②245~250

第16卷第4期 1997年8月 | 红外与毫米波学报 J. Infrared Millim. Waves | Vol. 16, No. 4 August, 1997

超晶格-反铁磁界面上的非线性 TM 电磁表面波*

TM271.6
TN011.4

金哲 王奇
(上海大学理学院物理系,上海,201800)

摘要 研究了反铁磁和超晶格界面上非线性TM表面波的传播特性,发现超晶格体中液晶层晶轴取向θ为0或$\pi/2$时非线性TM表面波才能在所讨论的界面上存在.导出了非线性TM表面波的色散关系,分析了非线性TM表面波的频率特性.

关键词 非线性波,超晶格,反铁磁材料. TM 电磁表面波

引言

近年来随着超晶格体制备技术的完善,人们开始关注这一新型光学微波材料的非线性导波行为,并取得了一系列成果[1~3].但是目前主要讨论的是电介质的非线性效应对超晶格导波特性的影响,尚未研究铁磁介质的非线性效应对超晶格中电磁波传播的影响.事实上铁磁材料以其物理性能的多样性和应用领域的广泛性一直倍受人们的关注.铁磁材料中的反铁磁体更有其独特的优点:作为各向异性材料它不需引入外偏置磁场就能使它内部的两子晶格层的自旋分别取向一至.近年来国外的一些波导理论工作者对这种独特材料的非线性导波性质作了一系列研究[4~6],得到了其非线性磁化率和电磁波波动方程的表达式.

本文研究反铁磁体和超晶格界面上非线性TM电磁波的传播行为.我们讨论的超晶格是由电介质和各向异性的液晶组成.从磁场(而不是电场)所满足的微分方程出发,求解边值问题,很大程度上避开了由液晶的各项异性带来的计算复杂性.结果表明当超晶格体中液晶层晶轴与超晶格排列方向的夹角θ为两特殊角度,即$\theta=0$或$\pi/2$时,非线性TM波才能传播.

1 基本方程

我们讨论的波导界面是超晶格材料和反铁磁体的交界面,即$Z=0$界面.表面波沿X方向传播.$Z<0$区域为反铁磁晶体,反铁磁晶体的易极化轴沿电磁波的传播方向,即X轴方向;$Z>0$区域为超晶格,超晶格是由介质和液晶沿Z轴交替排列构成.

超晶格中各部分的介电常数由下式给出

* 国家自然科学基金资助项目,编号69477020
本文1996年4月15日收到,修改稿1997年1月14日收到

$$\varepsilon_{i,j}=\begin{cases}\varepsilon_1\delta_{i,j}, nL<Z<nL+d_1,\\ \varepsilon_{i,j}, nL+d_1<Z<(n+1)L.\end{cases} \tag{1}$$

超晶格周期 $L=d_1+d_2$，d_1 和 d_2 分别是超晶格中电介质和液晶的厚度；$n=0,1,2,\cdots\cdots$. 液晶是各向异性材料，其介电常数通常用一对称张量来表示，这个张量的各个元素与晶轴取向有关[7]

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{\perp}\cos^2\theta+\varepsilon_{/\!/}\sin^2\theta,\quad \varepsilon_{zz}=\varepsilon_{\perp}\sin^2\theta+\varepsilon_{/\!/}\cos^2\theta,$$
$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yz}=0,\quad \varepsilon_{yy}=\varepsilon_{\perp},\quad \varepsilon_{zx}=1/2\Delta\varepsilon\sin 2\theta, \tag{2}$$

液晶是单轴晶体，式(2)中 $\varepsilon_{\perp}=\varepsilon''_{xx}=\varepsilon''_{yy}$，$\varepsilon_{/\!/}=\varepsilon''_{zz}$，$\varepsilon''_{xx}$，$\varepsilon''_{yy}$和 ε''_{zz}是液晶介电主轴张量的对角元素，$\Delta\varepsilon=\varepsilon_{/\!/}-\varepsilon_{\perp}$，$\theta$ 是液晶晶轴与 Z 轴的夹角.

