

8355-360

基于光电混合结构的实时 分数相关方法*

韩利¹⁾ 王琪¹⁾ 刘树田²⁾ 李润顺¹⁾ 朱帮和²⁾

¹⁾哈尔滨工业大学航天电子与光电工程系,黑龙江,哈尔滨,150001;

²⁾哈尔滨工业大学应用物理系,黑龙江,哈尔滨,150001)

TIV 203

摘要 对分数相关级次对输出面能量分布的影响进行了理论分析,并通过对 Zalevsky 等所提出的实时结构的考察,讨论了分数傅里叶变换(fractional Fourier transform, FRT)分立光学元件实现特点,按照分数相关优化原则,提出了一种实用化的光电混合 FRT 结构,并通过数值方法对此系统特性进行了研究,结果表明:与传统相关比较, FRT 提高了相关器的模式识别性能。

关键词 光学相关,分立光学元件结构,光电混合结构,分数傅里叶变换,模式识别。

THE REAL-TIME FRACTIONAL CORRELATION BASED ON OPTO-ELECTRONIC HYBRID CONFIGURATION*

HAN Li¹⁾ WANG Qi¹⁾ LIU Shu-Tian²⁾ LI Run-Shun¹⁾ ZHU Bang-He²⁾

¹⁾ Department of Astronautic-Electronic and Opto-Electronic Engineering,
Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China;

²⁾ Department of Applied Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract The impact of the orders of fractional correlation on the energy distribution on the output plane was analyzed theoretically, and then the characteristic of the bulk-optical implementation of FRT was discussed deeply through re-examining a real-time configuration proposed by Zalevsky *et al.* According to correlation-sharpness criteria, a practical implementation of FRT was proposed based on opto-electronic hybrid configuration and its performance was studied by numerical method. Results show that the FRT improves the correlator performance for pattern recognition indeed as compared with the conventional correlation.

Key words optical correlation, bulk-optical implementation, opto-electronic hybrid configuration, fractional Fourier transform, pattern recognition.

引言

分数傅里叶变换(fractional Fourier transform, FRT)由 Namias 于 1980 年作为一种求解薛定谔方程的工具引入量子力学^[1],随后,McBride 和 Kerr 对其数学性质做了进一步的研究^[2],但直到 1993 年, Mendlovic 和 Ozaktas 根据光波场在梯度折射率介质(graded-index medium, GRIN)中传播的自聚焦效应,以级数定义形式重新将其引入光学领域^[3]才引起光学界的广泛关注,与此同时, Lohmann

基于 Wigner 相空间分析方法得到了 FRT 的积分定义形式,并给出了两种分立光学元件实现结构^[4],由此,人们对 FRT 性质^[5-6]及其在数字滤波^[7]、光信息处理^[8-14]和自由空间传播^[15]等领域的应用进行了广泛的研究,作为傅里叶变换的一种广义形式,利用其分数级次的级联, FRT 可形成多级、多通道的信息处理结构^[7,9],从而为信息处理方法提供了更为广泛的实现途径。

一般说来,对于光信息的处理,如滤波、特征提取、谱分析和测量,利用分立光学元件而非 GRIN

* 教育部基金和国家自然科学基金(编号 69577006)资助项目
稿件收到日期 2000-03-14,修改稿收到日期 2000-06-27

* The project supported by the Foundation of Education Ministry of China and by the National Natural Science Foundation of China (No. 69577006)

Received 2000-03-14, revised 2000-06-27

元件的实现装置要更为便捷、优越^[15~16]. 因此,对 FRT 的应用基础——光学实现结构的研究也成为分数傅里叶变换领域的重要研究方向之一^[3,5,17~21]. FRT 的分立光学元件实现结构首次由 Lohmann 提出^[4],但此结构的弱点也很快暴露出来^[17~18],即对此结构的分数级次进行调节时,需相应地更换结构元件来改变结构参数. 因此,寻求更为方便、灵活的实现结构成为人们关注的焦点^[17~21].

本文首先从理论上分析了 FRT 通过其分数级次对相关输出面能量分布的优化^[22]来提高相关器性能的可能性,讨论了分数傅里叶变换滤波处理装置实时化的特点,对 FRT 的一种实时结构^[21]的不合理性进行了理论分析,根据 FRT 滤波处理特点,提出一种光电混合处理结构,并采用指纹模式对此系统进行数据模拟,结果表明:当分数级次满足优化条件时,获得了优于传统相关器的处理结果.

