

# 自适应提升小波变换与图象去噪

王志武 丁国清 颜国正 林良明

(上海交通大学精密仪器及微智能研究所, 上海, 200030)

**摘要** 引入了基于提升法的自适应离散小波变换, 根据 LMS 自适应法确定伯恩斯坦预测算子的权重系数, 使其自适应匹配特定的数据序列, 而且应用该方法结合软域值可实现信号去噪, 最后扩展该方法应用于二维图象的去噪, 数值实验表明自适应提升小波变换有效地实现了图象的去噪而且保持了图象的边缘和纹理特性, 提升法的优点在于其设计上的灵活性和计算简便.

**关键词** 小波变换, 提升法, 图象去噪, 自适应, 图像处理.

## ADAPTIVE LIFTING WAVELET TRANSFORM AND IMAGE DENOISE \*

WANG Zhi-Wu DING Guo-Qing YAN Guo-Zheng LIN Liang-Ming

(Institute of Precision Engineering and Intelligent Microsystem,  
Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030 China)

**Abstract** Adaptive discrete wavelet transform based on the lifting scheme was introduced. The weighed coefficient of Bernstein filter predictor was determined to match adaptively with a desired signal by LMS criteria. The algorithm can be applied to signal denoise by the soft threshold of wavelet. Finally this method was extended to denosing of two dimension images. The numerical experiment shows that the method is a powerful method for denoising image. It can keep the character of edge and texture of the image. The advantages of lifting scheme lie in its flexible design and simple comput.

**Key words** wavelet transform, lifting scheme, image denoise, adaptive, image processing.

### 引言

小波变换在许多领域如信号和图像处理中得到了广泛的应用, Sweldens [1, 2] 提出了基于提升法小波变换, 也称为第二代小波变换. 提升法是一种柔性的小波构造方法, 它可使用线性、非线性或空间变化的预测和更新算子, 而且可确保变换的可逆性. 提升法小波变换同传统小波变换相比, 计算速度更快, 计算方法更简单, 而且适合于自适应、非线性、非奇异采样和整数到整数的变换. 基于提升法自适应小波变换 [3 ~ 5] 是提升小波变换重要研究内容之一, 它适合于处理不规则数据采样, 通过预测算子或更新算子的设计最优匹配特定的信号. 特别是, 实际中信号常常是非平稳的时变信号, 因为单个滤波器不可能很好的预测信号次数比滤波器

次数高的信号; 而且对于突变信号难以提前预测, 经常是面对的是采样点数不足, 在此情况下不可能完全实现多项式重构, 因此可以用自适应方法来俘获短时变化的信号. 信号去噪是信号处理的重要内容, 小波去噪是由 Donoho 和 Jonstone [6] 所提出的, 已经证明了它是十分有效的信号去噪法.

文章探讨了基于提升法的小波变换, 根据 LMS 自适应法设计伯恩斯坦滤波器预测算子, 最后推广该方法于二维信号处理, 应用于图像去噪, 而且讨论了该算法的去噪性能.

### 1 快速提升法小波变换

快速提升法小波变换是由 Sweldens 所建立的空间域构造双正交小波方法, 快速提升法如图 1 所示. 提升小波分解(正变换)由两步构成.

\* 国家 863 高科技(批准号 9221-01)资助项目  
稿件收到日期 2001-09-29, 修改稿收到日期 2002-08-01

\* The project supported by the National High Technology 863 program  
(No. 9921-01)  
Received 2001-09-29, revised 2002-08-01

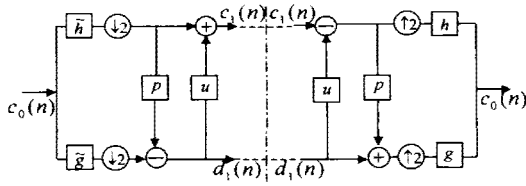


图1 快速提升法小波变换

Fig. 1 Lifting scheme wavelet transform

第一步:

$$\bar{c}_{j+1}(n) = \sqrt{2} \sum_k \bar{h}(k-2n) c_j(k), \quad (1)$$

$$\bar{d}_{j+1}(n) = \sqrt{2} \sum_k \bar{g}(k-2n) c_j(k), \quad (2)$$

第二步:

$$d_{j+1}(n) = \bar{d}_{j+1}(n) - \sum_k p(n-k) \bar{c}_{j+1}(k), \quad (3)$$

$$c_{j+1}(n) = \bar{c}_{j+1}(n) - \sum_k u(n-k) d_{j+1}(k), \quad (4)$$

提升小波分解由两步构成, 第一步计算未提升小波系数, 对应于双正交小波的分解, 第二步计算提升系数, 重复以上两个过程构成一个完整的离散小波变换。

如图1所示快速提升法求逆(逆变换)也是由两步构成。

第一步:

$$\bar{c}_{j+1}(n) = c_{j+1}(n) - \sum_k u(n-k) d_{j+1}(k), \quad (5)$$

$$\bar{d}_{j+1}(n) = d_{j+1}(n) + \sum_k p(n-k) \bar{c}_{j+1}(k), \quad (6)$$

第二步:

$$c_j(k) = \sqrt{2} \sum_n h(k-2n) \bar{c}_{j+1}(n) + \sqrt{2} \sum_n g(k-2n) \bar{d}_{j+1}(n), \quad (7)$$

以上各式中,  $\bar{h}$ 、 $\bar{g}$ 和 $g$ 对应于双正交小波变换的双正交滤波器组,  $c_j(n)$ 和 $d_j(n)$ 分别是尺度系数和小波系数,  $p$ 和 $u$ 分别是预测和更新滤波器, 它们甚至可以是非线性或空间变化函数.  $u$ 主要是建立小波的消失矩数, 如果在分解阶段已建立了小波的消失矩, 更新阶段可以被取消, 因此讨论自适应预测滤波器 $p$ 的设计。

## 2 自适应提升法

### 3.1 基于伯恩斯坦滤波器预测算子设计

式(3)可化为

$$d_{j+1}(n) = \bar{d}_{j+1}(n) - \sum_{k=0}^{N-1} \bar{c}_{j+1}(n - M_d - k) p(k),$$

(8)

其中 $N$ 是滤波器的长度,  $M_d$ 是常数. 当 $N=1$ ,  $M_d=0$ ;  $N \geq 2$ ,  $0 \leq M_d \leq N-2$ .

以下根据伯恩斯坦(Bernstein)滤波器来确定 $p(n)$ .  $n$ 次伯恩斯坦多项式定义为

$$b_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad (9)$$

其中 $i=0, 1, \dots, n$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 二项式的系数 $\binom{n}{i} =$

$\frac{n!}{i!(n-i)!}$ . 伯恩斯坦多项式有下面的特性:  $b_0^n(0) = 1$ ,  $b_n^n(1) = 1$  和  $\sum_{i=0}^n 0 b_i^n(t) = 1$ . 有 $n+1$ 个等间隔的采样值 $\mu_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , 在区间 $[0, 1]$ 中, 基于伯恩斯坦多项式的 $n$ 次近似 $B_n(t)$ 定义为

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n u_i b_i^n(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (10)$$

设计滤波器其加权系数 $\mu_i = \alpha_i$ ,  $0 \leq i \leq N-1$ , 如果 $t = \sin^2(\omega/2)$ , 函数 $B_N-1(t)$ 可以转换为 $P(e^{j\omega})$ , 在 $z$ 域中 $P(e^{j\omega})$ 可以转换变换 $P(z)$ , 得

$$P(z) = \frac{z^N - 1}{2^{2N-2}} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \alpha_i \binom{N-1}{i} (1+z^{-1})^{N-1-i} (1-z^{-1})^i, \quad (11)$$

方程(7)展开后化为

$$P(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \left( \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2^{2N-2}} \binom{N-1}{i} \right\} \left[ \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \binom{2N-1-i}{k-j} \binom{i}{j} \right] z^{N-1-k} \right) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i B_i^N(z), \quad (12)$$

其中滤波器 $B_i^N(z)$ 是伯恩斯坦滤波器, 由式(8)知, 通过参数 $\alpha_i$ 调节可以控制 $P(e^{j\omega})$ 频率响应, 由此设计自适应提升小波变换。

如果 $P(n) = \delta(n)$ ,  $P = (P[0], P[1], \dots, P[N-1])^T$ , 则式(8)可以写为

$$P = F \bar{\alpha}, \quad (13)$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} \omega_{0,0} & \omega_{0,1} & \cdots & \omega_{0,N-1} \\ \omega_{1,0} & \omega_{1,1} & \cdots & \omega_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1,0} & \omega_{N-1,1} & \cdots & \omega_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

$\omega_{k,j} =$

$$\frac{1}{2^{2N-2}} \binom{N-1}{i} \left[ \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \binom{2N-1-i}{k-j} \binom{i}{j} \right], \quad (14)$$

矢量  $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})^T$  是由设计参数  $\alpha_i, i = 0 \sim N-1$  构成。

