

文章编号:1001-9014(2007)03-0205-04

# 基于 QR 分解的广义判别分析用于雷达目标识别

刘华林, 杨万麟

(电子科技大学 电子工程学院, 四川 成都 610054)

**摘要:**提出了一种基于 QR 分解的广义判别分析算法,并将其用于雷达目标一维距离像识别.与传统用奇异值分解获取目标特征子空间的方式不同,新算法运用核修正格兰-施密特正交化过程直接提取最优投影变换矩阵,不仅有效地保留了类内散度矩阵最具判别力的零空间信息,同时使所求解在数值上更稳定.对 3 种实测飞机数据的分类结果表明,所提方法不仅在识别性能上优于传统方法,而且在一定程度上降低了算法的计算复杂度,提高了系统的实时性能.

**关键词:**雷达目标识别;广义判别分析;核修正格兰-施密特正交化;特征提取;一维距离像

**中图分类号:**TN957.54 **文献标识码:**A

## RADAR TARGET RECOGNITION BASED ON GENERALIZED DISCRIMINANT ANALYSIS OF QR DECOMPOSITION

LIU Hua-Lin, YANG Wan-Lin

(College of Electronic and Engineering, UEST of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract:** A new generalized discriminant analysis (GDA) method based on QR decomposition was proposed, which would be used in radar target recognition with one-dimensional range profile. Different from the traditional approach of solving GDA by singular value decomposition (SVD), the new algorithm utilizes kernel modified Gram-Schmidt (KMGS) orthogonalization algorithm to extract the optimal transformation matrix directly, which can not only effectively hold the most discriminant information in the null space of within-class scatter matrix, but also make the solution more stable in numeric. Experiments on three measured airplanes data show that the proposed method achieves better recognition performance than traditional GDA, while it has lower costs in computation partly, thereby, the real-time performance is improved.

**Key words:** radar target recognition; generalized discriminant analysis; kernel modified Gram-Schmidt orthogonalization; feature extraction; one-dimensional range profile

### 引言

随着高分辨雷达及其成像技术的出现,近年来以一维距离像作为目标特征在雷达目标识别中得到了广泛的关注<sup>[1,2]</sup>.一方面,一维距离像反映了目标各散射中心的散射强度与相对位置在雷达视线上的分布,比低分辨雷达提供了更多可资利用的识别特征;而另一方面,它又敏感于目标姿态角的变化,给识别带来了困难.因此,如何提取稳健、有效的特征是基于—维距离像雷达目标识别的关键.

线性判别分析<sup>[3]</sup>(LDA)是一种经典的特征提取方法,目的在于寻求一个最优投影变换矩阵,使异类目标之间的距离增大而同类目标之间的距离减

小,以提高目标的识别率.然而,雷达目标所处环境的复杂性,决定了目标之间的关系往往是非线性的,因此 LDA 的分类性能在实际应用中受到了限制.为此,业界利用近年发展起来的核机器学习理论<sup>[3]</sup>,在 LDA 的基础上推出了一类非线性算法,S. Mika 提出了基于两类问题的核 Fisher 判别分析<sup>[4]</sup>(KFDA);G. Baudat 将 KFDA 推广到多类情况,提出了广义判别分析<sup>[5]</sup>(GDA);J. W. Lu 提出了核直接判别分析<sup>[6]</sup>(KDDA)等等.实践证明,上述核方法在分类性能上要明显优于其线性形式.但最近研究发现,用奇异值分解(SVD)求解 GDA 等效特征方程时,若类内散度矩阵奇异,可能会忽略类内散度矩阵中最具判别力的零空间信息<sup>[6,7]</sup>;同时,根据扰动理

收稿日期:2006-09-08,修回日期:2007-02-28

Received date: 2006-09-08, revised date: 2007-02-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60372022),新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-05-0806)

作者简介:刘华林(1977-),男,湖南湘潭人,博士研究生,主要研究方向为雷达目标识别、信号处理、机器学习.

论<sup>[8]</sup>,所求解在数值上往往缺乏稳定性,且随着数据量的增大,算法的计算效率随之变低.

针对以上问题,文中提出了一种基于 QR 分解的广义判别分析方法(其后称为 GDA + QR),它运用核修正格兰-施密特正交化<sup>[9,10]</sup>(KMGS)算法取代 SVD 直接提取最优投影变换矩阵.对 3 种实测飞机数据的分类结果表明了所提方法的有效性.