1 分数相关的理论描述

如果设输入信号为 $u(x)$,则可分离变量的分数傅里叶变换积分形式为^[4]

$$FRT^p[u(x_0)] = u_p(x) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan\phi} (x_0^2 + x^2)\right] \exp\left[\frac{-2\pi i}{\lambda f_1 \sin\phi} x x_0\right] dx_0 \quad (1)$$

其中 $\phi = p\pi/2$, p 是分数傅里叶变换的分数级次, λ 是入射光的波长, f_1 具有长度单位的标准参数, C_1 是归一化常数,有

$$C_1 = \frac{\exp\left\{-i\left[\frac{\pi \operatorname{sgn}(\sin\phi)}{4} - \frac{\phi}{2}\right]\right\}}{|\sin\phi|^{1/2}} \quad (2)$$

分数傅里叶变换应同时满足边界条件和叠加性:边界条件为 $FRT^0 = I$, $FRT^1 = FT$; 叠加性为 $FRT^\alpha FRT^\beta = FRT^\beta FRT^\alpha = FRT^{\alpha+\beta}$. 这里, FT 和 FRT 分别是傅里叶变换和分数傅里叶变换算子. 对 FRT 其它性质的讨论可参看文献^[1~6]以及所引相关文献,由此可知, FRT 实际上代表了一个变换类,其中的各个子变换由实值参数 p 来表征. 当 $p=0$ 和 $p=1$ 时,式(1)分别为 0 级分数傅里叶变换-恒等变换 I 和一级分数傅里叶变换-传统傅里叶变换 FT ,由此可以得到输入信息 $u(x)$ 和其傅里叶谱 $U(v)$. 因此, FRT 又被认为是双域(空间域-空间频率域)信息联合表示^[5~6,18,21].

对于相关运算,如果设输入的物信号和参考信

号分别为 $g(x)$ 和 $f(x)$,那么基于傅里叶变换的传统相关定义为:物信号的傅里叶谱 $G(v)$ 乘以参考信号傅里叶谱的共轭 $F^*(v)$, 然后进行乘积的逆傅里叶变换. 即

$$V_{FRT}(x) = \int g(x_0) f^*(x_0 - x) dx_0 = \int G(v) F^*(v) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda f_1} vx\right] dv \quad (3)$$

分数相关可以以相似的方式定义:对物信号和参考信号分别进行 p_1 、 p_2 级次的分数傅里叶变换,然后对其乘积进行 p_3 级次分数傅里叶变换^[10](如图 1 所示),即

$$V_{FRT}(x) = FRT^{p_3}\{FRT^{p_1}[g(x)] FRT^{p_2}[f(x)]\} \quad (4)$$

这样,分数相关的能量输出就由 3 个参数 p_1 、 p_2 和 p_3 来控制,从而可实现对相关输出面能量分布进行优化^[22]. 根据式(1),输出相关场 $V(x)_{FRT}$ 可表示为

$$V(x)_{FRT} = \iiint g(x_1) f(x_2) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda f_1} \left[\frac{(x_1^2 + y^2)}{\tan\phi_1} + \frac{(x_2^2 + y^2)}{\tan\phi_2} + \frac{(x^2 + y^2)}{\tan\phi_3}\right]\right\} \times \exp\left[\frac{-2i\pi y}{\lambda f_1} \left(\frac{x_1}{\sin\phi_1} + \frac{x_2}{\sin\phi_2} + \frac{x}{\sin\phi_3}\right)\right] dy dx_2 dx_1 \quad (5)$$

其中 $\phi_n = p_n \pi/2$, $n=1, 2, 3$. 由上可知,当 $\phi_1 = -\phi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_3 = -\frac{\pi}{2}$ (或 $p_1 = -p_2 = 1$, $p_3 = -1$) 时,对应式(5)的分数相关器就是传统相关器^[16].