### 3.2 自适应提升法

本节讨论 LMS 自适应法确定伯恩斯坦滤波器的设计参数  $\alpha_i$ , 根据最小均方误差原则, 在所有分辨率层使其预测误差最小. 定义预测误差信号

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(n) &= \bar{d}_j(n) - \sum_{k=0}^{N-1} \bar{c}_j(n - M_d - k) p(k) \\ &= \bar{d}_j(n) - X_j^T P \\ &= \bar{d}_j(n) - X_j^T F \bar{\alpha} \\ &= d_j(n) - \bar{X}_j^T \bar{\alpha}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $X_j^T = [\bar{c}_j(n - M_d), \dots, \bar{c}_j(n - M_d + N - 1)]^T, \bar{X}_j^T = X_j^T F$ . 式(15)两边取均方误差的数学期望得

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon_j^2(n)\} &= E\{\bar{d}_j^2(n)\} - 2E\{\bar{d}_j(n)\bar{X}_j^T(n)\bar{\alpha}\} \\ &+ \bar{\alpha}^T E\{\bar{X}_j(n)\bar{X}_j^T(n)\}\bar{\alpha}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中相关函数行向量  $R_{\bar{d}\bar{X}}^T = E\{\bar{d}_j(n)\bar{X}_j^T(n)\}$ , 自相关函数矩阵  $R_{\bar{X}\bar{X}} = E\{\bar{X}_j(n)\bar{X}_j^T(n)\}$ , 则均方误差方程式(16)化为

$$E\{\varepsilon_j^2(n)\} = E\{\bar{d}_j^2(n)\} - 2R_{\bar{d}\bar{X}}^T \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^T R_{\bar{X}\bar{X}} \bar{\alpha}, \quad (17)$$

式(17)表明, 均方误差是权系数向量  $\bar{\alpha}$  的二次函数, 调节权系数  $\bar{\alpha}$  使均方误差为最小, 可以用梯度法求该最小值. 将式(17)对权系数  $\bar{\alpha}$  求导数, 得到均方误差函数的梯度

$$\nabla n = \nabla E\{\varepsilon_j^2(n)\} = -2R_{\bar{d}\bar{X}}^T + 2R_{\bar{X}\bar{X}} \bar{\alpha}, \quad (18)$$

令  $(\nabla n) = 0$ , 即可求出最佳权系数向量

$$\bar{\alpha}_{\text{opt}} = R_{\bar{X}\bar{X}}^{-1} R_{\bar{d}\bar{X}}^T, \quad (19)$$

将  $\bar{\alpha}_{\text{opt}}$  代入式(17)得最小均方误差

$$E\{\varepsilon_j^2(n)\}_{\text{min}} = E\{\bar{d}_j^2(n)\} - R_{\bar{d}\bar{X}}^T \bar{\alpha}_{\text{opt}}, \quad (20)$$

求最佳的权系数向量的精确解需要知道  $R_{\bar{X}\bar{X}}$  和  $R_{\bar{d}\bar{X}}$  的先验统计知识, 该文根据 Widrow 和 Hoff 提出得在先验知识未知时求  $\bar{\alpha}_{\text{opt}}$  的近似值方法, 习惯称之为 Widrow - Hoff LMS 算法. 另外, 应根据信号特点在不同尺度或同一尺度不同区域由自适应法选择最优参数  $\bar{\alpha}_{\text{opt}}$ , 确定最优的预测算子。

### 3 图像去噪和数值实验

离散信号的小波去噪可分为三步: 小波分解, 小波系数缩减, 缩减小波系数的合成. 含噪  $c_j$  的估计为  $\hat{c}_j$ , 它满足二次代价函数最小, 即满足最小的均方估计  $R(\hat{c}_j, c_j) = E(\hat{c}_j - c_j)^2$ . Donoho 和 Johnstone 提

出两种小波域值法即硬域值和软域值法解决此问题, 软域值法的方程如下

$$\begin{aligned} d_\tau(n) &= \text{sign}(d(n)) (|d(n) - \tau|)_+ \\ &= \begin{cases} 0, & |x| \leq \tau \\ d(n) - \tau & x > \tau \\ d(n) + \tau & x < -\tau, \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tau = \bar{\sigma} \sqrt{2 \log_e^{(N)}}. \quad (22)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{0.6745} \text{Med}(|d|), \quad (23)$$

其中  $\tau$  指的是计算域值,  $\bar{\sigma}$  是噪声的标准偏差估计,  $N$  表示细节信号的采样数和  $\text{Med}(\cdot)$  指的是中值函数. 应用自适应法去噪, 在每一层  $c_{j-1}(n)$  信号分解为新的近似尺度系数  $c_{j-1}(n)$  和细节系数  $d_{j-1}(n)$ , 根据式(21)削减小波系数, 实现信号去噪。

