

等离子体的交替方向隐式时域有限差分方法

刘少斌^{1,2}, 莫锦军¹, 袁乃昌¹

(1. 国防科学技术大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 南昌大学 物理系, 江西 南昌 330047)

摘要:首次把交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)推广到色散介质——无碰撞非磁化等离子体中,计算了非磁化等离子体与电磁波的相互作用,使用 ADI 技术给出了无碰撞等离子体介质中的 ADI-FDTD 迭代公式,并解析地证明了等离子体 ADI-FDTD 算法也是无条件稳定的.数值计算表明,等离子体 ADI-FDTD 算法与传统的 FDTD 的计算结果吻合,计算效率更高.

关键词:色散介质;时域有限差分法;电磁波;交替方向隐式;等离子体

中图分类号:TM15 **文献标识码:**A

ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT FINITE-DIFFERENCE TIME-DOMAIN METHOD FOR PLASMAS

LIU Shao-Bin^{1,2}, MO Jin-Jun², YUAN Nai-Chang²

(1. Institute of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha 410073, China;

2. Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330047, China)

Abstract:The alternating direction implicit finite-difference time-domain (ADI-FDTD) formulation was extended to dispersive media-collisionless unmagnetized plasma for the first time. Electromagnetic interactions of collisionless unmagnetized plasma and electromagnetic wave were calculated by using the method. The update equations for collisionless plasma were proposed by using the principle of ADI technique. The unconditional stability of the ADI-FDTD formulation for plasma was analytically derived. The results of numerical experiment confirm that the plasma ADI-FDTD method is consistent with the conventional FDTD method, and its efficiency is higher.

Key words:dispersive media; FDTD methods; electromagnetic wave; alternating direction implicit; plasma

引言

时域有限差分方法 FDTD 自 1966 年由 Yee^[1]提出以来,由于其简单性和灵活性,在许多领域得到广泛的应用.然而,对大尺寸的物体,由于计算机资源的限制和计算效率的原因,FDTD 受到较大的限制.

为了解决上述问题,近年来,出现了许多改进的 FDTD 方法.如 Krumpholz 和 Katehi^[2]提出的多分辨率时域方法(MRTD),Liu^[3]提出的时域伪谱方法(PSTD),Kondylis^[4]等人提出的节省内存时域有限差分法(R-FDTD)以及 Zheng^[5]等人和 Namiki^[6]提出的交替方向隐式时域有限差分方法(ADI-FDTD)

都从不同角度较好地对上述问题进行了研究.其中,ADI-FDTD 方法消除了 Courant 稳定条件的限制,使得时间步长的选择不依赖 Courant 稳定条件,而由计算精度决定.从而时间步长的选择可以成倍地增加,计算时间也成倍地下降.随着 ADI-FDTD 方法的完全匹配边界条件(PML)的实现^[7],随着 ADI-FDTD 方法成功地应用于工程技术,该算法也变得越来越成熟起来.

本文首次把 ADI-FDTD 算法推广到色散介质无碰撞非磁化等离子体中,使等离子体介质中的差分迭代公式满足无条件稳定方程.给出了等离子体中 ADI-FDTD 方法的差分迭代公式,计算结果与传统的 FDTD 的计算结果吻合.

1 等离子体的 ADI-FDTD 公式

在无碰撞冷等离子体色散介质中, Maxwell 方程组和相关的联立方程为:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \varepsilon \omega_p^2 \mathbf{E} \quad (3)$$

式中, E 是电场强度, H 是磁场强度, J 是极化电流密度, ε , μ 分别为真空中的介电常数和磁导率, $\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / m \varepsilon}$ 是等离子体角频率。

ADI 技术应用于 FDTD 时, 方程(1)~(3)的差分公式中的第 n 步分解为两步来完成. 第一分步为第 n 步到 $(n+1/2)$ 步; 第二分步为第 $(n+1/2)$ 步到 $(n+1)$ 步。

