

④ 99-106

一组用于识别平面多边形的射影不变量*

陈燕新 戚飞虎

(上海交通大学计算机系, 上海, 200030)

TP391.41

摘要 利用共面五点的交比, 导出—组用于识别平面多边形的射影不变量, 用这组不变量实现平面多边形的识别, 实验结果表明, 这组不变量具有射影不变性, 可以有效地识别平面多边形.

关键词 交比, 平面多边形识别, 透视投影, 射影不变量.

计算机视觉

引言

在计算机视觉中, 平面多边形的识别有着十分重要的意义. 许多三维物体, 如工业零件、道路标记、积木等, 都包含一些由平面多边形组成的面, 通过对这些平面多边形的识别, 可以实现三维物体的识别和姿态估计.

摄像机的成像过程是从三维物体空间到二维图像平面的透视投影过程. 对于同一空间平面, 用摄像机(其内部参数可以不同)在不同视点位置获得不同的透视投影图像, 该空间平面和透视投影图像之间以及不同透视投影图像之间的关系是射影变换的关系^[1]. 基于特征的物体识别要求特征对这种射影变换具有不变性, 以保证该特征不受透视投影的影响, 从而使得识别结果不随摄像机视点位置及内部参数的改变而改变. 一种常用的处理方法是认为物体到摄像机的距离远大于物体的尺寸, 这时可忽略透视投影的非线性畸变而将它用仿射变换来近似. 这样, 各种仿射不变量, 例如: 矩不变量^[2]、傅里叶描述子^[3]等就可以作为特征用于识别. 然而在某些场合, 这种非线性畸变不能忽略, 因而透视投影就不能用仿射变换来近似, 必须采用射影变换. 文献[4]对射影变换的各种不变量进行了详尽的评述.

交比是射影几何中最基本的射影不变量^[1], 许多其它射影不变量都可以从交比推导出来或者通过交比得到解释. 本文首先利用共面五点的交比, 导出—组用于识别平面多边形的射影不变量, 然后利用这组不变量实现对平面多边形的识别. 这种方法的识别结果与摄像机视点位置及内部参数无关, 可以有效地识别平面多边形.

1 一组用于识别平面多边形的射影不变量

设射影变换前点的坐标为 $[x, y]$, 射影变换后对应点的坐标为 $[x', y']$, 则射影变换可以表示成^[1]:

$$x' = (a_0 + a_1x + a_2y) / (1 + c_1x + c_2y),$$

* 国防预研基金(96J2.4.2)和国家自然科学基金(69572026)资助项目
稿件收到日期 1997-06-12, 修改稿收到日期 1997-12-18

$$y' = (b_0 + b_1x + b_2y)/(1 + c_1x + c_2y), \quad (1)$$

式(1)中参数 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_1, c_2$ 构成了射影变换矩阵 T , 即

$$T = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

射影变换矩阵 T 是非奇异的, 即 $|T| \neq 0$.

交比是最基本的射影不变量, 其定义如下^[5]: 设有共面的五点 A_1, A_2, \dots, A_5 , 它们的坐标分别为 $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_5, y_5]$, 令

$$[i, j, k] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}, \quad (3)$$

则共面五点交比为:

$$I(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{[1, 2, 4] \cdot [1, 3, 5]}{[1, 2, 3] \cdot [1, 4, 5]}. \quad (4)$$

在射影变换矩阵 T 为非奇异的前提下, 平面上的直线经射影变换后仍为直线, 点和直线的衔接关系在射影变换下保持不变^[1], 因此, N 边形经射影变换后仍为 N 边形, 平面多边形的顶点数和边数均具有射影不变性, 这为利用本文提出的不变量进行平面多边形识别提供了前提.