为了优化输出峰,需要舍去表达式中关于 y 的二次位相因子^[12]. 令

$$\frac{1}{\tan\phi_1} + \frac{1}{\tan\phi_2} + \frac{1}{\tan\phi_3} = 0, \quad (\phi_n = p_n \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, 3) \quad (6)$$

由于一般接收器只对功率响应,对输出的分数相关

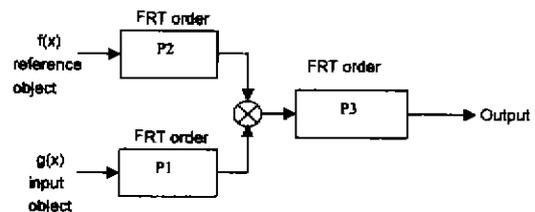


图 1 分数级次为 p_1 、 p_2 和 p_3 的分数相关示意图:输入物 $g(x)$ 和参考物 $f(x)$

Fig. 1 Schematic of fractional correlation with the orders p_1 , p_2 and p_3 ; the input object $g(x)$ and the reference object $f(x)$

场取模,并舍去常数因子,则

$$|V(x)_{FRT}| = \left| \int g(x_1) f \left\{ -x_1 \frac{\sin \phi_2}{\sin \phi_1} - x \frac{\sin \phi_2}{\sin \phi_3} \right\} \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda f_1} \left[\frac{\sin(\phi_1 + \phi_2)}{\sin^2 \phi_1} \right] x_1^2 + \frac{\sin 2\phi_2}{\sin \phi_1 \sin \phi_2} x x_1 \right\} dx_1 \right|. \quad (7)$$

这里取满足条件(6)的一种特例

$$\begin{aligned} \rho_1 = -\rho_3 = \rho, \quad \rho_2 = -1, \\ (\text{或 } \phi_1 = -\phi_3 = \phi, \phi_2 = -\pi/2) \end{aligned} \quad (8)$$

进行讨论,我们看出,此时的参考模式就是传统相关的匹配滤波器,这将极大地方便分数相关器的光学实现.此时,相关输出面上的场分布为

$$|V(x)_{FRT}| = \left| \int g(x_1) f \left[\frac{1}{\sin \phi_s} (x_1 - x) \right] \exp \left[\frac{-i\pi x_1^2}{\lambda f_1} \left(\frac{\cos \phi_s}{\sin \phi_s} \right) \right] dx_1 \right|. \quad (9)$$

可以看出,当 $\phi_s = \pi/2$ 时,有

$$\begin{aligned} |V(x)_{FRT}| &= \left| \int g(x_1) f(x_1 - x) dx_1 \right| \\ &= |V(x)_{FRT}|. \end{aligned} \quad (10)$$

即为传统不变相关输出表达式(3).

比较式(3)和(9)可知,与传统相关不同,分数相关的输出能量分布是其分数级次函数随着分数级次的不同而发生变化.同时,分数傅里叶变换是双域变换,包含着空域和频域信息,它们对信号模式识别的响应是不同的,其综合响应由分数级次来表征.因此,可利用双域信息的综合作用效果改善相关器模式识别性能.

2 分立光学元件实现结构

目前,用于光学模式识别的方法主要有光学相关和光学神经网络两类.与神经网络方法相比,光学相关方法的结构简单,不需要很长的训练时间,易实现微型化、实时化^[23],因而成为实现光学模式识别的一种重要方法.理论上,进行传统傅里叶变换的实时相关处理,需考虑在更换输入模式时,滤波函数重新计算问题^[16,23].当相关运算扩展到分数级次时,实时处理结构则需要考虑两个因素^[21]:一个是分数级次可调;另一个是当改变分数级次、更换输入模式时,滤波函数不需要重新计算.但是,由于分数相关的定义式中包含着二次项因子,为实现精确的运算,输入物体和参考物体需进行位相调制.因此,同时满足以上两个条件的分数相关实时装置很难实现.在对下面的实时结构所进行的分析中,我们能更清楚地看到这一点.

在各种光学分数相关的实现结构中,Zalevsky等^[21]提出的实时方法(见图2(a))最具吸引力,但是,文中并没有充分讨论分数级次的实时调节对结构性能的影响.为考察FRT实时处理的特点,我们将重新推导此结构中平面D(v)上相关输出的积分表达式.这里,透镜f和自由空间L的非涅尔衍射位相函数分别为 $\exp\left(\frac{-i\pi x^2}{\lambda f}\right)$ 和 $\exp\left[\frac{i\pi(x-v)^2}{\lambda L}\right]$.

