为两类: 一是基于图像局部梯度的方法^[1, 3, 5, 8]; 二是基于图像局部几何特性如曲率等的方法^[9].

扩散方程中的扩散率函数的设计和选择对具体实现的效果有重要的影响^[3]. 然而 Perona 和 Malik 并没有就如何设计和选择扩散率函数提供统一的理

论基础, 目前的方法一般是根据经验直接选择^[1, 2, 5, 8], 或通过将扩散方程与其他理论模型相结合来获得^[3, 4, 9]. 通过本文的分析, 我们可以看到, 这些方法一方面限制于不多的选择范围而并不能达到最优的处理效果; 另一方面难于进行统一的分析和比较.

为解决这些问题, 我们从研究扩散率函数自变量在图像处理过程中的统计学意义出发, 提出了一种新的解释模型. 这种模型为扩散率函数的设计和选择提供了合适的理论基础, 为设计全新的扩散率函数提供了一种方法, 使得我们可以依照具体应用进行设计而不是选择最优的 PM 扩散滤波器. 在此框架下, 我们对各种改进型的 PM 扩散滤波器做出了统一的分析, 并设计出一种改进的基于方向导数统计量的 PM 扩散滤波器, 这种扩散滤波器计算简

收稿日期: 2006-10-28, 修回日期: 2007-03-08

Received date: 2006-10-28, revised date: 2007-03-08

作者简介: 高翔(1977-), 男, 江西瑞昌人, 中国科学院上海技术物理研究所博士生, 主要从事图像处理、机器视觉及嵌入式系统的研究.

单,容易实现,图像处理的效果令人满意.

1 PM 扩散滤波器

令图像定义在开的方形区域 $\Omega, \Gamma := \partial\Omega$ 是它的边界,原始图像 $f(x, y)$ 是一有界函数 $f: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$. 按照图像的多尺度理论,滤波后的图像 $u(x, y, t)$ 是原始图像 $f(x, y)$ 在尺度 $t \geq 0$ 上的表示. PM 扩散滤波器定义为:

$$\partial_t u = \text{div}(\mathbf{D}(\nabla u) \nabla u) \text{ on } \Omega \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \text{ on } \Omega \quad (2)$$

$$\langle \mathbf{D}(\nabla u) \nabla u, \mathbf{n} \rangle = 0 \text{ on } \Gamma \times (0, \infty) \quad (3)$$

其中 \mathbf{n} 表示外法方向, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为向量内积, 对称正定矩阵 $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ 就是扩散率函数张量. 在 Perona 和 Malik 首先提出的扩散滤波器中扩散张量为

$$\mathbf{D}(\nabla u) = g(|\nabla u|) \mathbf{I} \quad (4)$$

尽管这种滤波器存在病态^[8]以及对边界上的噪声无法有效抑制^[7]等缺点,但是由于其原理简单,易于实现,对工程上的应用能满足基本要求,因此以下我们仍然以 $g(s)\mathbf{I}$ 结构的扩散张量为研究对象.

2 扩散率函数的统计学解释

Perona 和 Malik 认为函数 $g(s)$ 的自变量应该是对图像边界强度的最佳估计 $\mathbf{E}(x, y, t)$ ^[1], 它是一个定义在图像上的矢量函数, 理想情况下满足属性:

1) 在每个光滑区域内部 $\mathbf{E}(x, y, t) = 0$;

2) 在每个边界点上 $\mathbf{E}(x, y, t) = K\mathbf{e}(x, y, t)$, 这里 \mathbf{e} 表示边界点上的单位法矢, K 表示局部对比度(图像边界两边像素灰度对比).

显然这样的估计函数在具有边缘检测的作用同时还具有统计学上的意义. 我们对其进行如下的归一化处理

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\|\mathbf{E}\|}{K}\right)^2} \quad (5)$$

上式表示估计值的幅值越小, 像素就越可能是边界点. 这是一个单边 Cauchy 分布的概率密度函数(相差一个常数), 相应的随机变量是边界估计 \mathbf{E} 的模; 式(5)也可以认为是归一化的随机变量 $1/(1 + (\|\mathbf{E}\|/K)^2)$ 在 $[0, 1]$ 上的 Beta 分布(相差一个常数倍数)的概率密度函数. 再考虑扩散率函数的图像处理过程中的作用, 它应该是一个随自变量(即边界估计)非负单调递减的函数, 且 $g(0) = 1$ ^[1]. 归一化处理的结果(5)满足这些要求, 可以作为滤波器