对于一个有 N 个顶点的平面多边形, 任取一个顶点作为起始顶点, 沿着多边形的边, 按逆时针将各顶点依次标记为 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{N-1}$. 这种编号方法, 对于同一空间平面多边形经透视投影后所得到的不同投影多边形, 由于起始顶点选择不同, 使得这些投影多边形之间的顶点编号具有循环移位的关系. 为了获得与起始顶点选择无关的不变量, 利用共面五点的交比可构造如下不变量:

$$SF_{N,K} = \sum_{i=0}^{N-1} I_1(i, i+1, i+2, i+3, i+3+k), \quad (5)$$

$$MF_{N,K} = \prod_{i=0}^{N-1} I_1(i, i+1, i+2, i+3, i+3+k), \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} & I_1(i, i+1, i+2, i+3, i+3+k) \\ &= I[i, (i+1) \bmod N, (i+2) \bmod N, (i+3) \bmod N, (i+3+k) \bmod N] \\ &= \frac{[i, (i+1) \bmod N, (i+3) \bmod N] \cdot [i, (i+2) \bmod N, (i+3+k) \bmod N]}{[i, (i+1) \bmod N, (i+2) \bmod N] \cdot [i, (i+3) \bmod N, (i+3+k) \bmod N]}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 \bmod 是求余运算符, $N \geq 5$, $k = 1, 2, 3, \dots, N-4$.

由于共面五点的交比是射影不变量, 易知 $SF_{N,K}, MF_{N,K}$ 是表征 N 个顶点平面多边形的

射影不变量,且与起始顶点的选择无关.若直接利用 $SF_{N,K}, MF_{N,K}$ 识别平面多边形问题有:

(1) 构成交比的共面五点中,若有三点 A_i, A_j, A_k 共线,使 $[i, j, k]$ 等于 0,将会导致式(4)定义的交比无穷大(无定义).另外,若三点 A_i, A_j, A_k 接近共线时, $[i, j, k]$ 数值很小,将会导致交比数值很大.由式(5)、(6)、(7)可以推知,在这种情况下, $SF_{N,K}, MF_{N,K}$ 将会对图像数字化误差以及顶点提取误差的影响变得十分敏感,使得不变量的稳定性变差.

(2) 利用不变量进行平面多边形识别,其基本步骤是:首先根据多边形的顶点数 N ,计算出事先规定的不变量,然后将每一个不变量的数值与模型库中所有 N 边形的对应不变量数值相比较,若它们的差值小于指定的阈值,则将这两个多边形判为属于同一类平面多边形.由于 $SF_{N,K}, MF_{N,K}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 之间变化,这给指定阈值带来了困难.另外,由式(5)、(6)可知,阈值必定要随顶点数 N 的变化而变化.故为了便于指定阈值,有必要将 $SF_{N,K}, MF_{N,K}$ 归一化.

针对问题(1),可以对交比 I_1 进行变换,使得当 $|I_1|$ 较大时,变换后的对应值(设为 I_m)随 $|I_1|$ 的变化变得较缓慢,从而解决当三点接近共线时所造成的不变量不稳定问题.函数

$$I_m = \frac{e^{\frac{I_1}{\alpha}} - 1}{e^{\frac{I_1}{\alpha}} + 1} \quad (8)$$

可满足这种变换要求.由图 1 可以看到, I_m 随 I_1 单调增加,且当 $I_1 \rightarrow -\infty$ 时, $I_m \rightarrow -1$; $I_1 \rightarrow +\infty$ 时, $I_m \rightarrow 1$; $|I_1|$ 较大时, I_m 随 $|I_1|$ 的变化将变得很缓慢.参数 α 控制着曲线的形状,它的取值直接影响不变量的可分辨性和稳定性.下面来探讨一下 α 的取值.

由式(3)可知, $[i, j, k]$ 的绝对值是 A_i, A_j, A_k 三点所组成三角形面积的两倍,由此可证明如下关系式:

$$|I(1, 2, 3, 4, 5)| = \left| \frac{[1, 2, 4] \cdot [1, 3, 5]}{[1, 2, 3] \cdot [1, 4, 5]} \right| = \left| \frac{\sin \angle A_2 A_1 A_4 \cdot \sin \angle A_3 A_1 A_5}{\sin \angle A_2 A_1 A_3 \cdot \sin \angle A_4 A_1 A_5} \right|. \quad (9)$$

利用式(9)来看一个例子:设有共面的五点 A_1, A_2, \dots, A_5 , 它们之间的相互位置满足如下角度关系:取 $\angle A_2 A_1 A_3, \angle A_4 A_1 A_5$ 为一个较小的角度,如 10° ,取 $\angle A_2 A_1 A_4, \angle A_3 A_1 A_5$ 为 90° ,由式(9)可得它们的交比值为 33.由该例不难想到,尽管交比在 $(-\infty, +\infty)$ 之间变化,但对于共面五点中任三点不接近共线的交比,其数值并不大.实验发现,平面多边形顶点所构成的绝大多数交比绝对值小于 20,参数 α 取 4 时可获得较好的实验结果.