根据文献[21]的数学推导,引入变量Z(u),并与关系式(1)比较,可以得到输入函数g(x)的尺度化分数傅里叶变换为

$$\exp\left[\frac{i\pi(1-a)u^2}{\lambda a(1-2a+2a^2)f}\right] Z(u) =$$

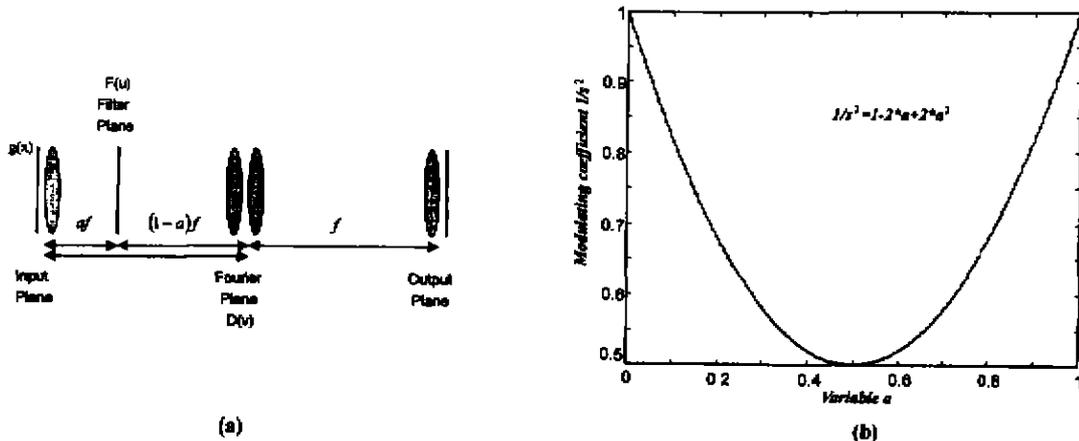


图2 (a) 文献[21]所提滤波系统, (b) 调制系数 $1/s^2$ 相对于变量 a 的变化曲线
Fig. 2 (a) Suggested optical filtering system in Ref. [21],
(b) curve of the modulating coefficient $1/s^2$ versus variable a

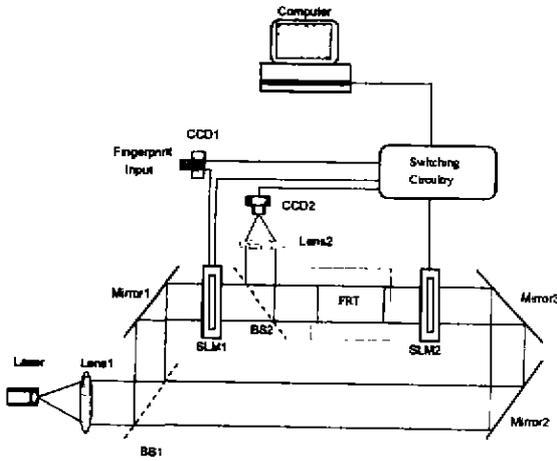


图3 基于光电混合结构的实时FRT滤波系统
Fig.3 Real-time FRT filtering architecture based on electro-optical hybrid configuration

$$C \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp \left\{ \frac{i\pi(1-a)}{\lambda af} \left[x^2 + \left(\frac{u}{\sqrt{1-2a+2a^2}} \right)^2 \right] \right\} \left(\frac{-2\pi i x u}{\lambda af} \right) dx = FRT^{p_1} [g(x)] = G_{p_1}(su). \quad (11)$$

这里引用了变量代换 $x = su$, 其中 $s = 1/\sqrt{1-2a+2a^2}$, $\tan\phi_1 = a/(1-a)$, $\sin\phi_1 = as = a/\sqrt{1-2a+2a^2}$, $\phi_1 = p_1\pi/2$.