### 1 基于 GDA + QR 的特征提取

设  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$  为  $M$  幅一维距离像组成的训练样本集,其中  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, M$ .若给定一非线性映射  $\Phi$ ,则可将输入空间映射到一高维空间  $F$ :

$$\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow F, \mathbf{x}_i \rightarrow \Phi(\mathbf{x}_i), \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^\Phi, \quad (1)$$

基于此,定义  $g$  为目标类别数,  $\mathbf{X}_l^\Phi$  与  $\Phi(\mathbf{x}_{li})$  ( $l = 1, \dots, g; i = 1, \dots, N_l$ ) 为第  $l$  类训练子集与该类的第  $i$  幅像,  $N_l$  和  $\mathbf{m}_l^\Phi = \sum_{i=1}^{N_l} \Phi(\mathbf{x}_{li})/N_l$  ( $l = 1, \dots, g$ ) 为第  $l$  类的训练样本数与均值,  $\mathbf{m}^\Phi = \sum_{i=1}^M \Phi(\mathbf{x}_i)/M$  为训练样本集的总均值,则类间散度矩阵  $\mathbf{S}_B^\Phi$ 、类内散度矩阵  $\mathbf{S}_W^\Phi$  与总散度矩阵  $\mathbf{S}_t^\Phi$  分别表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_B^\Phi &= \sum_{l=1}^g N_l (\mathbf{m}_l^\Phi - \mathbf{m}^\Phi) (\mathbf{m}_l^\Phi - \mathbf{m}^\Phi)^T \\ \mathbf{S}_W^\Phi &= \sum_{l=1}^g \sum_{i=1}^{N_l} (\Phi(\mathbf{x}_{li}) - \mathbf{m}_l^\Phi) (\Phi(\mathbf{x}_{li}) - \mathbf{m}_l^\Phi)^T \\ \mathbf{S}_t^\Phi &= \mathbf{S}_B^\Phi + \mathbf{S}_W^\Phi \end{aligned} \quad (2)$$

#### 1.1 零空间问题与表示

在 GDA 中, Fisher 最优化准则:

$$J^F(\varphi_{opt}) = \arg \max_{\varphi} \frac{\varphi^T \mathbf{S}_B^\Phi \varphi}{\varphi^T \mathbf{S}_t^\Phi \varphi}, \quad (3)$$

等效于广义特征方程  $(\mathbf{S}_t^\Phi)^{-1} \mathbf{S}_B^\Phi \varphi = \lambda \varphi$ . 如前所述,当  $\mathbf{S}_W^\Phi$  (包含于  $\mathbf{S}_t^\Phi$ ) 为奇异矩阵时,若采用 SVD,则可能会忽略掉其零空间中有利于辨别的信息,而往往最优的辨别矢量却包含于其中.为克服这种缺陷,一种简单而有效的方法就是将问题转化为求解  $\overline{\mathbf{S}_W^\Phi(0)} \cap \overline{\mathbf{S}_t^\Phi(0)}$  的正交基<sup>[6,8]</sup>.此时, GDA 最优的辨别矢量即存在于  $\overline{\mathbf{S}_W^\Phi(0)} \cap \overline{\mathbf{S}_t^\Phi(0)}$  的正交基中(设  $\mathbf{S}_W^\Phi(0)$  和  $\mathbf{S}_t^\Phi(0)$  分别表示  $\mathbf{S}_W^\Phi$  的零空间与零空间的补;  $\mathbf{S}_t^\Phi(0)$  和  $\mathbf{S}_B^\Phi(0)$  分别表示  $\mathbf{S}_t^\Phi$  的零空间与零空间的补;依此类推,有  $\mathbf{S}_B^\Phi(0)$  和  $\mathbf{S}_B^\Phi(0)$  分别表示  $\mathbf{S}_B^\Phi$  的零空间及其补).此时,  $\overline{\mathbf{S}_W^\Phi(0)}$  与  $\overline{\mathbf{S}_B^\Phi(0)}$  定义为:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}_W^\Phi(0)} &= \text{span}\{\Phi(\mathbf{x}_{li}) - \Phi(\mathbf{x}_{ll}) \mid l = 1, \dots, g; j = 2, \dots, N_l\} \\ \overline{\mathbf{S}_B^\Phi(0)} &= \text{span}\{\mathbf{m}_l^\Phi - \mathbf{m}_1^\Phi \mid l = 2, \dots, g\}, \end{aligned} \quad (4)$$