当三点 A_i, A_j, A_k 接近共线时, $[i, j, k]$ 的值接近于 0,图像数字化误差及顶点提取误差会使 $[i, j, k]$ 在 0 附近正负摆动,从而会导致交比值为很大的正值或很大的负值,经式(8)变

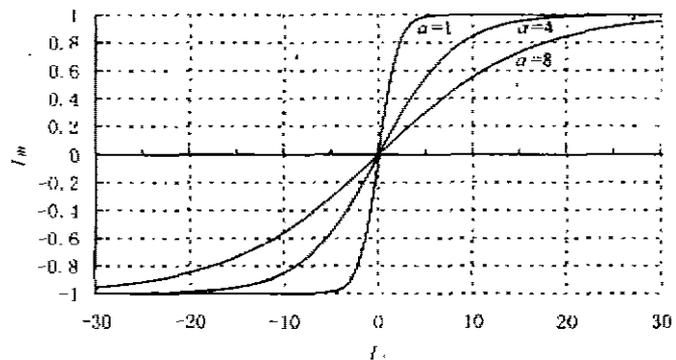


图 1 在不同 α 取值下的变换函数曲线
Fig. 1 The curves of transformation functions for different α

换得到接近 1 或 -1 的值,这显然是不允许的,为此可对 I_m 取绝对值,用 4 取代参数 α ,最终可得变换函数:

$$I_2 = \left| \frac{e^{\frac{I_1}{4}} - 1}{e^{\frac{I_1}{4}} + 1} \right|. \quad (10)$$

另外,为避免在计算交比 I_1 时,出现除零错,可对除数进行判断,若为 0,可直接将 I_2 置为 1. 用式(10)对式(7)中的交比 I_1 进行变换得 I_2 ,用 I_2 构造不变量 $SS_{N,k}$ 和 $MS_{N,k}$:

$$SS_{N,k} = \sum_{i=0}^{N-1} I_2(i, i+1, i+2, i+3, i+3+k), \quad (11)$$

$$MS_{N,k} = \prod_{i=0}^{N-1} I_2(i, i+1, i+2, i+3, i+3+k). \quad (12)$$

由于 I_2 在 0,1 之间变化,易知, $SS_{N,k}$ 在 0, N 之间变化, $MS_{N,k}$ 在 0,1 之间变化. 为了使不变量落在 0,1 之间,且使所需指定的阈值与顶点数 N 无关,可构造归一化不变量:

$$IS_{N,k} = \frac{1}{N} SS_{N,k} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} I_2(i, i+1, i+2, i+3, i+3+k), \quad (13)$$

$$IM_{N,k} = \sqrt[N]{MS_{N,k}} = \sqrt[N]{\prod_{i=0}^{N-1} I_2(i, i+1, i+2, i+3, i+3+k)}, \quad (14)$$

其中 $N \geq 5, k=1, 2, 3, \dots, N-4$.

由于 $IS_{N,k}, IM_{N,k}$ 是归一化不变量,均在 0,1 之间取值,故很容易指定阈值.

对于一个有 N 个顶点的平面多边形, k 的取值范围为 $[1, N-4]$, 所以一共有 $2(N-4) = 2N-8$ 个不变量. 在实际利用这组不变量进行平面多边形识别时,往往不需要全部计算出这 $2N-8$ 个不变量,选取哪些不变量用于平面多边形的识别要根据具体情况来定: 若用一个不变量就能区别出模型库中的所有 N 边形,则只需计算这个不变量; 否则考察同一 k 的 $IS_{N,k}, IM_{N,k}$, 若用这两个不变量就能区别出模型库中的所有 N 边形,则只需计算这两个不变量. 总之,在能区别出模型库中所有 N 边形的前提下,选用尽量少的不变量作为特征. 这样,可以保证尽快地完成识别任务.

在通常情况下,一个维数为 m 的变换群作用在一个有 N 维自由度的几何结构上,将有 $N-m$ 个独立的不变量^[6]. 一个有 N 个顶点的平面多边形,有 $2N$ 维自由度,射影变换有 8 个独立的参数,所以有 $2N-8$ 个独立不变量. 结合本文给出的这组不变量的导出过程,可知,本文给出的这 $2N-8$ 个射影不变量可较好地表征顶点数为 N 的平面多边形.