如同文献[21]的处理, 令 $L = a/(1-a)(1-2a+2a^2)$, 利用透镜 f 和自由空间 L 的非涅尔衍射位相函数, 在傅里叶变换平面 $D(v)$ 上的复振幅分布可表述为

$$\begin{aligned} D(v) &= C' \exp \left[\frac{i\pi av^2}{\lambda(1-a)f} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F(u) G_{p_1}(su) \exp \left(\frac{i\pi Lu^2}{\lambda f} \right) \exp \left[-2\pi i \frac{uv}{\lambda(1-a)f} \right] du \\ &= C'' \exp \left[\frac{i\pi av^2}{\lambda(1-a)f} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F(u) G_{p_1}(su) \exp \left(\frac{i\pi(su)^2}{\lambda f((1-a)/a)} \right) \exp \left[-2\pi i \frac{(su)v}{\lambda s(1-a)f} \right] \left(\frac{1}{s} \right) d(su) \\ &= \frac{C''}{s} \exp \left[\frac{i\pi av^2}{\lambda(1-a)f} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F(u) G_{p_1}(su) \exp \left(\frac{i\pi(su)^2}{\lambda f((1-a)/a)} \right) \exp \left[-2\pi i \frac{(su)v}{\lambda s(1-a)f} \right] d(su) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C''}{s} \exp \left[\frac{i\pi av^2}{\lambda(1-a)f} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F \left(\frac{u'}{s} \right) G_{p_1}(u') \exp \left(\frac{i\pi u'^2}{\lambda f \tan^2 \phi_2} \right) \exp \left[-2\pi i \frac{u'v}{\lambda f \sin \phi_2} \right] du'. \quad (12) \end{aligned}$$

其中 $u' = su$, $\tan\phi_2 = (1-a)/a \sin\phi_1 = s(1-a)$, $\phi_2 = p_2\pi/2$. 这样又得到了 $F(u/s)$ 和 $G_{p_1}(u)$ 乘积的分数傅里叶变换

$$D(v) = \frac{C''}{s} \exp \left[\frac{i\pi av^2}{\lambda(1-a)f} \right] FRT^{p_2} \left[\left(\frac{u'}{s} \right) G_{p_1}(u') \right]. \quad (13)$$

与文献[21]中的表达式(11)比较, 可以发现, 在文献[21]中忽略了积分表达式前的系数 $1/s$. 这里, 系数 s 强烈地影响着相关输出的幅值, 因此不能象二次指数位相因子一样省略. 取上式的模方, 即

$$|D(v)|_2 \propto \frac{1}{s^2} FRT^{p_2} \left[F \left(\frac{u'}{s} \right) G_{p_1}(u') \right], \quad (14)$$

$$\text{这里} \quad \frac{1}{s^2} = 2a^2 - 2a + 1 \quad (15)$$

是变量 a 的二次函数(见图2(b)). 由图中曲线可知, 此系数对相关输出的能量起到强烈地衰减作用, 尤其在 $p=0.5(a=0.5)$ 附近, 因此利用此装置进行信息处理是不合适的. 另一方面, 由于

$$F \left(\frac{u}{s} \right) = FT[f(sx)] = FRT^1[f(sx)], \quad (16)$$

当输入函数 $f(x)$ 按 $f(x/s)$ 进行编码, 式(13)是 $F(u)$ 和 $G_{p_1}(u)$ 乘积准确的分数傅里叶变换. 然而, 当调节滤波器轴向位置以改变 a 来控制系统的部分空变量时, 系数 s 以及滤波函数 $f(x/s)$ 也都是变量. 因此, 当滤波器取不同的轴向位置时, 滤波函数均需相应地重新计算. 显然, 此结构并不能通过改变滤波器的轴向位置来实时实现光学分数相关.



图4 用于(a)参考物和(b)输入物的二值化指纹图像

Fig.4 Binarized fingerprint imagery used for (a) the reference object and (b) the input object

实际上,利用分数相关结构进行模式识别时,并不需要对整个分数级范围进行考察,往往采用单个优化级次即可达到改善相关器目标识别性能的目的^[11~14,24]。因此,在应用分数相关结构对信号进行实时化处理时,并不需实时调节分数级次,只要能方便地调节实现装置的结构参数,即可满足其在信号处理应用中的需要。我们采用光电混合结构来实现满足分数级次优化条件(8)的相关装置(图3),这样既结合了纯光学系统的高运算速度、高并行性的特点,又利用了电子系统所具有的精确性、可控性和可编程性的优点。整个系统采用两个空间光调制器(SLM)分别作为输入信号和参考信号的实时输入器件。根据优化条件(8),FRT系统可同时用来实现 p_1 和 p_2 级次的处理过程($p_1 = -p_2$),这里FRT采用文献[18]所提出的实现结构,输出的相关结果在监视器上进行观察。在进行光学分数傅里叶变换时,需要注意其中的尺度问题。不难理解,在此装置中,参考模式只需按与FRT系统(文献[18])相同的结构参数来制备即可满足级联条件^[25]。