的扩散率函数. 于是, 我们有结论: 扩散率函数在滤波处理中的在统计学上的意义是定义在图像上的某一统计量的概率密度函数, 这一类概率密度函数满足非负单调递减以及 $g(0) = 1$ 的特性, 它反映了像素点不是边界点的可能性, 概率越大扩散越强, 概率越小扩散越弱. Perona 和 Malik 使用的另外一个扩散率函数

$$g(\|\mathbf{E}\|) = e^{-(\|\mathbf{E}\|/K)^2} \quad (6)$$

也属于这一类概率密度函数(它是一个正态分布的概率密度函数).

我们比较不同的 PM 扩散滤波器的统计学解释模型

• Catté *et al.* 滤波器^[8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla u_\sigma|^2) \nabla u) \quad (7)$$

Catté *et al.* 滤波器以高斯光滑后图像的梯度模平方 $|\nabla u_\sigma|^2$ 为边界估计函数, 并以此为随机变量, Catté *et al.* 滤波器取(5)作为概率密度函数.

• El-Fallah 和 Ford 滤波器^[9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \nabla u\right) \quad (8)$$

这个方程的右边为平均曲率的 2 倍. 在统计学解释模型下, El-Fallah 和 Ford 滤波器的扩散率函数是 $[0, 1]$ 上 Beta 分布的概率密度函数, 并将边界估计 $|\nabla u|$ 以下式归一化后作为随机变量.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \quad (9)$$

• 鲁棒滤波器^[3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla u|^2, \sigma) \nabla u) \quad (10)$$

其中

$$g(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - (x/\sigma)^2]^2 & |x| \leq \sigma \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

称为 Tukey 双权函数. 它对应的是在 $[-\sigma, \sigma]$ 上以 Tukey 双权函数为 PDF 的分布; 或者将 Tukey 双权函数作为对随机变量 x 的归一化, 则是 $[0, 1]$ 上 Beta 分布的概率密度函数.

通过以上分析我们提出: 对作为边界估计而适当选取的随机变量, 当它满足 Perona 和 Malik 提出的边界估计函数的性质时

1) 可以对该随机变量进行归一化, 归一化后的随机变量可以直接作为 PM 扩散滤波器的扩散率函数, 即在此归一化的随机变量意义下, 以 $[0, 1]$ 区间

上的 Beta 分布概率密度函数作为扩散率函数;

2) 或直接使用某一满足边界估计函数性质的概率密度函数作为扩散率函数.

统计学解释模型也可以用来对对扩散滤波在图像处理过程中的行为^[4]做进一步的研究.

3 基于梯度统计量的 PM 扩散滤波器

上面我们已经看到了各种不同的随机变量定义,产生出不同的图像处理效果和不同的数字实现性能及适用性.由此,根据统计学解释模型我们设计出一种新的改进的 PM 扩散滤波器.通常的边缘检测算子如 Roberts 算子、Sobel 算子、LoG 算子等都是一类估计函数,它们都具有类似的统计意义,受 Perona 和 Malik 直接使用图像的局部梯度模值作为边缘估计函数启发,我们考虑两个最简单的水平和垂直边缘检测一阶微分算子 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$,它们是图像在 x 和 y 方向的方向导数.这些边缘检测算子的模值具有与局部梯度模值一样的统计特性:局部边界上的模值较大.于是,构造如下的估计函数:

$$\|\mathbf{E}(x, y, t)\| = |\partial u/\partial x| + |\partial u/\partial y|, \quad (12)$$

及扩散率函数

$$g(\|\mathbf{E}\|) = 1 + \cos(\pi \times \|\mathbf{E}\| / (\Omega + \|\mathbf{E}\|)), \quad (13)$$

其中量 Ω 为扩散率变化的阈值,当边界估计值小于 Ω 时扩散率较大且变化快,当边界估计值大于 Ω 时扩散率很小,逐渐趋向于零.改进的 PM 扩散滤波器为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\left(1 + \cos\frac{\pi \times \|\mathbf{E}\|}{\Omega + \|\mathbf{E}\|}\right) \nabla u\right), \quad (14)$$

式中常数 Ω 的作用与式(5)或式(6)中的量 K 的作用类似. Ω 的取值与图像的噪声强度有关,可以采用与 Perona 和 Malik 同样的方法,即以 Canny 提出的“噪声估计子”来计算 Ω 的值^[1].另外,在局部对比度较强的区域可以选择大 Ω 值,在局部对比度较弱的区域可以选择小 Ω 值,为简化计算,图像的局部对比度变化不大的图像一般置 Ω 为常数.