可直接扩展以上算法到二维情况, 应用于图像的去噪. 所有的测试图像附加有高斯白噪声, 分解为 LL, LH, HL 和 HH 子图像 (L - 低通, H - 高能) 用基于提升法的滤波器组, 取预测滤波器的偶次长度 ( $M_d = N/2 - 1$ ), 在一定的分解层上, 根据细节的 HH 子图像归一化的能量是最小, 选择最好的分解, 用软域值法对所有的 HH 细节中实现图像的去噪. 用峰值信噪比说明去噪方法的去噪性能, 峰值信噪比定义为

$$\text{PSNR} = 20 \log \left( \frac{\max(x_i)}{\sqrt{\sum (x_i - \hat{x}_j)^2 / N}} \right)$$

其中  $x_i$  是原图像的第  $i$  像素,  $\hat{x}_j$  是去噪图像的第  $j$  个像素,  $N$  是总的像素的个数。

为了验证本文的算法, 对大小为  $512 \times 512$  像素, 8bit 含噪量化 Lena 图像进行了去噪实验, 含噪图像的 PSNR 为 20dB, 如图 2 所示, 经自适应提示法小波

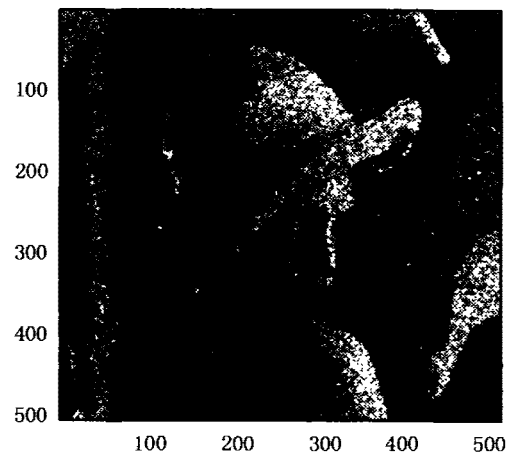


图2 含噪 Lena 图像  
Fig.2 Lena image before denoise

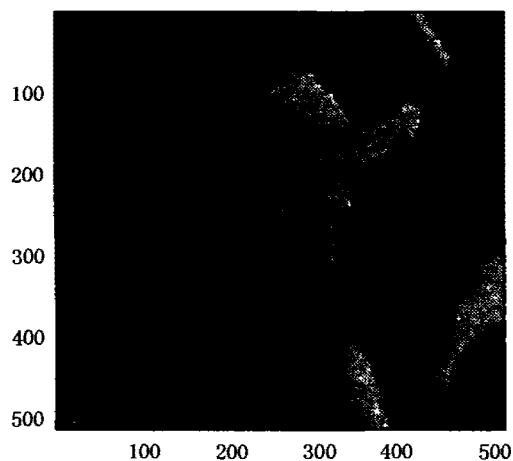


图3 含噪后 Lena 图像  
Fig.3 Lena image after denoise

变换去噪后图像的 PSNR 为 29.7dB, 如图 3 所示.

## 5 结论

文章讨论了基于提升法自适应离散小波变换, 首先确定伯恩斯坦预测算子的次数, 然后根据 LMS 自适应确定预测算子的权系数, 提升方法的优点在于其设计上的灵活性和计算简单, 易于实现自适应和非线性变换. 这种新的自适应离散小波变换很容

易扩展到高维信号处理, 如二维图像处理. 数值实验显示, 应用这种方法于图像的去噪, 提升自适应法不仅提高了图像的 PSNR 的性能, 而且保持了图像的边缘和纹理特性, 该方法也可应用于信号处理的其它方面, 如数据压缩、信号检测和分类等.

## REFERENCES

- [1] Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Journal of Applied and Comput. Harmonic Analysis*, 1996, **3**(2): 186 — 200
- [2] Sweldens W. The lifting scheme: A construction of second generation wavelet. *SIAM J. Math. Anal.*, 1998, **29**: 511 — 546
- [3] Claypoole R L, Baraniuk R G, Nowark R D. Adaptive wavelet transform via lifting scheme. *Proc. IEEE Conf. On Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1999
- [4] Stepien J, Zielinski T, Rumian R. Image Denoising for Adaptive lifting Scheme. *Proc. European Signal Processing Conference EUSIPCO - 2000*, Finland: Tampere, 2000
- [5] Ho W J, Chang W T. Adaptive predictor based on maximally flat halfband filter in lifting scheme. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(11): 2965 — 2977
- [6] Donoho D L. De-noising by soft thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, **41**(3): 613 — 627