以 2-D TE 波为例, 第 n 步到 $(n+1/2)$ 步的交替方向隐式 FDTD 公式为(网格坐标与文献^[7]相同):

$$E_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} = E_x |_{i+1/2, j}^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta y} (H_z |_{i+1/2, j+1/2}^n - H_z |_{i+1/2, j-1/2}^n) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} J_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} \quad (4)$$

$$E_y |_{i, j+1/2}^{n+1/2} = E_y |_{i, j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} (H_z |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_z |_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} J_y |_{i, j+1/2}^n \quad (5)$$

$$H_z |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = H_z |_{i+1/2, j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2\mu \Delta y} (E_x |_{i+1/2, j+1}^n - E_x |_{i+1/2, j}^n) - \frac{\Delta t}{2\mu \Delta x} (E_y |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - E_y |_{i, j+1/2}^{n+1/2}) \quad (6)$$

$$J_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} = J_x |_{i+1/2, j}^n + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_p^2 \Delta t E_x |_{i+1/2, j}^n \quad (7)$$

$$J_y |_{i, j+1/2}^{n+1/2} = J_y |_{i, j+1/2}^n + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_p^2 \Delta t E_y |_{i, j+1/2}^{n+1/2} \quad (8)$$

第 $(n+1/2)$ 步到 $(n+1)$ 步的交替方向隐式 FDTD 公式为:

$$E_x |_{i+1/2, j}^{n+1} = E_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta y} (H_z |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - H_z |_{i+1/2, j-1/2}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} J_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} \quad (9)$$

$$E_y |_{i, j+1/2}^{n+1} = E_y |_{i, j+1/2}^{n+1/2}$$

$$- \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} (H_z |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_z |_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} J_y |_{i, j+1/2}^{n+1} \quad (10)$$

$$H_z |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} = H_z |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2\mu \Delta y} (E_x |_{i+1/2, j+1}^{n+1} - E_x |_{i+1/2, j}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2\mu \Delta x} (E_y |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - E_y |_{i, j+1/2}^{n+1/2}) \quad (11)$$

$$J_x |_{i+1/2, j}^{n+1} = J_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_p^2 \Delta t E_x |_{i+1/2, j}^{n+1} \quad (12)$$

$$J_y |_{i, j+1/2}^{n+1} = J_y |_{i, j+1/2}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_p^2 \Delta t E_y |_{i, j+1/2}^{n+1/2} \quad (13)$$

在第 n 步到 $(n+1/2)$ 步的方程中, 由于式(5)中 E_x , H_z 均是 $(n+1/2)$ 时间步, 故方程(5)不能直接编程计算, 需要将式(6)代入. 化简后可得:

$$E_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} - \left(2 + \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon \mu \Delta x}}{\Delta t} \right)^2 \right) E_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} + E_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} = - \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon \mu \Delta x}}{\Delta t} \right)^2 E_x |_{i+1/2, j}^n + \frac{2\mu \Delta x}{\Delta t} (H_z |_{i+1/2, j+1/2}^n - H_z |_{i-1/2, j+1/2}^n) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right) (E_x |_{i+1/2, j+1}^n - E_x |_{i+1/2, j}^n) + E_x |_{i-1/2, j}^n - E_x |_{i-1/2, j+1}^n + \frac{2\mu (\Delta x)^2}{\Delta t} J_x |_{i+1/2, j}^n \quad (14)$$

随着 i 值的变化, (14)可化为三对角矩阵, 用追赶法求解. 而式(7)为显式, 可以直接计算; (4)、(6)、(8)则可利用(7)和(14)的结果计算。

同样, 在第二分步中, 方程(9)也不能直接编程计算, 将式(11)代入, 可化为三对角矩阵求解:

$$E_x |_{i+1/2, j-1}^{n+1} - \left(2 + \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon \mu \Delta x}}{\Delta t} \right)^2 \right) E_x |_{i+1/2, j-1}^{n+1} + E_x |_{i+1/2, j-1}^{n+1} = - \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon \mu \Delta x}}{\Delta t} \right)^2 E_x |_{i+1/2, j}^{n+1/2} + \frac{2\mu \Delta y}{\Delta t} (H_z |_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2} - H_z |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right) (E_x |_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - E_x |_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2} + E_x |_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2} - E_x |_{i+1/2, j-1}^{n+1/2}) + \frac{2\mu (\Delta x)^2}{\Delta t} J_x |_{i+1/2, j-1}^{n+1/2} \quad (15)$$

