

文章编号:1001-9014(2005)02-0151-05

基于平稳多小波变换的红外图像噪声抑制方法

周凤岐¹, 遆小光², 周军¹

(1. 西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072;

2. 哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:提出了一种平稳多小波变换方法,该方法结合多小波和平稳小波变换在信号去噪方面的优点,给出了二维图像平稳多小波变换的 mallat 分解重构算法,并对红外图像的平稳多小波变换系数进行阈值处理实现图像去噪,仿真结果表明,相对于平稳标量小波变换和多小波的噪声抑制方法,此方法对噪声有更好的抑制作用,并尽可能多的保持目标的特征和细节。

关键词:平稳多小波变换;阈值处理;红外图像去噪

中图分类号:TP391 **文献标识码:**A

METHOD OF INFRARED IMAGE DENOISING BASED ON STATIONARY MULTIWAVELET TRANSFORM

ZHOU Feng-Qi¹, DI Xiao Guang², ZHOU Jun¹

(1. College of Astronaut, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: A novel stationary multiwavelet transform (SMWT) method was proposed. The method possesses the good quality of both multiwavelet transform and stationary scalar wavelet on signal denoising. The mallat decompositing and reconstructing of 2D image based on SMWT was inferred. By thresholding the SMWT coefficients of noisy infrared image, the original image can be reconstructed. The simulation results show that the image denoising effect of this method has obvious superiority compared with scalar wavelet and general multiwavelet transform method. At the same time, the reconstructing image can preserve the characteristics of original image as many as possible.

Key words: stationar multiwavelet transform (SMWT); threshold processing; infrared image denoising

引言

由于小波变换具有时频局部化特性和多分辨率分析特性,可以对图像不同层次上的小波变换系统进行阈值化处理,因而许多学者研究了小波去噪问题,这些方法大都采用的是标量小波变换的方法,根据著名的海森堡时频测不准原理($\Delta t \cdot \Delta \omega \geq C$, Δt 为时间分辨率、 $\Delta \omega$ 为频率分辨率、 C 为常数),标量小波变换的时频分辨率具有制约关系,即标量小波不可能同时具有高的时频分辨率。已经证明,标量小波变换不可能同时满足对称性、正交性、高阶消失矩和有限支撑等特性^[6],而这些特性都是对图像进行去噪的重要性质。对于多小波由于具有多个尺度函数,

借助多尺度函数的互补性,使得多小波在构造时有了更多的自由度,即构造出同时满足上述性质并具有更高阶消失矩的小波函数成为了可能。Gibert Strang 和 V. Strela 在文献[1]发现多小波可同时具有上述性质,并且在文献[2]中通过仿真证明多小波软阈值去噪比标量小波软阈值去噪有更好的效果。然而,标量小波变换的一个主要缺点是其对信号平移具有敏感性,即标量小波基是由基本小波函数经伸缩与平移得到的函数集,平移是非均匀取样,随着尺度增大,平移取样间隔以 2 的指数倍变大,而标量小波函数集不能从多尺度角度很好地匹配信号的局部结构特征,使得在去噪过程中,对信号偶位置和奇位置的下抽取进行阈值处理后其重构结果是不一

收稿日期:2004-06-25,修回日期:2004-10-14

Received date: 2004-06-25, revised date: 2004-10-14

基金项目:西北工业大学博士论文创新基金(5211102-G0800014103)资助项目

作者简介:周凤岐(1935-),男,江苏南通人,教授,研究方向:导航、制导与控制。

样的^[3],因此,重构的去噪信号在信号的奇异点(如图像的边缘等处)附近容易出现伪 Gibbs 振荡现象从而影响信号的分辨率。Nason 在文献[4]采用了此方法应用于图像去噪,取得了优于普通标量小波变换的去噪效果。在上述研究基础上,结合多小波变换和平稳小波变换两者的优点,本文提出一种平稳多小波变换方法,并对应用于红外图像的去噪问题。

1 多小波变换理论^[8,9]