4 数值实现与实验结果

计算式(14)的显式迭代式为

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t(\text{div}(g(\|\mathbf{E}\|) \nabla u)), \quad (15)$$

其中 Δt 为时间步长.可以通过组合使用前向和后向差分机制的方法获得离散化方程^[1].

为评价算法在处理有噪图像时保边去噪的效果和性能,我们选择了两幅不同的测试图像:第一幅图像是一幅合成图像,如图 1;第二幅图像为 Camera-

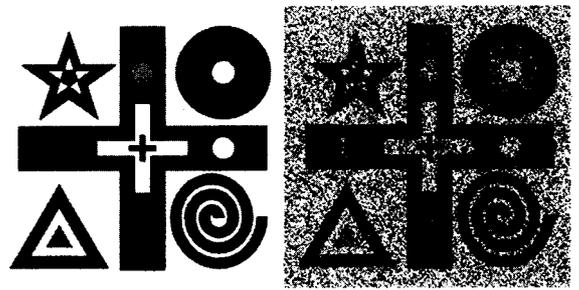


图 1 (a)原始合成图像.(b)加入方差为原图像最高幅度的 40% 的高斯白噪声后

Fig. 1 (a)Original synthesized image. (b)The corrupted image with additive Gaussian noise of the variance being 40% maximum intensity of original image

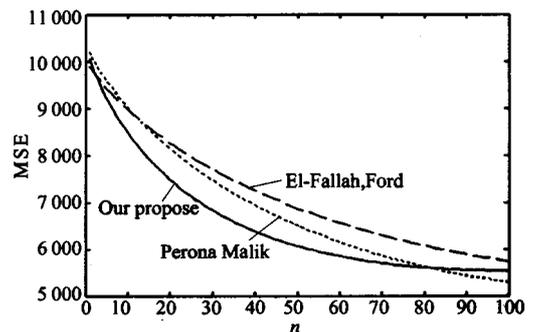


图 2 100 次迭代的 MSE 变化曲线,其中 Perona 和 Malik 方法中常数 $K=20$,在我们的方法中常数 $\Omega=15$

Fig. 2 The MSEs in 100 recursions of different diffusion filters, with the constant $K=20$ in the Perona-Malik filter and $\Omega=15$ in our proposed filter

man,如图 3,以去噪后图像与原始图像的平均平方误差(MSE)为评价准则.

$$MSE = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (u_0(i, j) - u_d(i, j))^2. \quad (17)$$

需要说明的是,不同算法的实际效果与具体的迭代次数有关系,直接使用以上的 MSE 评价准则存在一定的困难,因此,我们通过对不同的算法在经过 100 次迭代计算以后得到的结果图像作比较,来达到分析不同算法之间差异的目的.

我们比较了 3 种扩散滤波器的结果,分别是: Perona 和 Malik 滤波器、El-Fallah 和 Ford 滤波器以及本文提出的滤波器,其中 Perona 和 Malik 方法使用式(5)作为扩散率函数式.图 2 的 MSE 变化曲线表明,在 MSE 小于 6000 的范围内,我们提出的方法收敛速度较快.因此,对于一般的应用要求达到的图像恢复质量而言,我们的方法需要较少的迭代次数及计算量.同时,需要指出的是,当迭代次数大于 100 时,3 种扩散滤波器的 MSE 值由于图像光滑的

作用会逐渐上升,它们的最小值都大于 5000,因此再多的迭代次数已失去实用意义.对于 Cameraman 图像我们试验了取相同边界估计(12)时,各滤波算法所能达到的最小 MSE 值.可以得出,在 MSE 意义下,我们提出的方法能够获得介于 Perona 和 Malik 方法与 El-Fallah 和 Ford 方法之间的滤波效果,证明了此方法在实际应用时是正确有效的.