2 平面多边形的识别

由前面讨论可知:

(1) 本文给出的这组不变量,只适用于识别顶点数 $N \geq 5$ 的平面多边形,对于三角形和四边形须用别的方法进行识别.

(2) 平面多边形的顶点数具有射影不变性,可先利用顶点数的不同区别出顶点数不同的多边形.

(3) 选用哪些不变量用于识别平面多边形是以能区别出模型库中顶点数相同的多边形为前提. 对于顶点数不同的多边形, 选用的不变量可能是不同的.

根据上述性质, 可利用本文给出的这组不变量对平面多边形进行识别. 其算法如下:

(1) 检测出待识别平面多边形的顶点, 设其顶点数为 N . 对于三角形和四边形不能用以下步骤识别, 而应选用其它方法进行.

(2) 根据顶点数 N , 由模型库给出所需计算的不变量, 设其数目为 λ , 计算出待识别多边形的 λ 个不变量 $S_1, S_2, \dots, S_\lambda$.

(3) 将每一个不变量 $S_i (1 \leq i \leq \lambda)$, 与模型库中所有 N 边形的对应不变量 $M_i (1 \leq i \leq \lambda)$ 相比较, 计算其误差 ϵ :

$$\epsilon = \max_{1 \leq i \leq \lambda} |S_i - M_i|. \quad (15)$$

只有当误差 ϵ 小于指定阈值 T_c 时, 才将这两个 N 边形判为属于同一类平面多边形. 当和模型库中所有 N 边形的误差 ϵ 都大于或等于指定阈值 T_c 时, 则判为模型库中没有待识别的平面多边形.

3 实验结果与讨论

为了验证不变量的射影不变性及其稳定性和可分辨性, 用 PhotoStyler 软件产生三个八边形, 如图 2(a)、3(a)、4(a) 所示, 然后将它们进行射影变形, 得到图 2(b)、2(c)、3(b)、3(c)、4(b)、4(c) 所示的八边形. 图 2(a)、2(b)、2(c) 中八边形的面积 (即像素数) 分别为 91000、41260、16630; 图 3(a)、3(b)、3(c) 中八边形的面积分别为 64200、27190、12030; 图 4(a)、4(b)、4(c) 中八边形的面积分别为 73850、31480、13440. 对图 2(b)、3(b)、4(b), 用 3×3 平均模板进行模糊并加均方差为 100 的高斯白噪声, 得到图 2(d)、3(d)、4(d).

对于图 2、图 3、图 4 中的 (a)、(b)、(c), 计算不变量所用的顶点坐标只有图像数字化误差, 而对于 (d), 计算不变量所用的顶点坐标不仅有图像数字化误差, 而且有因模糊及噪声所引起的顶点提取误差. 不变量 $MF_{8,1}$ 和 $MF_{8,2}$ 的值如表 1 所示, $IS_{8,1}$ 、 $IS_{8,2}$ 等 8 个归一化不变量的值如表 2 所示. 考察这 8 个归一化不变量所组成特征向量之间的欧氏距离, 结果如表 3 所示. 由表 3 可知, 同一八边形在不同射影变形下, 其特征向量之间的欧氏距离不大于 0.037, 而不同八边形的特征向量之间的欧氏距离大于 0.310, 差别显著. 由图 2(a)、3(a) 可以看到, 八边形 1、八边形 2 具有对称性, 且存在三点共线, 在计算 $SF_{8,1}$ 、 $MF_{8,1}$ 、 $IS_{8,1}$ 及 $IM_{8,1}$ 时, 涉及 A_2, A_5, A_6 共线, A_6, A_1, A_2 共线; 计算 $SF_{8,4}$ 、 $MF_{8,4}$ 、 $IS_{8,4}$ 及 $IM_{8,4}$ 时, 涉及 A_2, A_5, A_1 共线, A_6, A_1, A_5 共线. 将图 2(a)、3(a) 中的平面八边形进行射影变形, 由于数字化误差和噪声使得 A_2, A_5, A_6 ; A_6, A_1, A_2 ; A_2, A_5, A_1 以及 A_6, A_1, A_5 只能接近于共线 (仍然共线的可能性很小). 若直接使用不变量 $SF_{N,i}$ 、 $MF_{N,i}$, 当构成交比的共面五点中有三点接近共线时, 会使不变量 (如表 1 中的 $MF_{8,1}$) 的数值受数字化误差和噪声的影响很大. 为此本文采用式 (10) 对交比进行了变换, 使得最终的归一化不变量数值受数字化误差和噪声的影响很小 (见表 2 和表 3). 由上述实验表明, 本文给出的这组不变量具有射影不变性, 且有很好的稳定性和可分辨性. 由表 2 可知对于这 3 种八边形, 它们之间 $IS_{8,3}$ 的值相差较大, 如果模型库中只有这 3 个八边形, 则可选 $IS_{8,3}$ 这个不变量作为特征, 进行识别, 而无须计算出这 8 个不变