3 数值模拟与讨论

我们用二维分数傅里叶变换算法^[26]对此系统的识别过程进行数值模拟。为简单起见,对于可分离变量的FRT定义^[4],设沿着 x 轴和 y 轴的分数级次以相同的速率同时变化。输入信号采用如图4(a)和(b)所示的二值化指纹图像,其大小均为 256×256 像素。为使比较结果更直观,输出面的强度被归一化处理。

对于传统相关器,我们取式(9)中 $\phi_s = \pi/2$ (或 $p_s = 1$),相关输出的三维振幅分布曲线和相关峰强度像分别于图5(a)和(b)中给出,可以看出传统相关峰弥散于一个较大的区域内。对于分数相关,我们取分数级次为 $p = 0.9$ 。对应于图5的表示,分数相关的输出结果分别见图6(a)和(b)。与传统相关相比,分数相关得到了锐化的相关峰。表明分数相关使相关面能量重新进行分布,可以得到更窄的相关光斑,提高了相关器的识别精度。这一结论与以往的研究结果一致^[11~12,31]。

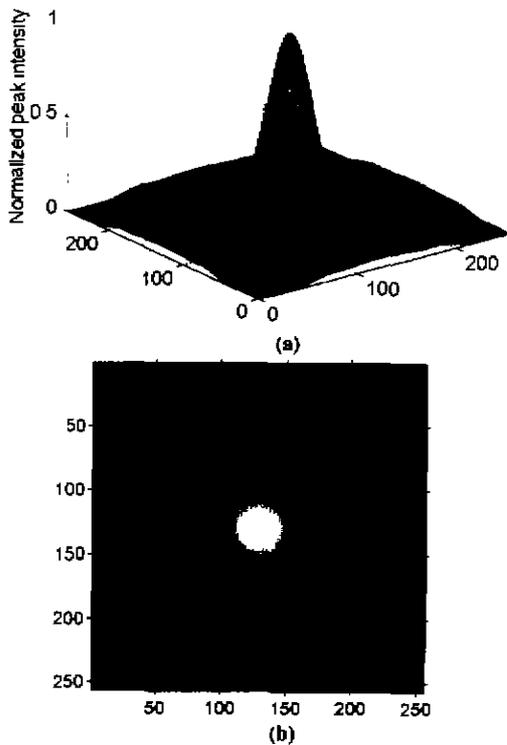


图5 (a)传统相关峰三维振幅分布曲线和(b)强度像

Fig. 5 (a) Conventional correlation peak plotted using a 3-D plotting routine and (b) its intensity image

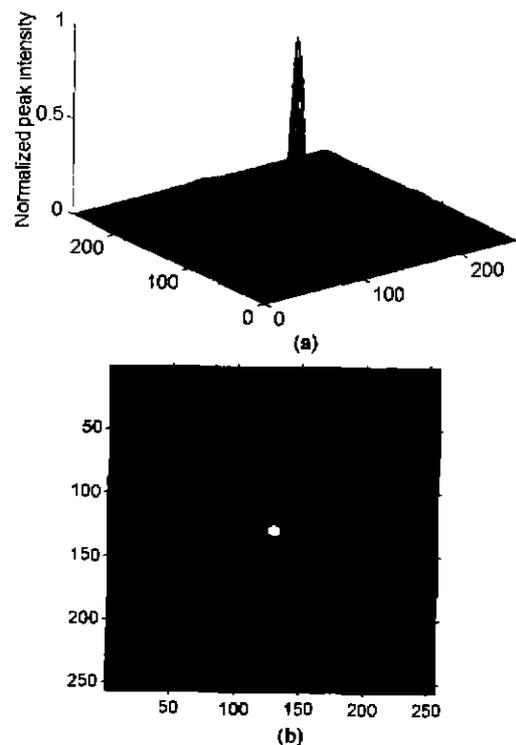


图6 (a)分数级次为 $p=0.9$ 的相关峰三维振幅分布曲线和(b)强度像

Fig. 6 (a) Fractional correlation peak plotted using a 3-D plotting routine and (b) its intensity image when p equals 0.9