而式(13)为显式, 可以直接计算; 其余各式则可利用式(13)和式(15)的结果计算。

2 等离子体 ADI-FDTD 公式的稳定性分析

为了分析上述等离子体 ADI-FDTD 公式的稳定性, 我们定义各场分量的表达式为:

$$E_x = \psi_A \xi_l \exp(j(k_x x + k_y y)) \quad (16a)$$

$$E_y = \psi_B \xi_l \exp(j(k_x x + k_y y)) \quad (16b)$$

$$H_z = \psi_C \xi_l \exp(j(k_x x + k_y y)) \quad (16c)$$

$$J_x = \psi_D \xi_l \exp(j(k_x x + k_y y)) \quad (16d)$$

$$J_y = \psi_E \xi_l \exp(j(k_x x + k_y y)) \quad (16e)$$

式中 ξ_l 为增长因子, $l(l=1, l=2)$ 为上述分步.

为了求第一分步的增长因子,我们将式(11)代入第一分步的差分方程(4)~(8),简化后得下列方程组:

$$\psi_A \xi_1 = \psi_A + j \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sin(k_x \Delta y / 2) \psi_C - \frac{\Delta t}{2\epsilon} \psi_D \xi_1, \quad (17)$$

$$\psi_B \xi_1 = \psi_B - j \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \sin(k_x \Delta x / 2) \psi_C \xi_1 - \frac{\Delta t}{2\epsilon} \psi_E, \quad (18)$$

$$\psi_C \xi_1 = \psi_C + j \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sin(k_x \Delta y / 2) \psi_A - j \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sin(k_x \Delta x / 2) \psi_B \xi_1, \quad (19)$$

$$\psi_D \xi_1 = \psi_D + \epsilon \omega_p^2 \Delta t \psi_A / 2, \quad (20)$$

$$\psi_E \xi_1 = \psi_E + \epsilon \omega_p^2 \Delta t \psi_B \xi_1 / 2, \quad (21)$$

式(17)~(21)中消去 $\psi_A \sim \psi_E$, 可得:

$$p \xi_1^2 + w \xi_1 + q = 0, \quad (22)$$

这里

$$p = 1 + \left(\frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon \mu} \Delta x} \sin(k_x \Delta x / 2) \right)^2, \quad (23)$$

$$q = 1 + \left(\frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon \mu} \Delta y} \sin(k_x \Delta y / 2) \right)^2, \quad (24)$$

$$w = (\Delta t \omega_p / 2)^2 - 2, \quad (25)$$

于是,可以得到第一分步场量的增长因子:

$$\xi_1 = \frac{-w \pm j \sqrt{4pq - w^2}}{2p}, \quad (26)$$

同样,第二分步的增长因子满足下列方程组:

$$\psi_A \xi_2 = \psi_A + j \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sin(k_x \Delta y / 2) \psi_C \xi_2 - \frac{\Delta t}{2\epsilon} \psi_D, \quad (27)$$

$$\psi_B \xi_2 = \psi_B - j \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \sin(k_x \Delta x / 2) \psi_C - \frac{\Delta t}{2\epsilon} \psi_E \xi_2, \quad (28)$$

$$\psi_C \xi_2 = \psi_C + j \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sin(k_x \Delta y / 2) \psi_A \xi_2 - j \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sin(k_x \Delta x / 2) \psi_B, \quad (29)$$

$$\psi_D \xi_2 = \psi_D + \epsilon \omega_p^2 \Delta t \psi_A \xi_2 / 2, \quad (30)$$

$$\psi_E \xi_2 = \psi_E + \epsilon \omega_p^2 \Delta t \psi_B / 2, \quad (31)$$

式(27)~(31)中消去 $\psi_A \sim \psi_E$, 可得:

$$q \xi_2^2 + w \xi_2 + p = 0, \quad (32)$$

可以得到第二分步的场量增长因子:

$$\xi_2 = \frac{-w \pm j \sqrt{4pq - w^2}}{2q}, \quad (33)$$

于是,总的增长因子 ξ 为:

$$|\xi| = |\xi_1| |\xi_2| = \sqrt{\frac{q}{p}} \sqrt{\frac{p}{q}} = 1, \quad (34)$$