多小波变换理论是标量小波变换的多维推广,多小波基是由多个小波母函数经过伸缩平移生成,相应的有多个尺度函数。令 $\Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_r(t)]^T, \phi_r \in L^2(\mathbf{R}), r \in N$, 是多分辨分析空间(MRA)的多尺度函数。与其相对应的多小波函数用 $\Psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_r(t)]^T$ 表示, $\Phi(t)$ 经过伸缩和平移可张成子空间 $V_j, j \in Z, V_j$ 满足 $\bigcup_{j \in Z} V_j = L^2(\mathbf{R})$ $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$, 同时满足 $\dots \supset V_{-1} \supset V_0 \supset V_1 \supset \dots, \psi(t)$ 经过伸缩和平移张成的子空间 W_j, W_j 是 V_j 的正交补空间,满足 $V_{j-1} = V_j \oplus W_j, V_j \cap W_j = \langle 0 \rangle$ 和 $\bigoplus_{j \in Z} W_j = L^2(\mathbf{R}), \Phi(t), \Psi(t)$ 满足如下两尺度方程

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 2 \sum_{k \in Z} H_k \Phi_k(2t - k), \\ \Psi(t) &= 2 \sum_{k \in Z} G_k \Phi_k(2t - k). \end{aligned} \quad (1)$$

其中, H_k, G_k 是 $r \times r$ 矩阵, $H(\omega) = \sum_{k \in Z} H_k e^{-i\omega k}, G(\omega) = \sum_{k \in Z} G_k e^{-i\omega k}$ 是与多尺度函数和多小波函数对应的低通和高通矩阵滤波器。

将标量小波变换中进行信号分解与重构的 mallat 算法推广至多小波变换,可以得到离散多小波分解与重构算法,见图 1(a)和图 1(b)。

$W(\omega)$ 是预滤波器, $P(\omega)$ 是后滤波器,满足 PQ

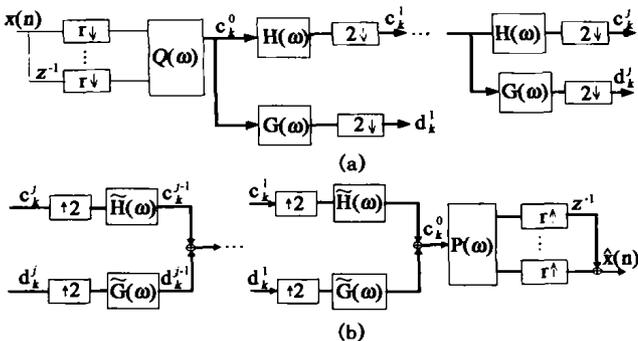


图 1 (a)多小波信号分解结构框图 (b)多小波信号重构结构框图
Fig.1 (a)The diagram of multiwavelet decomposition (b) the diagram of multiwavelet reconstruction

$= I_{r,r}, \tilde{H}(\omega), \tilde{G}(\omega)$ 分别是 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 对偶滤波器,对于正交多小波变换器则为 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 共轭转置, $C_k^j = [c_{1,k}^j, c_{2,k}^j, \dots, c_{r,k}^j], D_k^j = [d_{1,k}^j, d_{2,k}^j, \dots, d_{r,k}^j], k, j \in Z, r \in N. c_{1,k}^j = \int x(t) 2^{-2^j} \phi_1(2^{-j}t - k) dt. d_{i,k}^j = \int x(t) 2^{-2^j} \psi_i(2^{-j}t - k) dt, 1 \leq i \leq r, j, k \in Z.$

由此可得,分解过程表达式为

$$C_k^{j+1} = \sum_n H_{n-2k}^T C_n^j \quad D_k^{j+1} = \sum_n G_{n-2k}^T C_n^j \quad (2)$$

重构过程表达式为

$$C_k^j = \sum_n \tilde{H}_{k-2n}^T C_n^{j+1} + \sum_n \tilde{G}_{k-2n}^T D_n^{j+1} \quad (3)$$

2 二维图像平稳多小波变换

平稳小波变换是一种冗余的小波变换,Nason 和 Silverman 于 1995 年提出了平稳标量小波变换的概念,并在文献[4]给出了其分解和重构算法,即对低通滤波器和高通滤波器进行插值补零,同时对滤波器输出的系数不再进行二次抽取即可得到平稳小波的分解。同时指出平稳小波变换包含选择不同 ε 的所有 ε -抽取离散小波变换(ε -decimated DWT)系数,其重构相当于所有 ε -抽取离散小波变换重构结果的平均,因此可以很好的抑制信号的突变处存在的伪 Gibbs 振荡现象,具有平移不变性。 ε -抽取离散小波变换算法详细介绍见文献[4,11],下面给出二维图像平稳多小波变换的具体形式。