又  $\overline{\mathbf{S}_t^\Phi(0)} = \overline{\mathbf{S}_W^\Phi(0)} \cup \overline{\mathbf{S}_B^\Phi(0)}$ , 则可以得到一个  $M - 1$  列的矩阵  $\mathbf{W}^\Phi = \{\mathbf{W}_1^\Phi, \dots, \mathbf{W}_g^\Phi, \mathbf{W}_{g+1}^\Phi\}$ . 其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_l^\Phi &= \{\Phi(\mathbf{x}_{l2}) - \Phi(\mathbf{x}_{l1}), \dots, \Phi(\mathbf{x}_{lN_l}) - \Phi(\mathbf{x}_{l1}) \\ &\quad \mid l = 1, \dots, g\} \\ \mathbf{W}_{g+1}^\Phi &= \{\mathbf{m}_2^\Phi - \mathbf{m}_1^\Phi, \dots, \mathbf{m}_g^\Phi - \mathbf{m}_1^\Phi\}, \end{aligned} \quad (5)$$

由式(4)可知  $\mathbf{W}^\Phi$  的前  $M - g$  列为  $\overline{\mathbf{S}_W^\Phi(0)}$  的基,后  $g - 1$  列为  $\overline{\mathbf{S}_B^\Phi(0)}$  的基.

#### 1.2 获取 $\overline{\mathbf{S}_W^\Phi(0)} \cap \overline{\mathbf{S}_t^\Phi(0)}$ 的正交基

若给定核函数为  $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , 则可以定义  $(M - 1) * (M - 1)$  的核矩阵:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{mn})_{m,n=1,\dots,g+1}, \quad (6)$$

其中子块  $\mathbf{K}_{mn} = (\mathbf{W}_m^\Phi)^T \mathbf{W}_n^\Phi$ , 所涉及的运算可以通过式(7)中各式转化为基于核函数的内积形式:

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_{ip}^\Phi)^T \mathbf{w}_{jq}^\Phi &= (\Phi(\mathbf{x}_{i(p+1)}) - \Phi(\mathbf{x}_{i1}))^T (\Phi(\mathbf{x}_{j(q+1)}) - \Phi(\mathbf{x}_{j1})) \\ &= k(\mathbf{x}_{i(p+1)}, \mathbf{x}_{j(q+1)}) - k(\mathbf{x}_{i(p+1)}, \mathbf{x}_{j1}) \\ &\quad - k(\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{j(q+1)}) + k(\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{j1}) \\ (\mathbf{w}_{ip}^\Phi)^T \mathbf{m}_u^\Phi &= \sum_{c=1}^{N_u} (\Phi(\mathbf{x}_{i(p+1)}) - \Phi(\mathbf{x}_{i1}))^T \Phi(\mathbf{x}_{uc}) / N_u \\ &= \sum_{c=1}^{N_u} (k(\mathbf{x}_{i(p+1)}, \mathbf{x}_{uc}) - k(\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{uc})) / N_u \\ (\mathbf{m}_u^\Phi)^T \mathbf{m}_v^\Phi &= (\sum_{a=1}^{N_u} \Phi(\mathbf{x}_{ua}))^T (\sum_{b=1}^{N_v} \Phi(\mathbf{x}_{vb})) / (N_u N_v) \\ &= \sum_{a=1}^{N_u} \sum_{b=1}^{N_v} k(\mathbf{x}_{ua}, \mathbf{x}_{vb}) / (N_u N_v) \end{aligned} \quad (7)$$

( $i, j, u, v = 1, \dots, g; p = 1, \dots, N_i - 1; q = 1, \dots, N_j - 1$ ), 获得式(6)定义的核矩阵后,下面利用 KMGS 正交化算法来提取  $\overline{\mathbf{S}_W^\Phi(0)} \cap \overline{\mathbf{S}_t^\Phi(0)}$  的正交基.

