

⑦

133-13/
第18卷第2期
1999年4月

应用 Winograd 傅氏变换算法 计算傅里叶光谱*

邢廷 王模昌[†] 龚惠兴

(中国科学院上海技术物理研究所, 上海, 200083)

0433

摘要 讨论了 Winograd 傅里叶变换算法的优点, 通过计算表明, 将其应用于傅里叶变换光谱的具体算法时, 与计算的具体过程相结合, 可显著地提高光谱的计算效率。

关键词 傅里叶变换光谱, Winograd 傅里叶变换, 离散傅里叶变换。

引言

傅氏变换算法

当今星载傅里叶光谱探测正被广泛采用, 并且多通道、高精度及实时数据处理正成为发展方向, 因此数据处理的效率成为一个突出问题。如 ITS^[1] 采用了 3×3 元探测器, 在原始数据率达 1.17Mbps 的情况下, 给用户直接计算傅里叶光谱的选择。快速傅里叶变换即 FFT 的出现极大地提高了离散傅里叶变换的计算效率, 但结合傅里叶光谱学中的具体计算内容, 从速度的角度看, 常用的 Cooley-Tukey 算法对傅氏变换光谱学来说是显然并不是最佳的, 而其它的一些快速傅里叶变换算法可能对实时处理更有效。针对傅里叶变换光谱仪光谱数据处理的具体内容, 我们发现 Winograd 快速傅里叶变换算法(WFTA), 因为具有乘法运算次数少且与加减运算分离的特点, 应用于星载傅里叶变换光谱仪器实时数据处理中有很大优势。

1 傅里叶变换光谱仪数据处理

傅里叶变换光谱学中光谱的计算通常被认为是一次简单的离散 FFT 处理, 但实际情况并非如此。为获得准确的光谱, 实际上整个计算是围绕相位误差校正这一关键因素进行的一系列计算, 其中一般至少要进行两次 FFT。所谓相位误差来自双光束干涉的 Michelson 干涉仪中光学部件的误差、信号处理中电子电路的频响误差以及数据采集过程中的采样效应。它使得理想的对称干涉图变为不对称的干涉图, 如式(1):

$$I(\delta) = \int_0^{+\infty} B(\bar{\nu}) \cos(2\pi \bar{\nu} \delta - \theta_r) d\bar{\nu}, \quad (1)$$

式(1)中, δ 为双光束干涉的光程差, $I(\delta)$ 为光程差为 δ 时的干涉强度, $\bar{\nu}$ 为波数 $B(\bar{\nu})$ 为频率为 $\bar{\nu}$ 时入射光的辐度, 而 θ_r 为相位误差。从(1)式可见, 干涉图 $I(\delta)$ 中因 θ_r 的存在, 不仅包含了余弦成分, 而且包含了正弦分布, 从而破坏了干涉图的轴对称性, 这是数据中相位误差的

* 国家 863 基金(编号 863-2-7-4-12)资助项目
稿件收到日期 1998-02-31, 修改稿收到日期 1998-09-08

表现,相位误差在光谱计算时必须消除.围绕相位误差的校正,傅里叶光谱的计算一般分为 Mertz 算法 Forman 算法,其处理过程见文献[2].

2 应用 Winograd FT 算法计算傅氏光谱

2.1 Winograd FT 对傅氏光谱计算数据序列长度的适应性

为保证光谱精度,所需采集的数据,即离散傅里叶变换所要计算的数据量是一定的.例如,所测光谱范围为 $650\text{cm}^{-1} \sim 770\text{cm}^{-1}$ 的区间(在大气探测中,这一光谱范围用于二氧化碳温度探测),光谱精度要求为 $d\bar{\nu} = 0.1\text{cm}^{-1}$,则傅里叶光谱仪中干涉系统的扫描装置采样点数至少为:

$$N_s = \frac{4\Delta\bar{\nu}}{d\bar{\nu}}, \quad (2)$$

式(2)中, N_s 为采样点数, $\Delta\bar{\nu}$ 为光谱范围的宽度, $d\bar{\nu}$ 为光谱精度.

根据式(2),所需采样点数为: $N_s = 4,800$. 这时,通常采用的基 2FFT 算法必须按 8192 点计算快速傅里叶变换,具体处理时先将 N_s 点的原始数据补零扩展^[2]至 $N_s = 8192$. 由此可见这种算法受制于 FFT 算法的基,数据序列长度必须成倍地变化,所以虽然算法的代码简单,但灵活性太差,容易造成计算效率低.

另一个重要因素是在 Mertz 与 Forman 算法中为了校正相位,除了保证精度的 N_s 点数据外,必须在 ZPD(即零光程差点)的另一侧采集部分数据,从而在 ZPD 附近形成双边干涉图,计算出相位误差,进而修正整个干涉图的相位误差.而双边干涉图数据点的数目与所要达到的相位校正的精度有关.在采用基 2FFT 算法时,为改善相位校正的精度增加双边干涉数据可能造成 FFT 计算量的加倍.