在 $Z<0$ 区域的反铁磁体中，磁导率张量是导波频率 ω 的函数. 若反铁磁晶体的易极化轴沿 X 方向，那么在直角坐标系中磁导率张量 $\mu(\omega)$ 可用三阶对角矩阵描述[8,9]，其 Y 方向的分量为

$$\mu(\omega)=\mu^L(\omega)+\chi^{NL}(\omega)|H_y|^2, \tag{3}$$

式(3)中 $\mu^L(\omega)=1-\frac{2\omega_a\omega_a}{\omega^2-\omega_c}$ 为线性磁导率，$\chi^{NL}(\omega)=\frac{\gamma^2\omega_a\omega^2\omega_m(\omega^2+\omega_a^2)}{(\omega_2-\omega_c^2)^4}$ 是相应的非线性极化系数，其中 $\omega_a=\mu_0\gamma H_a$；$\omega_m=\mu_0\gamma M_0$，$\omega_c=\omega_a^2+2\omega_a\omega_E$，$\omega_E=\mu_0\gamma H_e$. 它们分别与材料中各向异性场 H_a，饱和磁化强度 M_0，交换场 H_e 相联系，是系统的特征频率. ω_c 可视为反铁磁晶体进动系统的共振频率，γ 为旋磁比.

我们讨论位于超晶格与反铁磁体交界面沿 X 向传播的 TM 电磁表面波. 设波数为 k，频率为 ω，那么电磁波的磁场和电场可写成

$$\vec{H}=H_yJ=H_y(z)\exp[i(kx-\omega t)]J, \tag{4}$$
$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_z\vec{k}=E_x(z)\exp[i(kx-\omega t)]\vec{i}+E_z(z)\exp[i(kx-\omega t)]k; \tag{5}$$

由 Maxwell 方程组可得到超晶格中液晶层内磁场 $\vec{H}$ 满足的微分方程为

$$\nabla^2\vec{H}=\mu_0\vec{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \tag{6}$$

以及电场和磁场分量之间的关系为

$$\begin{cases}E_x(z)=-\varepsilon_{zx}k\dfrac{H_y(z)}{\varepsilon_0\omega(\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz})}+i\dfrac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_0\omega(\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz})}\dfrac{\mathrm{d}H_y(z)}{\mathrm{d}z},\\ E_z(z)=\varepsilon_{xx}k\dfrac{H_y(z)}{\varepsilon_0\omega(\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz})}-i\dfrac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_0\omega(\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz})}\dfrac{\mathrm{d}H_y(z)}{\mathrm{d}z};\end{cases} \tag{7}$$

式(6)中 ε_0 为真空介电常数. 将式(4)代入方程(6)可得磁场分量 H_y 在超晶格液晶区域中满足的波动方程

$$\frac{d^2}{dz^2}H_y(z)-(k^2-\varepsilon_{yy}\frac{\omega^2}{C^2})H_y(z)=0, \tag{8}$$

用 ε_1 来代替方程(7)和(8)中的 ε_{xx}，ε_{yy}，ε_{zz}，零替代它们中的 ε_{zx} 就得到在超晶格的电介质中

H_y 所满足的波动方程和电场与磁场的关系

$$\frac{d^2}{dz^2}H_y(z) - (k^2 - \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{C^2})H_y(z) = 0, \tag{9}$$

$$E_x(z) = -\frac{1}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0}\frac{dH_y(z)}{dz}i, \quad E_z(z) = -\frac{k}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0}H_y(z); \tag{10}$$

在 $Z<0$ 区域的反铁磁晶体中，磁场 $\vec{H}$满足微分方程也可由 Maxwell 方程组得到

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{H}) - \nabla^2\vec{H} = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\vec{\mu}\cdot\vec{H}. \tag{11}$$

用式(3)和(4)代入式(11)得

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(\mu^L + \chi^{NL}|H_y^2|)H_y = 0. \tag{12}$$

铁磁晶体内电场和磁场分量之间的关系为

$$E_x(z) = -\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\frac{dH_y(z)}{dz}i, \quad E_z(z) = -\frac{k}{\omega\varepsilon_0}H_y(z); \tag{13}$$

这样就得到了导波系统中三个不同区域内的 H_y 所满足的波动方程以及电场和磁场之间的相互关系.