#### 算法 1 KMGS 正交化算法伪代码

输入:由式(6)定义的核矩阵  $\mathbf{K}$ , 并设  $\mathbf{K}(i, j)$  ( $i, j = 1, \dots, M - 1$ ) 为核矩阵的任意元素;  $\mathbf{s}, \mathbf{t}_j$  和  $\mathbf{e}_j$  为  $M - 1$  维列矢量,且  $\mathbf{e}_j$  是第  $j$  位为 1 的单位矢量;  $\Lambda$  为  $(M - 1) * (M - 1)$  对角矩阵;  $\sigma$  为  $(M - 1) * (M - 1)$  矩阵.

Step1. 令  $\mathbf{s} = \mathbf{t}_1 = \mathbf{e}_1, \Lambda_{11} = \mathbf{K}(1, 1), \sigma_{11} = \mathbf{K}(i, 1)$ ;

Step2. 由  $j = 2, \dots, M - 1$  循环

a.  $\mathbf{t}_j^{(1)} = \mathbf{e}_j$ ;

b. 由  $i = 1, \dots, j - 1$  循环

$$\mathbf{s} = \sum_{p=1}^j \sigma_{pi} \mathbf{t}_{pj}^{(i)} / \Lambda_{ii}; \mathbf{t}_j^{(i+1)} = \mathbf{t}_j^{(i)} - \mathbf{s} \mathbf{t}_i;$$

c.  $\mathbf{t}_j = \mathbf{t}_j^{(j)}$ ;

d. 由  $p = 1, \dots, M - 1$  循环

$$\sigma_{pj} = \sum_{q=1}^j \mathbf{t}_q^T \mathbf{K}(q, p);$$

e.  $\Lambda_{jj} = \sum_{p=1}^j \sigma_{pj} \mathbf{t}_{pj}$ ;

输出: 计算  $\mathbf{P} = \mathbf{W}^\Phi [\mathbf{t}_{M-g+1}, \dots, \mathbf{t}_{M-1}]$

$(\Lambda_{ij})_{i,j=M-g+1,\dots,M-1}^{-1/2}$ , 若令  $\mathbf{A} = [\mathbf{t}_{M-g+1}, \dots, \mathbf{t}_{M-1}]$   
 $(\Lambda_{ij})_{i,j=M-g+1,\dots,M-1}^{-1/2}$ , 则  $\mathbf{P} = \mathbf{W}^\Phi \mathbf{A}$  即为所求  $\mathbf{S}_w^\Phi(0)$   
 $\cap \mathbf{S}_i^\Phi(0)$  的正交基.

1.3 特征提取

令训练样本集中任一幅距离像及第  $l$  类的均值为:

$$\Phi(\mathbf{x}_{li}) = \mathbf{X}^\Phi \mathbf{e}_{h+i} \quad (l = 1, \dots, g; i = 1, \dots, N_l)$$

$$\mathbf{m}_l^\Phi = \sum_{i=1}^{N_l} \mathbf{X}^\Phi \mathbf{e}_{h+i} / N_l = \mathbf{X}^\Phi \mathbf{G}_l \quad (8)$$

其中,  $h = \sum_{k=1}^{l-1} N_k$ ,  $\mathbf{G}_l = \sum_{i=1}^{N_l} \mathbf{e}_{h+i}$  为  $M-1$  维且第  $h+i$  位为 1 的单位矢量, 则矩阵  $\mathbf{W}^\Phi$  可以表示为:

$$\mathbf{W}^\Phi = \mathbf{X}^\Phi \mathbf{U} \quad (9)$$

其中,

$$\mathbf{U} = [\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N_1} - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{N_1+2} - \mathbf{e}_{N_1+1}, \dots, \mathbf{e}_M - \mathbf{e}_{M-N_g+1}, \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_g - \mathbf{G}_1] \quad (10)$$

结合 KMGS 获得的  $\mathbf{S}_w^\Phi(0) \cap \mathbf{S}_i^\Phi(0)$  正交基及上述定义, GDA + QR 的最优投影变换矩阵可表示为:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^\Phi \mathbf{U} \mathbf{A} \quad (11)$$

若给定一幅测试距离像  $\Phi(\mathbf{z})$ , 则其在 GDA + QR 特征子空间中的投影为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}^T \Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{A}^T \mathbf{U}^T \mathbf{K}_z = \mathbf{A}^T \mathbf{U}^T \mathbf{k}(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}) \quad (i = 1, \dots, M) \quad (12)$$