采用 Winograd FT 算法,实际的计算点数为:

$$N_{WFTA} = \prod_{i=1}^k N_i, \quad (3)$$

式(3)中 N_{WFTA} 为计算数据量, N_i 为构成 Winograd FT 算法中的小 N 点 Winograd FT 算法的点数.在本例中可采用 16, 9, 7, 5 点的 N 点算法计算,实际要计算的点数为 $N_s = 16 \times 9 \times 7 \times 5 = 5040$ 点. Winograd FT 算法将所需要计算的数据点 N 分解为互质的因数 N_i ,从而将 N 点的傅里叶变换算法化为多个小 N 点 Winograd FT 算法,因而在某一特定的应用场合,即采样点数固定时,用 Winograd FT 算法比一般采用的基 2 Cooley-Tukey FFT 算法所需计算的点数少,因而更有效,适用性也更强.

2.2 应用 Winograd FT 算法减少傅氏光谱计算量

傅氏光谱计算是针对实序列的采样数据进行处理,只是由于相位误差的存在,傅氏变换后的结果是复数的.对实序列傅氏变换时,一般的 FFT 算法只能进行复数运算,浪费了计算时间.而 Winograd FT 算法可以结合实数序列的特点,节省大约一半的运算量,这是由其算法的结构决定的.

图 1 所示为典型的 3 点 Winograd FT 算法结构^[3].图 1 中, $x(NBASE)$, $x(NR1)$, $x(NR2)$, 为输入时域数据, $NBASE$, $NR1$ 与 $NR2$ 分别为数据序列索引; t_0 , t_1 , t_2 及 m_0 , m_1 ,

m_2 , 分别为前编模与乘法运算的中间结果; $y(NBASE), y(NR1), y(NR2)$ 为变换后的频域数据. 前编模运算(纯加减运算)为: $t_1 = x(NBASE) + x(NR1), t_2 = t_1 + x(NR1), t_3 = x(NR2) - x(NR1)$; 中间乘法运算为: $m_1 = 1.0t_1, m_2 = -1.5t_2, m_3 = -\sqrt{3}/2t_3 \cdot j$; 后编模运算(纯加减运算)为: $y(NBASE) = m_1, y(NR1) = SR2 = m_2 + m_3, y(NR2) = m_2 - m_3$.

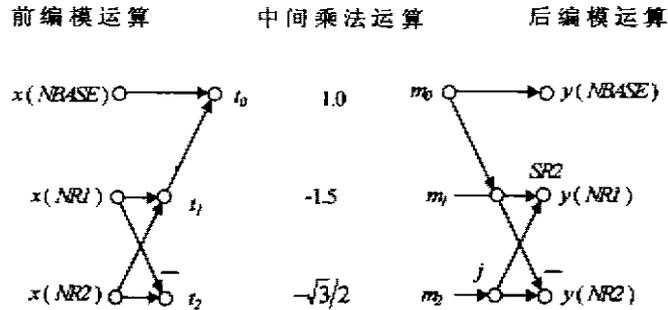


图 1 3 点 Winograd 傅氏变换算法
Fig. 1 3-point Winograd Fourier transform algorithm

干涉数据是实数序列,其虚部为零,因而在前编模运算与中间乘法运算中,与虚部相关的运算都可省略,从而把前编模运算减少一半,把整个傅里叶变化的乘法运算减少一半. Winograd FT 算法的最大特点就是极大地减少乘法运算量,而在这里,针对具体的实数序列的应用场合,乘法运算更是大大减少. 在 Mertz 与 Forman 算法中要对全干涉图与小双边干涉图分别做一次正向傅里叶变换,并且由于傅里叶变换是主要的运算部分,Winograd FT 算法这一优点所体现效率上的提高是显著的.

Winograd FT 算法的另一优点是其乘法运算次数达到了理论上的最小值^[4],具有比其它 FFT 更高的计算效率,从而可以大大提高傅里叶变换光谱的计算速度. 在 Winograd 算法中,其相位误差的校正通过全干涉图与小双边干涉图的多次卷积实现的,这使得 Forman 算法较 Mertz 算法可达到更高的精度,相应地前者的计算量也要增加,显然,若利用傅氏变换做卷积可极大地提高运算效率,而采用 Winograd FT 算法可进一步提高效率,从而达到快速、准确地计算傅里叶变换光谱的目的.

3 计算验证与分析

采用 Winograd FT 算法对 N 点数据运算时需要将 N 分解为互质的素数 N_i (如式(3)所示),N 点傅里叶变换即是各个小的 N_i 点的傅里叶变换的组合. 这一分解如 2.1 所述提供了用接近实际所需计算点数的数据量计算傅氏变换,而不必受 2 的 n 次幂的限制,在这种情况下 Winograd FT 算法显然提高了计算效率. 所以只对比一下在处理大致相同的光谱数时,采用 Winograd FT 算法与采用一般的 Cooley-Tukey 算法的比较. 作为验证,将这两种方法应用于 Mertz 与 Forman 两种算法中;对前者计算了 4096 点与 2048 点的数据,对后者,分别计算了 5040 点与 2520 点的数据. 每次计算都采用 1/8 的总数据量的数据点数修正光谱图中的相位误差,其结果见表 1.