显然,从上面的推导可以看出,交替方向隐式技

术将每一时间步的计算分为两个分步,并使两个分步的增长因子相互抵消,从而保持总的因子为 1.

3 计算实例

为上述算法的正确性,计算了无穷大等离子体空间中电磁波的传播.计算空间分为 1000 个网格,计算空间的两端设置 5 个网格的匹配层(PML)以吸收外行电磁波^[10].传统 FDTD 计算时,空间步长为 0.125m,时间步长为 0.208ns,满足 Courant 条件.计算进行了 2500 时间步.ADI-FDTD 计算时,空间步长为 0.125m,时间步长为 1.04ns,为传统 FDTD 的 5 倍.计算只须进行 500 时间步.等离子体角频率为 10MHz,规一化入射平通波电场表示式为:

$$E = \sin^2(2\pi \times 10^7 t) \quad (35)$$

图 1 所示为入射波的波形,图 2 给出第 550 个网格处用传统 FDTD 和 ADI-FDTD 计算的电场值.以上计算在 P4-1.7G 的 PC 机上,传统 FDTD 耗时 5.86 秒;ADI-FDTD 耗时 2.70 秒.

图 2 显示,ADI-FDTD 算法是有效的.在 500ns 时间内,ADI-FDTD 算法与传统 FDTD 算法的计算值基本吻合,但随着时间的增大,ADI-FDTD 算法的计算误差有增大的趋势.因为 ADI-FDTD 算法的时间步长太长,使仿真较粗糙.减小 ADI-FDTD 的时间步长可以减小计算误差.正如引言中所说:ADI-FDTD 方法的时间步长由计算精度决定.

此外,由于 ADI-FDTD 算法消除了 Courant 稳定条件的限制,使得时间步长由计算精度决定.时间步长的选择可以成倍地增加,计算时间也成倍地下降.因而该算法对色散介质(如等离子体)这类比较耗时的电大目标的仿真显得特别有意义.理论上用该算法计算等离子体二维、三维目标电磁特性较传统 FDTD 方法有较大的优势.

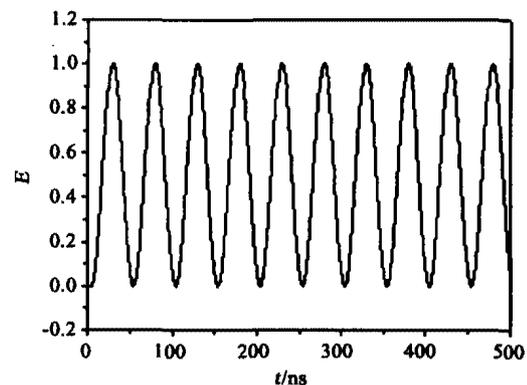


图 1 归一化入射场

Fig. 1 Normalized electric field

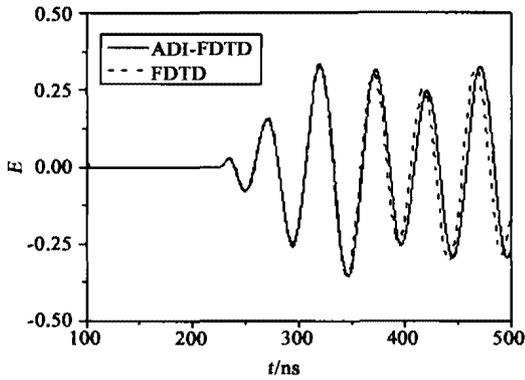


图2 归一化时域电场

Fig.2 Normalized electric field in time domain

4 结语

本文首次把 ADI-FDTD 算法推广到色散介质—无碰撞非磁化等离子体中,给出了等离子体中 ADI-FDTD 方法的差分迭代公式.这种基于交替方向隐式的技术(ADI),使得 FDTD 的时间步长不再受 Courant 稳定条件的限制,而由计算精度决定.时间步长可以成倍增大,提高了计算效率.仿真表明,ADI-FDTD 的计算结果与传统的 FDTD 的计算结果吻合,同时,ADI-FDTD 的计算耗时大约为传统的

FDTD 的一半.