2 色散关系

在超晶格的液晶和电介质中 TM 波的传播服从波动方程式(9)和(10). 由于超晶格的周期性质和表面波的定域性，满足方程(9)和(10)的解一定服从 Floquet-Bloch 理论，并随$|z|$值增大而衰减. 先求方程(9)满足条件的解. 它具有下列一般形式

$$H_y(z) = A_1\exp(\alpha_1 z) + A_2\exp(-\alpha_1 z), \tag{14}$$

式(14)中 $\alpha_1^2 = k^2 - \varepsilon_1\frac{\omega^2}{c^2}$，物理上要求 α_1 必须是一个正实数. 考虑超晶格的周期性式(14)必须具有 Bloch 波的形式

$$H_y(z) = e^{ik_3 z}H_y(k_3, z), \tag{15}$$

式(15)中 $H_y(k_3,z)$满足

$$H_y(k_3, z) = H_y(k_3, z + L), \tag{16}$$

式(16)中 L 是超晶格的空间周期. 将式(14)和(15)结合可得

$$H_y(k_3, z) = e^{-ik_3 z}[A_1\exp(\alpha_1 z) + A_2\exp(-\alpha_1 z)], \tag{17}$$

根据式(16)的要求可将式(17)写成 L 的显式，得到

$$H_y(k_3, z) = e^{-ik_3(z-nL)}\{A_1\exp[\alpha_1(z - nL)] + A_2\exp[-\alpha_1(z - nl)]\}, \tag{18}$$

式(18)中 $nL<z<nl+d_1 \quad (n=0,1,2,\ldots)$，这样 $H_y(k_3,z)$就满足了空间周期性条件式(16). 将式(18)代入式(15)得到超晶格电介质中 TM 波磁场的表达式

$$H_y(z) = e^{-ik_3(nL)}\{A_1\exp[\alpha_1(z - nL)] + A_2\exp[-\alpha_1(z - nl]\}, \tag{19}$$

显然，表面波具有空间定域性，真实的磁场解应满足自然边界条件 $\lim_{z\to\infty}H_y(z)=0$. 为了明确磁场的周期性和定域性，用 $-\beta=-(\beta_1+i\beta_2)$，其中 $\beta_1>0$ 来替代(19)中的 ik_3 得

$$H_y(z)=e^{-i\beta nL}\{A_1\exp[\alpha_1(z-nL)]+A_2\exp[-\alpha_1(z-nl)]\},\tag{20}$$

式(20)和方程(9)满足 Floquet-Bloch 理论和自然边界条件的特解. 超晶界电介质中电场的具体形式可由式(20)和式(10)联立而得.

用相同的方法可求得超晶格液晶区域中磁场的特解形式

$$H_y(z)=\exp(-\beta nL)\{B_1\exp[\alpha_2(z-nL-d_1)]+B_2\exp[-\alpha_1(z-nl-d_1]\},\tag{21}$$

式(21)中 $nL+d_1<z<(n+1)L$, $\alpha_2^2=k^2-\varepsilon_{yy}\frac{\omega^2}{c^2}$. 物理上要求 α_2 是一正实数. 用式(21)和式(7)可得超晶格的液晶中电场的特解形式.

考虑 $Z<0$ 区域的反铁磁晶体，波动方程(13)可进一步发展成为

$$\frac{d^2H_y(z)}{dz^2}-(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\mu_L)H_y(z)+\frac{\omega^2}{c^2}\chi^{NL}|H_y(z)|^2H_y(z)=0,\tag{22}$$

这一方程的解为[4]

$$H_y(z)=\frac{\alpha_0c}{\omega}(\frac{2}{\chi^{NL}})^{1/2}\sec h[\alpha_0(z-z_0)],\tag{23}$$

式中 $\alpha_0^2=k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\mu^L$, z_0 为 $H_y(z)$ 的峰值位置，它可由边界条件定出. 由式(23)和式(13)可得反铁磁晶体中电场的特解.