量,这样可以较快地完成识别任务.

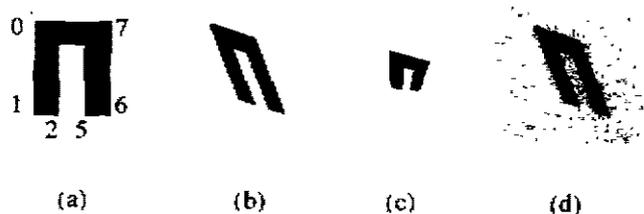


图2 八边形 1
Fig. 2 The octagons 1

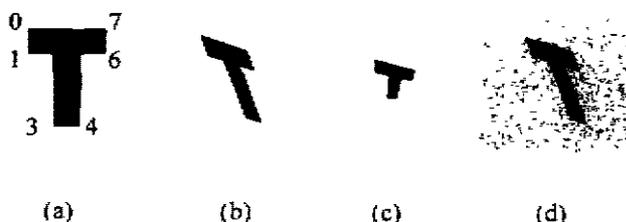


图3 八边形 2
Fig. 3 The octagons 2

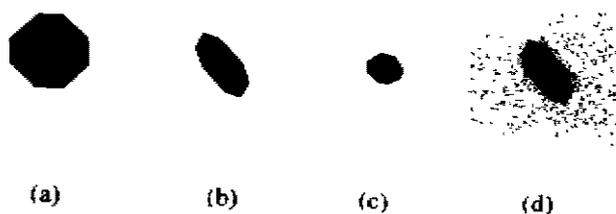


图4 八边形 3
Fig. 4 The octagons 3

文献[7]用交比构造了一个相当于 $\sqrt{MF_{N,1}}$ 的不变量,用于识别空中的飞机目标,其缺点如下:(1)只有一个不变量,导致不变量的可分辨性不好;(2)当构成交比的共面五点中有三点接近共线时,不变量将会对图像数字化误差以及顶点提取误差的影响变得十分敏感(见表1中的 $MF_{s,1}$),使得不变量的稳定性变差.上述问题在本文中得到了较好地解决.

本文利用共面五点交比,导出了 $2N-8$ 个用于识别平面 N 边形的不变量.这组不变量是基于共面五点交比的,因而具有射影不变性.用射影不变量识别平面多边形,其识别结果将不随摄像机视点位置及内部参数的改变而改变.在推导这组不变量的过程中,考虑到三点接近共线会导致不变量 $SF_{N,k}$ 、 $MF_{N,k}$ 对图像数字化误差和顶点提取误差过于敏感,而对交比进行了变换,从而使不变量 $SS_{N,k}$ 、 $MS_{N,k}$ 具有很好的稳定性;为了便于确定识别误差阈值 T_c ,而对不变量 $SS_{N,k}$ 、 $MS_{N,k}$ 进行了归一化,得到不变量 $IS_{N,k}$ 、 $IM_{N,k}$.对于 N 边形($N \geq 5$),有 $2N-8$ 个不变量,从而较好地保证了不变量的可分辨性,为能区别出模型库中所有 N 边形奠定了良好的基础.理论和实验结果表明,本文给出的这组不变量具有射影不变性,同时具

有很好的稳定性和可分辨性. 这组不变量的不足之处是它们只能识别顶点数 $N \geq 5$ 的平面多边形.