2 实验结果与分析

本文采用的实测数据是用 C 波段 ISAR 雷达对空中的 3 种飞机 (安-26、奖状和雅克-42) 所成的一维距离像. ISAR 交替发射窄带 (脉冲时宽为 1μs) 和宽带两种波形, 其中窄带用来跟踪目标和产生宽带本振定时信号; 宽带信号带宽为 400MHz (理论距离分辨力为 0.375m), 采样点数为 256 (经 FFT 后所得一幅距离像的像点数也为 256). 根据飞行轨迹的不同, 每种飞机记录了 7 段数据, 其中每段有 260 幅像. 实验中, 先从每类目标中各取一段数据 (安-26 的第 4 段、奖状的第 4 段和雅克-42 的第 2 段) 作为实验对象, 并进行能量归一、Fourier 变换对准等预处理. 然后, 从以上各段中分别抽取等量的样本组成不同大小的样本集, 按“隔一取一”的方式, 以奇数幅像 (第 1, 第 3, ...) 作为训练样本, 其余的则作为测试样本.

为了进行性能对比, 分别采用 PCA、核主分量分析 (KPCA)、GDA、GDA + QR 和 KDDA 等五种方法对数据样本进行特征提取, 并用最近邻中心分类器分类. 另外, 对 KPCA、GDA 与 GDA + QR 三种核方法, 采用径向基核 (RBF) 核函数<sup>[3]</sup>:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 / \sigma) \quad (13)$$

其中  $\sigma$  取值为 0.5.

2.1 算法计算复杂度分析

KMGS 正交化过程是 GDA + QR 算法的核心部分. 由算法 1 可知, KMGS 运算量最大的部分在 Step2, 它由 3 个基本循环组成, 易知计算复杂度为  $O(M^3)$ ; 而由文献[5]可知, 传统 GDA 算法的计算复杂度为  $O(M^3 + M^2d)$ . 表 1 给出了这两种算法在 4 种不同大小的训练样本集情况下, 对单个训练样本进行特征提取所需的时间对比.

表 1 GDA + QR 与 GDA 实时性能比较  
 Table 1 The real-time performance comparison between GDA + QR and GDA

Training samples	60	120	180	240
Method	Time consume(s)			
GDA	0.0064	0.0119	0.0185	0.0257
GDA + QR	0.0055	0.0113	0.0182	0.0256

由表示数据可知, GDA + QR 在实时性能上要优于 GDA, 尤其当样本维数 (距离像在预处理中经 Fourier 对准后, 由于数据对称, 维数折半, 由 256 变为 128) 大于训练样本数时, 优势更加明显. 但随着训练样本数的增多, 维数对比训练样本数的优势逐渐减小, 此时, 两种算法的实时性能比较接近.

2.2 分类性能与抑制噪声性能分析

由图 1 中曲线的变化可知: (1) GDA + QR 在分类性能上略优于 GDA. 在所进行的目标一维距离像实验中, 尽管数据的维数均大于训练样本数, 但相差并不大, 仅是一个弱小样本问题, 因此对 GDA + QR 而言, 保留的类内散度矩阵的零空间信息体现的作用不大, 未能充分发挥它的性能优势. 不过, 与同样

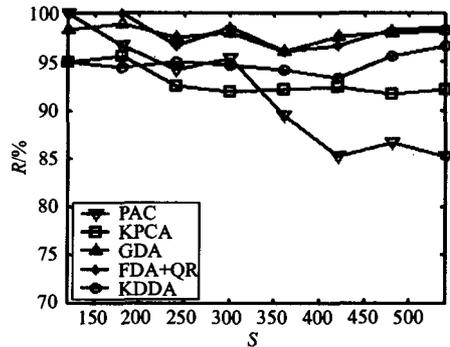


图 1 PCA、KPCA、GDA、GDA + QR 与 KDDA 在不同样本集大小 S 时的平均识别率 R  
 Fig. 1 Average recognition rates R of PCA, KPCA, GDA, GDA + QR and KDDA versus the size of the sample set S