表 1 Cameraman 图像在不同类型和强度噪声下滤波后的 MSE

Table 1 MSE of the filtered Cameraman image corrupted by different type and intensity noises

	方差 2% 的高斯白噪声	方差 5% 的高斯白噪声	方差 10% 的高斯白噪声	密度为 0.1 的椒盐噪声	密度为 0.2 的椒盐噪声
PM 方法	320.0751	647.7313	1116.4	831.2769	1635.3
EF 方法	303.8260	632.0356	1280.8	708.7544	1609.2
本文方法	318.6025	638.7849	1136.5	813.9475	1615.4

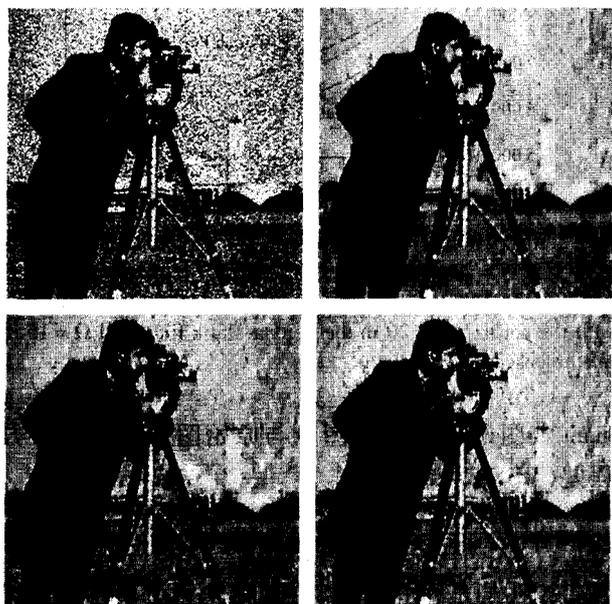


图 3 (a)左上: Cameraman 噪声图像,加入方差为原图像最高幅值的 2% 的高斯白噪声. (b)右上: Perona 和 Malik 滤波的结果最小 MSE 为 320.0751. (c)左下: El-Fallah 和 Ford 滤波的结果,最小 MSE 为 303.8260. (d)右下: 我们方法滤波的结果,最小 MSE 为 318.6025

Fig. 3 (a) TOP LEFT: Cameraman image corrupted by additive Gaussian noise of the variance being 2% maximum intensity of original image. (b) TOP RIGHT: The minimum MSE of Perona-Malik filter is 320.0751. (c) BOTTOM LEFT: The minimum MSE of El-Fallah and Ford filter is 303.8260. (d) BOTTOM RIGHT: The minimum MSE of our proposed filter is 318.6025

5 结论

本文给出的统计解释模型解决了设计 PM 扩散滤波器过程中,扩散率函数的设计和选择没有统一理论基础的问题.从实验结果来看,在统计解释模型的框架下可以根据应用设计出合适有效的 PM 扩散滤波器.因此统计解释模型对于扩展 PM 扩散滤波器的应用起到了积极的作用.需要指出的是,PM 扩散滤波器设计的关键是边界估计算子即随机变量的选择以及扩散率函数的设计.边界估计算子需要满足 Perona 和 Malik 最佳估计的条件,经典的线性边缘检测算子以及基于图像局部几何特征的边缘检测算子都是合适的.扩散率函数的设计可以应用拟合统计分布的技术实现.

REFERENCES

- [1] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. *IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(7): 629—639.
- [2] XIE Mei-Hua, WANG Zheng-Ming. SAR Image enhancement based on regularization variation model[J]. *J. Infrared Millim. Waves* (谢美华, 王正明. 基于正则化变分模型的 SAR 图像增强方法. *红外与毫米波学报*), 2005, 24(6): 467—471.
- [3] Black M, Sapiro G, Marimont D, et al. Robust anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Image Proc.*, 1998, 7(3): 421—432.
- [4] You Y L, Xu W, Tannenbaum A, et al. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing. *IEEE Trans. Image Process.*, 1996, 5(11): 1539—1553.
- [5] Alvarez L, Lions P L, Morel J M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1992, 29(3): 845—866.
- [6] Weickert J. Multiscale texture enhancement[C]. *Proc 6th Int Conf on Computer Analysis of Images and Patterns (Prague Czech)*, *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer Verlag, 1995, 970: 230 ~ 237.
- [7] Weickert J. Theoretical foundations of anisotropic diffusion in image processing[C]. *Theoretical foundations of computer vision, Computing Suppl. Wien: Springer*, 1996, 11: 221—236.
- [8] Catté F, Lions P L, Morel J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, 29(1): 182—193.
- [9] El-Fallah A I, Ford G E. Mean curvature evolution and surface area scaling in image filtering[J]. *IEEE Trans. Image Proc*, 1997, 6(5): 750—753.