表 1 不变量 $MF_{k,1}$ 和 $MF_{k,3}$ 的值
Table 1 The values of the invariants $MF_{k,1}$ and $MF_{k,3}$

图号	图 2(a)	图 2(b)	图 2(c)	图 2(d)	图 3(a)	图 3(b)	图 3(c)	图 3(d)
$MF_{k,1}$	无穷大	2.450E+44	729566	10733	无穷大	-85911	61645	1032
$MF_{k,3}$	554.444	552.243	508.727	465.843	0.119938	0.119208	0.129413	0.05364

表 2 归一化不变量的值
Table 2 The values of normalized invariants

图号	图 2(a)	图 2(b)	图 2(c)	图 2(d)	图 3(a)	图 3(b)	图 3(c)	图 3(d)	图 4(a)	图 4(b)	图 4(c)	图 4(d)
$IS_{k,1}$	0.4213	0.4214	0.4216	0.4166	0.3431	0.3425	0.3446	0.3254	0.4287	0.4286	0.4295	0.4296
$IS_{k,2}$	0.2108	0.2110	0.2106	0.2061	0.1872	0.1872	0.1869	0.1765	0.3016	0.3015	0.3022	0.3010
$IS_{k,3}$	0.3374	0.3380	0.3339	0.3180	0.1237	0.1235	0.1251	0.1143	0.2540	0.2539	0.2545	0.2541
$IS_{k,4}$	0.3991	0.3998	0.3980	0.3842	0.3122	0.3119	0.3119	0.2951	0.2151	0.2150	0.1256	0.2134
$IM_{k,1}$	0.2663	0.2664	0.2656	0.2476	0.2000	0.1989	0.2025	0.2187	0.4097	0.4098	0.4097	0.4120
$IM_{k,2}$	0.1191	0.1196	0.1188	0.1211	0.1211	0.1207	0.1218	0.1251	0.2963	0.2962	0.2964	0.2966
$IM_{k,3}$	0.2568	0.2569	0.2555	0.2494	0.0952	0.0951	0.0961	0.0869	0.2493	0.2493	0.2495	0.2501
$IM_{k,4}$	0.2286	0.2293	0.2281	0.2270	0.1380	0.1376	0.1388	0.1271	0.2131	0.2130	0.2133	0.2123

表 3 归一化不变量所组成特征向量之间的欧氏距离
Table 3 The Euclidean distances between the feature vectors composed of normalized invariants

图号	2(a)	2(a)	2(a)	3(a)	3(a)	3(a)	4(a)	4(a)	4(a)	2(a)	2(a)
	2(b)	2(c)	2(d)	3(b)	3(c)	3(d)	4(b)	4(c)	4(d)	3(a)	4(a)
欧氏距离	0.0013	0.0040	0.0325	0.0014	0.0035	0.0369	0.0003	0.0013	0.0033	0.3140	0.3184

REFERENCES

- 1 Fang D Z, Chen Y B. *Projective Geometry*. Beijing: Higher Education Press (方德值, 陈奕培. 射影几何, 北京: 高等教育出版社), 1983, 98~195
- 2 Flussr J, et al. *Pattern Recognition*, 1993, **26**: 167~174
- 3 Arbter K, et al. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1990, **12**: 640~647
- 4 Mundy J L, et al. *Geometric Invariance in Computer Vision*. Massachusetts: MIT Press, 1992, 1~19
- 5 Lenz R, et al. *Pattern Recognition*, 1994, **27**: 1523~1532
- 6 Forsyth D, et al. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1991, **13**: 971~991
- 7 Chen X, et al. *J. Infrared Millim. Waves* (陈 昕等. 红外与毫米波学报), 1997, **16**(1): 39~44

A GROUP OF PROJECTIVE INVARIANTS FOR RECOGNITION OF PLANAR POLYGONS*

CHEN Yan-Xin QI Fei-Hu

(Department of Computer Science, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract A group of projective invariants was derived based on the cross-ratio of five coplanar points, and used to recognize planar polygons. Experimental results show that the invariants have projective invariance and can be used to recognize planar polygons effectively.

Key words cross-ratio, recognition of planar polygons, perspective projection, projective invariant.

* The project supported by the Preliminary Research Foundation of National Defence and the National Natural Science Foundation of China
Received 1997-09-12, revised 1997-12-18