图 2 给出了二维图像平稳多小波变换的分解结构框图,与图 1(a)普通多小波分解结构图相比较可以看出,前者每一分解级经过低通和高通滤之后没有 2 次抽取过程,因此经过分解后的第一级逼近和细节系数矩阵与经过预处理后的输入图像数据矩阵

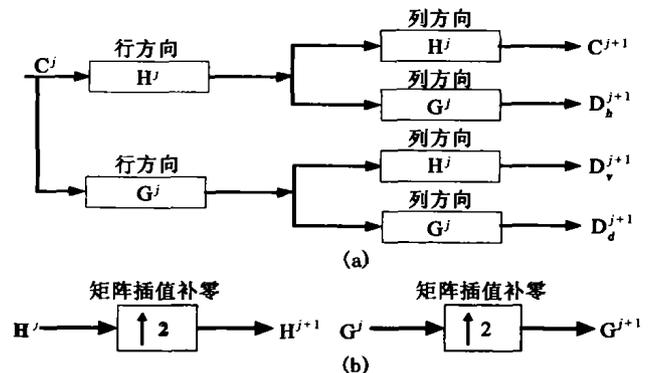


图 2 平稳多小波变换的分解结构框图
Fig.2 The diagram of stationary multiwavelet transformation decomposition

大小相等而不是逐级减半. 与平稳标量小波变换^[4]相比, 平稳多小波变换的后一分解级的低通和高通滤波器是前一分解级进行矩阵插值补零的结果, 矩阵插值补零是指插入的是大小为 $r \times r$ 的零矩阵, 这是由于平稳多小波变换输入的是 r 维数据, 其滤波器系数为矩阵形式, 因此每一次插值补零运算必须插入 $r \times r$ 的矩阵. 图 2 中 \mathbf{H}^j 、 \mathbf{G}^j 分别是 \mathbf{H} 和 \mathbf{G} 进行 j 次矩阵插值补零运算的结果, 图 2(b) 给出了具体的矩阵插值补零的结构框图. \mathbf{H} 和 \mathbf{G} 的滤波器系数分别用 \mathbf{H}_i 和 \mathbf{G}_i 表示, $i \in Z$ 分别代表两滤波器第 i 个系数矩阵, 大小为 $r \times r$ 矩阵. \mathbf{H}^j 和 \mathbf{G}^j 的滤波器系数分别用 \mathbf{H}_i^j 和 \mathbf{G}_i^j 来表示, 其大小为 $r \times r$ 系数矩阵. 令 \mathbf{Z} 表示矩阵插值补零算子, 则对于任意的整数 i , $(\mathbf{Z}\mathbf{H})_{2i} = \mathbf{H}_i$; 当 l 不为 2 的整数倍时, $(\mathbf{Z}\mathbf{H})_l = \mathbf{0}_{r \times r}$. 由此, 可以得出式(10)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{2i}^j &= (\mathbf{Z}^j \mathbf{H})_{2i} = \mathbf{H}_i, \quad \mathbf{G}_{2i}^j = (\mathbf{Z}^j \mathbf{G})_{2i} = \mathbf{G}_i, \\ \mathbf{H}_l^j &= \mathbf{G}_l^j = \mathbf{0}_{r \times r}, \text{ 当 } l \text{ 不为 } 2^j \text{ 的整数倍} \end{aligned} \quad (4)$$

由图 2 可得二维图像平稳多小波变换的分解表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{j+1} &= (\mathbf{H}^j)_{col} (\mathbf{H}^j)_{row} \mathbf{C}^j, \quad \mathbf{D}_h^{j+1} = (\mathbf{G}^j)_{col} (\mathbf{H}^j)_{row} \mathbf{C}^j, \\ \mathbf{D}_v^{j+1} &= (\mathbf{H}^j)_{col} (\mathbf{G}^j)_{row} \mathbf{C}^j, \quad \mathbf{D}_d^{j+1} = (\mathbf{G}^j)_{col} (\mathbf{G}^j)_{row} \mathbf{C}^j. \end{aligned} \quad (5)$$

下标 col 、 row 分别代表沿列方向和行方向进行卷积运算, \mathbf{C}^j 、 \mathbf{D}_h^j 、 \mathbf{D}_v^j 和 \mathbf{D}_d^j 分别代表逼近、水平细节、垂直细节和对角细节系数矩阵.