4 结论

本文对分数相关过程进行了理论分析,并对实现分数相关分立光学元件实时装置的难点进行了讨论,指出了文献[21]中所提结构的不合理之处。可以看出,利用分数相关结构进行模式识别时,并不需要实时调节分数级次,往往采用单个优化级次即可达到改善相关器目标识别性能的目的。

由于光电混合结构结合了纯光学系统和电子系统优点,我们基于相关峰优化原则,提出了一种实用化的光电混合分数相关结构,并采用指纹模式对此系统进行了数值模拟,结果表明分数相关可得到更窄的相关峰,从而提高了相关器的模式识别精度。

REFERENCES

- [1] Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, *J. Inst. Math. Appl.*, 1980, **25**: 241—265
- [2] McBride A C, Kerr F H. On Namias's fractional Fourier transforms, *IMA J. Appl. Math.*, 1987, **39**: 159—175
- [3] Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation; I, *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 1875—1881
- [4] Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation and the fractional Fourier transform, *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 2181—2186
- [5] Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier transforms and their optical implementation; I, *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 2522—2531
- [6] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 1994, **42**: 3084—3091
- [7] Kutay M A, Ozaktas H M, Arikan O, et al. Optimal filtering in fractional Fourier domains, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 1997, **45**: 1129—1143
- [8] Dorsch R G, Lohmann A W, Bitran Y, et al. Chirp filtering in the fractional Fourier domain, *Appl. Opt.*, 1994, **11**: 7599—7620
- [9] Ozaktas H M, Barshan B, Mendlovic D, et al. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms, *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**: 547—559
- [10] Mendlovic D, Ozaktas H M, Lohmann A W. Fractional correlation, *Appl. Opt.*, 1995, **34**: 303—309
- [11] Mendlovic D, Bitran Y, Dorsch R G, et al. Optical fractional correlation; experimental results, *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**: 1665—1670
- [12] Lohmann A W, Zalevsky Z, Mendlovic D. Synthesis of pattern recognition filters for fractional Fourier processing, *Opt. Commun.*, 1996, **128**: 199—204
- [13] Zalevsky Z, Mendlovic D, Caulfield J H. Localized, partially space-invariant filtering, *Appl. Opt.*, 1997, **36**: 1086—1092
- [14] Zhang Y, Gu B Y. Rotation-invariant and controllable space-variant optical correlation, *Appl. Opt.*, 1998, **37**: 6256—6261
- [15] Alieva T, Agullo-Lopez F. Reply to the comment on the fractional Fourier transform in optical propagation problems, *J. Mod. Opt.*, 1995, **12**: 2379—2383
- [16] Goodman J W. *Introduction to Fourier Optics*. New York: McGraw-Hill, 1968
- [17] Andres P, Furlan W D, Saavedra G, et al. Variable fractional Fourier processor; a simple implementation, *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **4**: 853—858
- [18] Liu S, Xu J, Zhang Z, et al. General optical implementations of fractional Fourier transforms, *Opt. Lett.*, 1995, **20**: 1053—1055
- [19] Dorsch R G. Fractional Fourier transformer of variable order based on a modular lens system, *Appl. Opt.*, 1995, **34**: 6016—6020
- [20] Lohmann A W. A fake zoom lens for fractional Fourier experiments, *Opt. Commun.*, 1995, **115**: 437—443
- [21] Zalevsky Z, Mendlovic D, Caulfield J H. Fractional correlator with real-time control of space-invariance property, *Appl. Opt.*, 1997, **36**: 2370—2375
- [22] Zhu B H, Han L, Xie H W, et al. The properties of fractional correlation peak based on fractional Fourier transform, *The Fourth International Conference on Electronic Measurement and Instruments*, 1999, **13**: 868—872
- [23] Duthie A D. Compact real-time coherent optical correlation, *Opt. Eng.*, 1984, **23**: 7—11
- [24] Gamble F T, Frye L M, Grieser D R. Real-time fingerprint verification system, *Appl. Opt.*, 1992, **31**: 652—655
- [25] Liu S T, Wu J, Li C. Cascading the multiple stages of optical fractional Fourier transforms under different variable scales, *Opt. Lett.*, 1995, **12**: 1415—1417
- [26] Pei S C, Yeh M H. Two-dimensional discrete fractional Fourier transform, *Signal Processing*, 1998, **67**: 99—108