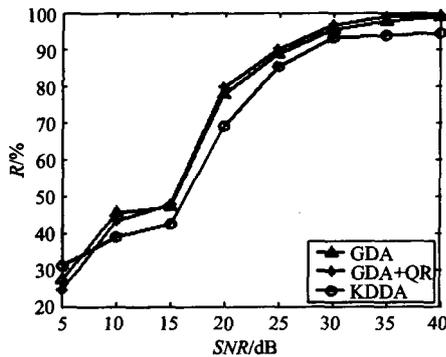


图2 GDA、GDA + QR 与 KDDA 在不同信噪比时的平均识别率  $R$

Fig. 2 Average recognition rates  $R$  of GDA, GDA + QR and KDDA versus SNR

利用了零空间信息的 KDDA 方法相比,它仍具有明显优势,平均识别率高出约 3.3%。(2) 随着样本集的增大,各方法的平均识别率均有一定波动,尤其 PCA 的识别性能下降比较明显.其原因在于雷达目标一维距离像识别与一般模式识别任务不同,随着训练样本的增加,目标的姿态角增大,可能会使各目标的特征模板矢量表征性能下降,从而影响分类效果,尤其是线性方法.从实验结果可以看出,KPCA、KDDA 受此影响较小,而 GDA + QR 与 GDA 的平均识别率更是不低于 96.11%,可见,基于核函数的非线性方法性能更加稳健.

图 2 是在样本集大小为 180 幅像时,在实测数据中加入高斯白噪声后进行实验的结果.简单起见,其中只比较了 GDA + QR 与 GDA、KDDA 在不同信噪比情况下的识别性能.如图 2 所示,各方法的平均识别率均随信噪比的提高而上升,GDA + QR 在抑制噪声性能上要优于其它两种方法,尤其当  $SNR > 15\text{dB}$  时.以  $SNR = 25\text{dB}$  为例,此时 GDA、GDA + QR 与 KDDA 的平均识别率分别为 88.89%、90.00%、85.56%.

### 3 结语

本文针对传统广义判别分析中用 SVD 求解等

效特征方程时存在的不足,提出了一种基于 QR 分解的广义判别分析方法,将问题转化为用核修正格兰-施密特正交化算法提取  $S_w^\Phi(0) \cap S_s^\Phi(0)$  的正交基,从而直接提取最优投影变换矩阵.通过与 PCA、KPCA、KDDA、GDA 等方法的比较,并用 3 种实测飞机数据进行分类实验,结果表明,所提方法不仅具有稳健的识别性能,而且具有良好的噪声抑制能力.与此同时,新方法在数据维数远大于训练样本数时,可以进一步降低算法的计算复杂度,提高系统的实时性能.

### REFERENCES

- [1] WANG Dang-Wei, MA Xin-Yi, WANG Shao-Gang, et al. New approach to radar target identification using a generalized likelihood ratio test [J]. *J. Infrared Millim. Waves* (王党卫, 马兴义, 王少刚, 等. 一种基于广义似然比检测的雷达目标识别新方法. *红外与毫米波学报*), 2006, 25(4): 311—315.
- [2] LIU Jing, ZHONG Wei-Cai, Liu-Fang, et al. Organizational coevolutionary classification algorithm for radar target recognition [J]. *J. Infrared Millim. Waves* (刘静, 钟伟才, 刘芳, 等. 组织协同进化分类算法用于雷达目标一维像识别. *红外与毫米波学报*), 2004, 23(3): 208—213.
- [3] Vapnik N. *The Nature of Statistical Learning Theory* [M]. New York: Springer, 1995: 1—188.
- [4] Mika S, Ratsch G, Weston J, et al. Fisher discriminant analysis with kernels [C]. *IEEE International Workshop on Neural Networks for Signal Processing IX*, Madison, USA, 1999: 41—48.
- [5] Baudat G, Anouar F. Generalized discriminant analysis using a kernel approach [J]. *Neural Computation*, 2000, 12(10): 2385—2404.
- [6] Lu Ju-Wei, Plataniotis K N, Venetsanopoulos A N. Face recognition using kernel direct discriminant analysis algorithms [J]. *IEEE Trans. NN*, 2003, 14: 117—126.
- [7] Chen Li-Fen, Mark Liao Hong-Yuan, Ko Ming-Tat, et al. A new LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem [J]. *Pattern Recognition*, 2000, 33: 1713—1726.
- [8] Zheng Wen-Ming. Class-Incremental generalized discriminant analysis [J]. *Neural Computation*, 2006, 18(4): 979—1006.
- [9] Björck A. Solving linear least-squares problems by Gram-Schmidt orthogonalization [J]. *BIT*, 1967, 7: 1—21.
- [10] Wolf L, Shashua A. Learning over sets using kernel principal angles [J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2003, 4: 913—931.