需要注意的问题是对于第一分解级的输入图像数据是经过预滤波器先沿行方向处理, 然后沿列方向处理的结果.

下面给出二维图像平稳多小波变换的重构过程, 由于平稳小波变换是一种冗余小波变换形式, 是一种对信号的超定的表示形式, 其小波系数是由许多不同的基生成的, 因此其重构形式不是唯一的, 但是重构结果是相同的. 下面给出一种平稳多小波的重构形式, 令 $\mathbf{C}^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ 、 $\mathbf{D}_h^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ 、 $\mathbf{D}_v^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ 和 $\mathbf{D}_d^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ 分别为对平稳多小波变换的逼近系数和各方向细节系数和各方向细节系数依次进行 $D_{\varepsilon_1}, \dots, D_{\varepsilon_j}$ 共 j 次二次抽样的后的信号, ε_j 取 0 或 1, 其中 D_0 表示对偶位置进行二次抽样, D_1 表示对奇位置进行二次抽样, 根据 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j$ 不同的 0, 1 组合方式, 共有 2^j 种抽样组合方式, 对于 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}$ 每一种特定的 0, 1 组合方式

$$\begin{aligned} \text{当 } \varepsilon_j &= 0 \text{ 时} \\ \mathbf{R}_0^{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\tilde{\mathbf{H}})_{col} (\tilde{\mathbf{H}})_{row} \mathbf{C}^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, 0) + \\ &(\tilde{\mathbf{G}})_{col} (\tilde{\mathbf{H}})_{row} \mathbf{D}_h^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, 0) + \\ &(\tilde{\mathbf{H}})_{col} (\tilde{\mathbf{G}})_{row} \mathbf{D}_v^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, 0) + \\ &(\tilde{\mathbf{G}})_{col} (\tilde{\mathbf{G}})_{row} \mathbf{D}_d^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

当 $\varepsilon_j = 1$ 时

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}) &= \\ &(\tilde{\mathbf{H}})_{col} (\tilde{\mathbf{H}})_{row} \mathbf{C}^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, 1) + \\ &(\tilde{\mathbf{G}})_{col} (\tilde{\mathbf{H}})_{row} \mathbf{D}_h^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, 1) + \\ &(\tilde{\mathbf{H}})_{col} (\tilde{\mathbf{G}})_{row} \mathbf{D}_v^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, 1) + \\ &(\tilde{\mathbf{G}})_{col} (\tilde{\mathbf{G}})_{row} \mathbf{D}_d^j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, 1). \end{aligned} \quad (7)$$

$\tilde{\mathbf{H}}$ 、 $\tilde{\mathbf{G}}$ 定义同上一节, 对式(6)和式(7)求和平均可得

$$\mathbf{C}^{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_0^{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}) + \mathbf{R}_1^{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})). \quad (8)$$

选择不同的 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}$ 组合方式, 重复式(6)~(8)共 2^{j-1} 次, 即可得到重构的 $j-1$ 级的逼近系数矩阵 \mathbf{C}^{j-1} , $j=1, \dots, J$, J 为最大分解级数.

3 平稳多小波图像去噪算法

图 3 给出了对图像采用平稳多小波变换后进行去噪的结构框图, 根据此图可以给出平稳多小波变换图像去噪的一般算法

1. 首先对输入含噪声图像进行预滤波, 得到 r 个输入序列.
2. 对经过预滤波的输入图像序列进行平稳多小波分解, 从而得到输入图像的逼近系数矩阵和细节系数矩阵.
3. 对得到 3 个方向的细节系数矩阵进行阈值处理, 去除细节系数矩阵中所含的噪声, 对逼近系数矩阵不进行处理.
4. 由经过阈值处理的细节系数矩阵和原始逼近系数矩阵进行图像平稳多小波重构.
5. 对重构的信息经过后滤波器处理, 即得到去噪后的图像.