根据电场和磁场的边值条件，不同介质边界上电场和磁场的切向定量分别连续，即在 $z=0, z=nL, z=nL+d_1$ 边界上 H_y, E_x 分量连续. 把上述求出的电磁场特解形式代入边界连续性条件得

$$A_1+A_2=\frac{\alpha_0c}{\omega}[\frac{2}{\chi^{NL}}]^{1/2}\sec h[-\alpha_0z_0],\tag{24a}$$

$$-\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}[A_1-A_2]=\frac{\alpha^0c}{\omega}[\frac{2}{\chi^{NL}}]^{1/2}\alpha_0\sec h[-\alpha_0z]\tanh[-\alpha_0z_0],\tag{24b}$$

$$\varepsilon_{xz}k\frac{B_1+B_2}{\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}}=0,\tag{24c}$$

$$\varepsilon_{zz}\alpha_2\frac{B_1-B_2}{\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}}=-\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}[A_1\exp(\alpha_1d_1)-A_2\exp(-\alpha_1d_1)],\tag{24d}$$

$$A_1\exp(\alpha_1d_1)+A_2\exp(-\alpha_1d_1)=B_1+B_2,\tag{24e}$$

$$-\varepsilon_{xz}k\frac{B_1\exp(\alpha_2d_2)+B_2\exp(-\alpha_2d_2)}{\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}}\frac{1}{\varepsilon_1}\exp(-\beta_1L)\sin(-\beta_2L)\alpha_1(A_1-A_2),\tag{24f}$$

$$-\varepsilon_{zz}\alpha_2\frac{B_1\exp(\alpha_2d_2)-B_2\exp(-\alpha_2d_2)}{\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}}=-\frac{1}{\varepsilon_1}\exp(-\beta_1L)\cos(-\beta_2L)\alpha_1(A_1-A_2),\tag{24g}$$

$$B_1\exp(\alpha_2d_2)+B_2\exp(-\alpha_2d_2)=\exp(-\beta_1L)\cos(-\beta_2L)(A_1+A_2),\tag{24h}$$

$$\exp(-\beta_1L)\sin(-\beta_2L)(A_1+A_2)=0;\tag{24i}$$

分析方程(24c)和(24i)可以发现方程组(24)应该在下列 4 种情况下分别求解：

(1) 当 $B_1+B_2=0, \sin(-\beta_2 L)=0$ 时，即 $B_1=-B_2, \beta_2=m\pi/L$ 时

(2) 当 $B_1+B_2=0, A_1+A_2=0$ 时，即 $B_1=-B_2, A_1=-A_2$

(3) 当 $\varepsilon_{xz}=0, A_1+A_2=0$ 时，即 $\theta=0$，或 $\pi/2, A_1=-A_2$ 时

(4) $\varepsilon_{xz}=0$，且 $\sin(-\beta_2 L)=0$，即 $\theta=0$ 或 $\pi/2; \beta_2=\pi m/L \quad (m=1,2..)$

在情况(1)，(2)，(3)时求解方程组(24)，发现各磁场和电场的分量均为零. 所以在这三种情况下超晶格和反铁磁体的界面上非线性表面波不存在. 情况(1)和(2)就是 $\varepsilon_{xz}\neq0$，式(2)表明 $\varepsilon_{xz}\neq0$ 就是 θ 不是 0 或 $\pi/2$. 所以得到重要结论：当超晶格中液晶晶轴与 Z 轴夹角 θ 不为 0 或 $\pi/2$ 时超晶格与反铁磁体界面不能引导非线性 TM 表面波. 这一结论与 $Z<0$ 区域为 $\varepsilon<0$ 介质的情况相同[10].

当情况(4)时发现 m 为偶数时有解：

$$A_1(1+F)(e^{\alpha_1 d_1}-e^{-\beta_1 L}e^{-\alpha_2 d_2})+A_2(1-F)(e^{\alpha_1 d_1}-e^{-\beta_1 L}e^{-\alpha_2 d_2})=0, \tag{25a}$$

$$A_1(1-F)(e^{\alpha_1 d_1}-e^{-\beta_1 L}e^{-\alpha_2 d_2})+A_2(1+F)(e^{\alpha_1 d_1}-e^{-\beta_1 L}e^{-\alpha_2 d_2})=0, \tag{25b}$$

$$1-\left[\frac{\frac{-\alpha_1}{\varepsilon_1}(A_1-A_2)}{\alpha_0(A_1+A_2)}\right]^2=\left[\frac{A_1+A_2}{\frac{\alpha_0 c}{\omega}(\frac{2}{\chi^{NL}})^{1/2}}\right]^2; \tag{25c}$$