表1 采用 Cooley-Tukey 与 Winograd FT 算法的傅氏光谱计算效率对比
Table 1 Comparison of computing time between algorithms using
Cooley-Tukey FT and Winograd FT

数据量 (点)	Mertz 算法计算时间量(相对值)		Forman 算法计算时间量(相对值)	
	FFT 采用 Cooley-Tukey 算法	采用 Winograd FT 算法	采用 Cooley-Tukey 算法	采用 Winograd FT 算法
4096	70	~	373	~
5040	~	42	~	565
2048	40	~	119	~
2520	~	17	~	141

由表1可见,采用 Winograd FT 算法时,计算 5040 点与 2520 点的干涉图数据反而要比采用常规的 FFT 算法计算 4096 点与 2048 点时要快大约 40% 以上。

Mertz 算法的计算量主要集中在快速傅里叶变换上,因此如采用 Winograd FT 算法,可明显地看出其计算效率上的优势。

表1所示 Forman 算法的计算对比显示,采用 Winograd FT 算法计算 5040 点时,要比采用常规 Cooley-Tukey 算法计算 4096 点慢 50%,与数据 23% 的增加不成比例。这实际上是因为在 Forman 算法计算光谱时,其主要的计算量是相位校正时的卷积运算。在该算法中,如果数据量增加了 $k \cdot 100\%$,且如本例的情况采用占总数据量的一定比例的小双边干涉图校正相位,则单卷积计算实际上增加的百分比约为 $(k^2 + 2k)100\%$ 。所以采用 Winograd FT 算法实际上还是大大提高了计算效率。当然卷积可以借助傅氏变换快速完成。这时,应用 Winograd FT 算法的 Forman 傅氏光谱计算程序在计算效率上的提高将与表1所示的 Mertz 算法相当,见表2。

表2 Forman 算法中卷积用离散快速傅氏变换实现时间的计算时间
Table 2 Computing time of Forman method: implementing
convolution using discrete fast Fourier transform algorithms

数据量(点)	采用傅氏变换完成卷积运算时 Forman 算法计算时间(相对值)	
	FFT 采用 Cooley-Tukey 算法	FFT 采用 Winograd FT 算法
4096	232	~
5040	~	159
2048	112	~
2520	~	101

与一般采用的基 2FFT 算法相比,Winograd FT 算法的缺点是程序代码量大,并且要为特定的计算点数调整程序算法。这使得采用 Winograd FT 算法的程序所占代码空间大,但对现今计算设备的存储容量而言,这一存储空间的要求不成问题,只是在具体应用中,要根据所需计算的数据量,预先做好编码工作,这是使用该算法不便的地方。为了克服这一缺点,我们编制了通用的 N 点 Winograd FT 程序,只要提供计算中所需要的小 N 点 Winograd FT 算法的模块集,程序可计算这些小 N 点任意顺序组合的 Winograd 傅氏变换。

REFERENCES

- 1 Smith W L. *Interferometer Thermal Sounder Feasibility Study Final Reprot*, Madison: University of Wisconsin Space Science and Engineering Center, 1991, 117
- 2 Griffiths P R, de Haseth J A. *Fourier Transform Infrared Spectroscopy*, New York: John Willey & Sons, 1986, 26~31
- 3 Digital Signal Processing Committee of IEEE ASSP Society. *Programs for Digital Signal Processing*, New York: IEEE Press, 1979: 1. 7-1 (“数字信号处理程序库”编译, 数字信号处理程序库, 北京: 清华大学出版社, 1983, P. 160)
- 4 ZHANG Yang-Zhong, SHEN Nai-Han *Fast Fourier and Walsh Transform*. Beijing: Press of Aviation Industry (张彦仲, 沈乃汉. 快速傅里叶变换及沃尔什变换, 北京: 航空工业出版社), 1989, P. 111

COMPUTATION OF FOURIER TRANSFORM SPECTRUM USING
WINOGRAD FOURIER TRANSFORM ALGORITHM*

XING Ting WANG Mo-Chang GONG Hui-Xing

(Shanghai Institute of Technical Physics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200083, China)

Abstract The advantage of efficient computation of Fourier transform spectrum by using Winograd Fourier transform algorithm was discussed. The computation results prove that the Winograd algorithm can improve the efficiency remarkably when applied to and combined with the spectrum calculation routine.

Key words Fourier transform spectrometry, Winograd Fourier transform, discrete Fourier transform.

* The project supported by the National High Technology Foundation of China
Received 1998-02-21, revised 1998-09-08