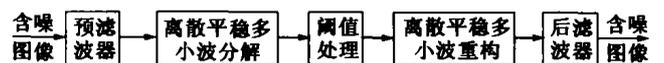


图 3 离散平稳多小波 (DSMWT) 图像去噪框图

Fig. 3 Diagram of image denoising based on discrete stationary multiwavelet transformation (DSMWT)

对上述算法需要说明的是阈值处理问题,假设一个信号被加性高斯噪声污染可用下式表示

$$f_n(k) = f(k) + \sigma z(k), k=0, \dots, N-1 \quad (9)$$

式(9)中, $f_n(k)$ 表示含噪信号, $f(k)$ 表示真实信号, $z(n)$ 为高斯白噪声, σ 为噪声均方差, N 为采样点数, 则经过平稳多小波变换后, 细节系数矩阵表示为

$$\mathbf{D}_k^j = \mathbf{S}_k^j + \sigma \mathbf{z}_k^j, j \in Z, k=0, \dots, M-1 \quad (10)$$

其中, \mathbf{D}_k^j 为含噪的小波系数向量, 其形式为 $d_{1,0}^j, d_{2,0}^j, \dots, d_{r,0}^j, \dots, d_{1,M-1}^j, \dots, d_{r,M-1}^j$, \mathbf{S}_k^j 为真实的小波系数向量, 对于重复行预处理 $M=N$, 对于矩阵预处理 $M=N/r$. 由于小波变换具有去相关性和能量集中性, 信号能量绝大部分集中于逼近系数, 因此噪声信息主要含于细节系数中, 因此去噪主要是对细节系数进行. 用于小波去噪的阈值处理方法主要有软阈值处理和硬阈值处理 2 种^[12].

软阈值处理为

$$d_{i,k}^j = \begin{cases} d_{i,k}^j, & |d_{i,k}^j| \geq Th_i^j \\ 0, & |d_{i,k}^j| < Th_i^j \end{cases} \quad (11)$$

硬阈值处理为

$$d_{i,k}^j = \begin{cases} \text{sgn}(d_{i,k}^j)(|d_{i,k}^j| - Th_i^j), & |d_{i,k}^j| \geq Th_i^j \\ 0, & |d_{i,k}^j| < Th_i^j \end{cases} \quad (12)$$

式(11)和式(12)中 $i=1, \dots, r, k=0, \dots, M-1, j=1, \dots, j-1$.

对于标量正交小波变换阈值 Th 根据文献[12], 可取通用阈值 $Th = \sigma \sqrt{2 \log(N)}$, 其中 σ 为噪声均方差, 由于在实际去噪过程中 σ 无法事先知道, 且噪声主要集中于细节信息, 一般通过对小波变换第一分解级的小波细节系数方差进行估算得到. 但笔者经过仿真发现分别估算各级方差, 对各级分别取阈值有更好地去噪效果. 对于平稳多小波变换有多个小波函数, 噪声经过预处理和多小波变换后, 由于并非正交变换, 因此各个小波细节系数向量的方差都不同, 文献[8]取它们平均值作为估计噪声方差, 耗费将对不同级不同小波系数分别取方差, 并分别确定阈值 $Th_i^j = \sigma_i^j \sqrt{2 \log(N)}$, σ_i^j 根据信号的平稳多小波的变换的第 j 分解级的第 i 个小波细节系数向量进行估算.

$$\sigma_i^j = \frac{\text{median}(d_{i,k}^j)}{0.6745}, k=0, \dots, M-1, i=1, \dots, r \quad (13)$$

由此可得 Th_i^j , 利用式(11)或式(12)可求得经过阈值处理后的小波系数.

值得一提的是, 目前确定阈值的方法有很多种, 如 Heurshrink 法、minimax 法以及 Sureshrink 法等, 各种方法有各自的优缺点, 文献[13]对此问题有详细的介绍, 本文仅采用一种阈值确定方法是为了便于比较.