REFERENCES

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. *IEEE Trans. A. P.*, 1966, **14**(3): 302—307.
- [2] Krumpholtz M, Katehi L P B. MRTD: New time-domain schemes based on multiresolution analysis [J]. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1996, **44**(4): 555—571.
- [3] Liu Q H. The pseudospectral time-domain (PSTD) method: A new algorithm for solution of Maxwell's equations [C]. *Proc. IEEE Antennas and Propag. Soc. Int. Symp.*, 1997, **1**: 122—125.
- [4] Kondylis G D, Flaviis F D, Pottie G J, et al. A memory-efficient formulation of the finite-difference time-domain method for the solution of Maxwell's equations [J]. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 2001, **49**(7): 1310—1320.
- [5] Zheng F, Chen Z, Zhang J. A finite-difference time-domain method without the Courant stability conditions [J]. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 1999, **9**(11): 441—443.
- [6] Namiki T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1999, **47**(10): 2003—2007.
- [7] Liu G, Gedney S D. Perfectly matched layer media for an unconditionally stable three-dimensional ADI-FDTD method [J]. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 2000, **10**(7): 261—263.

(上接第 362 页)多次扫描中, E_s' 心的含量超过了 E_s' 心的含量,显现出与单次扫描不同的增长趋势.我们认为这是由多脉冲累积效应引起的.目前关于 E_s' 心的报道不是很多,其结构和来源还不是很清楚,对于上述结果还有待于深入研究.

4 结语

通过实验,我们从物质微观结构变化的角度分析了近红外飞秒激光辐照后纯石英玻璃中色心形成的原因,认为激光辐照过程中焦点区域激光能量沉积引起的微观结构畸变和激子自陷是色心形成的主要原因,与其中的杂质元素和点缺陷结构关系不大.多脉冲辐照中,累积效应对于色心形成有一定影响.

REFERENCES

- [1] Juodkakis S, Watanabe M, Sun Hongbo, et al. Optical induced defects in vitreous silica [J]. *Appl. Surf. Sci.*, 2000, **154**—**155**: 696—700.

- [2] Skuja L. Optical active oxygen-deficiency-related centers in amorphous silicon dioxide [J]. *J. Non-Cryst. Solids*, 1998, **239**: 16—48.
- [3] Griscom D L, Friebele E J. Fundamental radiation-induced defect centers in synthetic fused silicas: Atomic chlorine, delocalized E' centers, and a triplet state [J]. *Phys. Rev. B*, 1986, **34**(11): 7524—7533.
- [4] Tohmon R, Shimogaichi Y, Tsuta Y, et al. Triplet-state defect in high-purity silica glass [J]. *Phys. Rev. B*, 1990, **41**(10): 7258—7260.
- [5] Tsai T E, Griscom D L. Experimental evidence for excitonic mechanism of defect generation in high-purity silica [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**(18): 2517—2520.
- [6] Chan J W, Huser T R, Risbud S H, et al. Waveguide fabrication in phosphate glasses using femtosecond laser pulses [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2003, **82**(15): 2371—2373.
- [7] Mott N F, Stoneham A M. The lifetime of electrons, holes and excitons before self-trapping [J]. *J. Phys. C*, 1977, **10**: 3391—3398.
- [8] Jia Hong-Zhi, Chen Guang-Hui, Hou Zhanjia, et al. UV-visible absorption changes of lead silicate glasses after UV laser irradiation [J]. *J. Non-Cryst. Solids*, 2003, **319**: 322—326.