其中 $F=\frac{\alpha_1\varepsilon^{xx}}{\alpha_2\varepsilon_1}$. 如果我们给定 β_1 的值，消去这组解的第 1 和第 2 个方程中的 A_1 和 A_2 就能决定 K, ω 和 A_1/A_2 的值. 再通过第 3 个方程又能确定 A_1 和 A_2 的值. 用方程组(24)就能得到 B_1, B_2 和 z_0. 把式(25)中的 A_1 和 A_2 消去就得到系统表面波色散方程：

$$\begin{aligned}&(1+F)^2(e^{\alpha_1 d_1}-e^{-\beta_1 L}e^{-\alpha_2 d_2})(e^{-\alpha_1 d_1}-e^{-\beta_1 L}e^{\alpha_2 d_2})-\\&(1-F)^2(e^{\alpha_1 d_1}-e^{-\beta_1 L}e^{-\alpha_2 d_2})(e^{-\alpha_1 d_1}-e^{-\beta_1 L}e^{\alpha_2 d_2})=0.\end{aligned} \tag{26}$$

需要特别指出的是方程(26)描述的特殊界面上非线性表面波的色散关系并不是“非线性”的，即色散关系与导波强度无关，也即表面波“感受”到的有效折射率不是导波强度的函数. 实际上反铁磁晶体的非线性效应对表面导波的影响体现在导波区域振幅 A_1 和 A_2 上，这被方程组(25)中的第 3 个方程明显反映出来.

由于只有在超晶格液晶晶轴与 z 轴夹角 θ 为 0 或 $\pi/2$ 时，非线性 TM 表面波才能在所讨论的导波系统中传播. 而 θ 取 0 或 $\pi/2$ 这两 个值的结论就使我们必须探讨非线性 TM 波在系统中传播的稳定性. 就这 一问题的讨论将是我们新的研究工作.

参考文献

1 Mihalache D, Wang R P, *Phys. Lett.*, 1988, **A132**: 59

2 Lomtev A I, Bolsginskii L G. *Ukr. Fiz.*, 1986, Zh. **31**: **34** (In Russian)

3 Hang S, Tsai C H. *Solid state Commun.*, 1984, **52**: 953

4 王　奇，施介龙，**中国科学 A 辑**，1994，**24**(10)：1108

5 Boardman A D, Wang Q, Nikitov S A. *IEEE Trags*, 1994, **30**: 14

6 Emtage P R, Danial M R. *Phys. Rev.*, 1984, **B29**: 212

7 Vetrov S Y, Shabanov A V. *Sov. Phys.* 1992, JEPT**74**(4): 719

8 Almeida N S, Nills D L. *Phys. Rev. B*1987, **136**(4): 2015
9 蒋仁培,等. 微波与铁氧体理论和技术. 北京:科学出版社,1989
10 王 奇,金 哲. 应用物理学报,待发表

NONLINEAR SURFACE ELECTROMAGNETIC TM WAVES PROPAGATING AT THE INTERFACE OF ANTIFERROMAGNETIC CRYSTAL AND A SUPERLATTICE*

Jin Zhe Wang Qi
(*Department of Physics, College of Science, Shanghai University, Shanghai* 201800, *China*)

Abstract The characteristics of nonlinear surface electromagnetic TM waves propagating at the interface of antiferromagnetic crystal and a superlattice were studied. The dispersion relation of the wave was given and the influence of the angle θ of the liquid crystal orientation in the superlattice on the propagation of the wave was studied. In was found, when this wave exists in the waveguide the θ must be 0 or $\pi/2$. Numerical analysis of the frequency characteristics of the nonlinear TM waves was made through the field distribution pictures.

Key words nonlinear wave, superlattice, antiferromagnetic crystal

* The project supported by the National Natural Science Foundation of CHina