4 仿真结果

下面对某型飞机的红外含噪图像分别用重数为 2 的 GHM 正交双小波、平稳 GHM 双小波、db2 小波、平稳 db2 小波进行去噪比较研究, 这样选择的原因是 db2 小波和 ghm 小波都具有二阶消失矩, 且与其对应的低通滤波器组和高通滤波器组也是 4 个系数, 具有可比性. 其中噪声图像由原始图像加入高斯白噪声得到, 含噪图像信噪比 $\text{SNR} = 2$ 、均方误差 $\text{rmse} = 19.4832$. 多小波采用逼近预滤波器, 为了便于比较, 阈值处理过程都是对含噪图像进行 3 级分解, 并对各分解级分别取阈值. 图 4 是采用软阈值去噪结果, 其中(a)为原始图像;(b)为加入高斯噪声图像;(c)为采用 db2 正交小波去噪结果;(d)为采用 GHM 正交双小波去噪结果;(e)为平稳 GHM 双小波去噪结果;(f)、(g)、(h)和(i)分别为原始图像和含噪图像以及采用 db2 小波、GHM 双小波、平稳 GHM 双小波获得的去噪图像第 128 行比较图;(j)、(k)分别为 GHM 双小波的尺度函数和小波函数;(1)为 db2 小波的尺度函数和小波函数. 表 1 给出了分别采用软、硬阈值各种小波去噪性能比较. GHM 滤波器系数和逼近预滤波矩阵见文献[8].

从图 4 和表 1 可以看出在同等条件下, 对于含加性高斯噪声的图像, 平稳 GHM 双小波较其他小波去噪方法性能确有提高, 从(i)可以看出其去噪结果基本上复现了原始信号.

5 结语

结合多小波变换和平稳小波变换在图像去噪方面的优越性, 文中提出了一种基于平稳多小波变换的去噪算法, 并采用平稳 GHM 双小波对含加性高斯噪声的红外图像进行了去噪仿真, 结果表明在同等实验条件下, 相对一般的基于标量小波和多小波

表 1 不同小波去噪方法性能比较

Table 1 Comparison of different wavelet denoising algorithm

	GHM 正交双小波	平稳 GHM 小波	Db2 正交标量小波	平稳 Db4 小波
均方根差(硬阈值)	5.7554	4.9670	5.8294	5.0817
均方根差(软阈值)	5.3822	4.9463	6.6842	5.1356

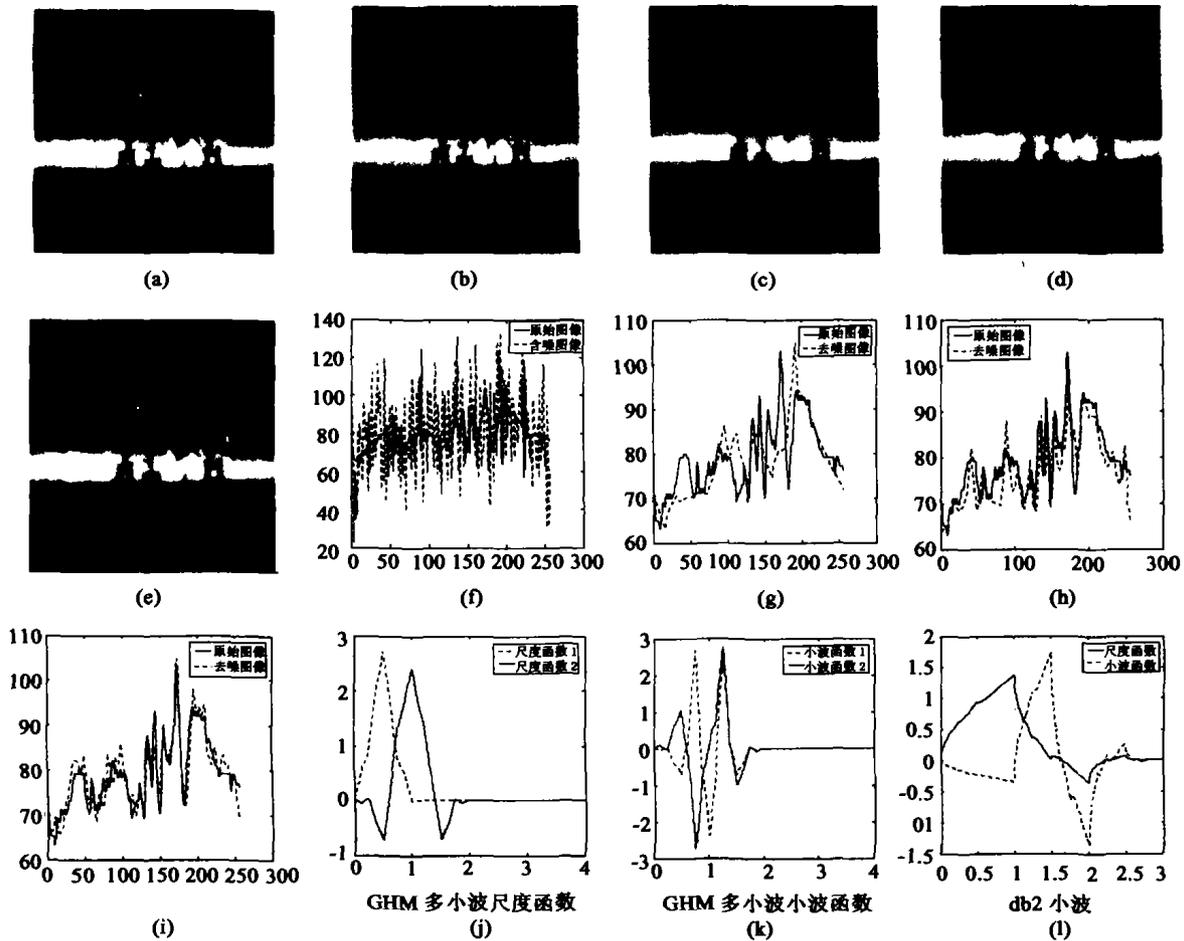


图 4 采用软阈值红外图像去噪结果

Fig. 4 The denoising infrared image based on soft thresholding

变换的去噪算法,此算法不仅对加性高斯噪声有很好的抑制作用,而且可以保留尽可能多的图像细节。

REFERENCES

- [1] Gilbert Strang, Vasily Strela. Short wavelets and matrix dilation equation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(1):108—115.
- [2] Strela V, Heller P N, Strang G, et al. The application of multiwavelet filterbanks to image processing[J]. *IEEE Trans. Imaging processing*, 1999, 8(4):548—563.
- [3] Jie Liang, Thomas W. Parks. A translation-invariant wavelet representation algorithm with application[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(2):225—232.
- [4] Nason G P, Silverman B W. *The Stationary Wavelet Transform and Some Statistical Applications*[M]. Lecture notes in statistics. A. Antoniadis Ed. Berlin: Springer Verlag, 1995, 281—299.
- [5] GAO Qing-Wei, LI Bin, XIE Guang-Jun, et al. An image denoising method based on stationary wavelet transformation[J]. *Journal of Computer Research and Development* (高清维,李斌,解光军,等.基于平稳小波变换的图像去噪方法.计算机研究与发展), 2002, 39(12):1689—1694.
- [6] Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*[M]. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [7] LIN Ke-Zheng, LI Dian-Pu, HUA Ke-Qiang. Operator description of image wavelet denoising[J]. *Journal of Harbin University of Science and Technology* (林克正,李殿璞,华克强.图像小波去噪算子描述.哈尔滨理工大学学报), 2000, 5(3):8—12.
- [8] Strela V, Walden A T. Signal and image denoising via wavelet thresholding: orthogonal and biorthogonal, scalar and multiple wavelet transforms[R]. Imperial College, Statistics Section, Technical Report TR-98-01(1998).
- [9] Strela V. Multiwavelet: Theory and Application[D]. Ph. D Thesis MIT, 1996.
- [10] Downie T R, Silverman B W. The discrete multiple wavelet transform and thresholding methods[J]. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1998, 46:2558—2561.
- [11] Coifman R, Donoho D. Translation-invariant de-noising[D]. Wavelets and Statistics, Springer lecture notes in statistics 103. New York: Springer-Verlag, 1994:125—150.
- [12] Donoho D L, Jonestone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994, 81:425—455.
- [13] XIE Jie-Cheng, ZHAO Da-li, XU Wen-li, Overview on wavelet image denoising[J]. *Journal of Image and Graphics* (谢杰成,张大力,徐文立.小波图象去噪综述.中国图像图形学报), 2002, 7A(3):209—217.