169—173

含潜热能量的地表热平衡方程与统计解

张海兴 张建奇 白长城 周荣星
（西安电子科技大学技术物理系，陕西，西安，710071）

P423.2

A **摘要** 提出了含蒸发潜热能量交换项的地表单元能量热平衡方程，并采取了温度线性化的处理、选取地表吸收率和地表与大气的热交换阻力之倒数为独立的随机变量，并假设两者均服从正态分布，解出地表温度和地表以下不变地温之差 T 的概率密度表示式．计算出地表的平均温度，并与实测值对比，取得较为满意的结果．

关键词 统计模型，热平衡方程，概率密度． 地表热

引言

N. B. Yoset[1]等利用统计方法确定地表的辐射特性，采用简化处理方法，在地表单元（地表面积元）热平衡方程中只包含太阳辐照项、地表自身辐射项和地表向地下传导项．

本文提出的地表单元热平衡方程在文献[1]基础上还考虑了蒸发潜热项，天空辐照项和地表与大气间的传导项．成为较完整的地表单元的热平衡方程．并对蒸发潜热项采取了温度线性化的数学处理，使其显含温度；对地表自身辐射项，采取温度线性近似，保证了一定的精度．

(3)

本文选取地表吸收率和地表与大气间交换阻力之倒数为独立的随机变量．后者在数学处理中很方便．假设两者为正态分布，直接解出温差 T 的概率密度表示式．从而求出地表的平均温度．由此得到适用于多种地表的计算平均温度的表示式和计算平均温度的简便方法．经计算与实测比较，其结果令人满意．利用平均温度还可计算地表的红外辐射量．

1 地表热平衡方程

较完整的地表单元能量热平衡方程为

$$\alpha E_s+\epsilon E_k+M_g+H+LE+G=0, \tag{1}$$

式(1)中 αE_s 为地表单元吸收太阳的辐照能量，α 为地表单元的短波吸收率，E_s 为太阳在地表上辐照度，ϵE_k 为地表单元吸收天空的辐照能量，ϵ 为地表单元的长波发射率，E_k 为天空在地表上的辐照度，$M_g=\epsilon\sigma T_g^4$ 为地表单元在温度为 T_g 时的辐出度，σ 为斯蒂芬——玻耳兹曼常数．

设地表以下不变的地温为 T_0，取 T_g 与 T_0 之差为 $T=T_g-T_0$，当考虑温度的线性近似时，有

$$M_g\simeq\epsilon\sigma(T_0^4+4T_0^3T). \tag{2}$$

地表单元与大气间的显热交换能量 H 为

本文1995年2月15日收到，修改稿1995年6月15日收到

$$H=\rho C_p\frac{T_g-T_a}{R_a},\tag{3}$$

式(3)中 ρ 为空气质量密度，C_p 为空气的定压比热，T_a 为空气温度，R_a 为地表与大气间的交换阻力，其倒数直接与风速成比例．

地表单元与大气间的潜热交换能量 LE 为

$$LE=\rho L\frac{q_g-q_a}{R_a},\tag{4}$$

式(4)中 L 为水的汽化潜热，q_g 和 q_a 分别为地表单元处和大气比湿．利用比湿表示式可将其化为

$$LE=\frac{3.799W_e\rho L}{R_aP_a}\left[e^{\frac{17.27(T_g-273.15)}{T_g-35.86}}-(RH)e^{\frac{17.27(T_a-273.15)}{T_a-35.86)}}\right],\tag{5}$$

式(5)中，P_a 为大气压强．W_e 为地表单元含水量因子．RH 为空气的相对湿度．上式可进一步化为

$$LE=\frac{3.799W_e\rho L}{R_aP_a}\cdot e^{\frac{17.27(T_a-273.5)}{T_a-35.86}}\cdot\left[e^{\frac{17.27(T_g-273.15)}{T_g-35.86}-\frac{17.27(T_a-273.15)}{T_a-35.86}}-RH\right].\tag{6}$$

为使该式显含温度，将指数项展开得

$$\begin{aligned}LE&=\frac{3.799W_e\rho L}{R_aP_a}\cdot e^{\frac{17.27(T_a-273.15)}{T_a-35.86}}\left\{\frac{4098}{(T_a-35.86)}\cdot\right.\\&\left.\cdot\left[\frac{(T_g-T_a)}{(T_a-35.86)}-\frac{(T_g-T_a)^2}{(T_a-35.86)^2}+\cdots\cdots\right]-RH\right\},\\LE&\simeq\frac{3.799W_e\rho L}{R_aP_a}\cdot e^{\frac{17.27(T_a-273.15)}{T_a-35.86}}\cdot\left[\frac{4098(T_g-T_a)}{(T_a-35.86)^2}-RH\right]\\&=\frac{3.799W_e\rho L}{R_aP_a}[K(T_g-T_a)+D];\end{aligned}$$

其中，

$$\mathrm{K}=\frac{4089}{(\mathrm{T}_a-35.86)^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{17.27(\mathrm{T}_a-273.15)}{\mathrm{T}_a-35.86}},$$

$$\mathrm{D}=-(\mathrm{RH})\cdot\mathrm{e}^{\frac{17.27(\mathrm{T}_a-273.15)}{\mathrm{T}_a-35.86}}.$$

$G=\lambda(T_g-T_0)$ 为地表单元向地内的传导能量，λ 为地表以下介质单位长度的热传导系数．

若规定能量指向地表为正，离开地表为负，则能量平衡方程可写为

$$\begin{aligned}&\alpha E_s+\varepsilon E_k-\varepsilon\sigma(T_0^4+4T_0^3T)-\rho C_p\frac{(T+T_0-T_a)}{R_a}\\&-\frac{3.799We\rho LK}{R_aP_a}(T+T_0-T_a)-\frac{3.799We\rho LD}{R_aP_a}-\lambda T=0.\end{aligned}\tag{7}$$

2 *T* 的概率密度表示式

将式(7)简化为

$$\alpha E_s+(\varepsilon E_k-\varepsilon\sigma T_0^4)-\frac{1}{R_a}(\rho C_p+\frac{3.799We\rho LK}{P_a})(T_0-T_a)$$

$$-\frac{3.799W_e\rho LD}{R_aP_a}=[(4\varepsilon\sigma T_0^3+\lambda)+\frac{1}{R_a}(\rho C_p+\frac{3.799We\rho LK}{P_a})]T\ . \tag{8}$$

将 T 表示为

$$T=\frac{aY+b}{CX+d}-e\ , \tag{9}$$

式(9)中，令 $X=1/R_a, Y=\alpha$

$$a=Es,$$

$$b=(\varepsilon E_k-\varepsilon\sigma T_0^4)+[T_0-T_a+\frac{\frac{3.799W_e\rho LD}{Pa}}{\rho C_p+\frac{3.799W_e\rho LK}{P_a}}]\cdot$$

$$(4\varepsilon\sigma T_0^3+\lambda),$$

及

$$c=\rho C_p+\frac{3.799W_e\rho LK}{P_a},$$

$$d=4\varepsilon\sigma T_0^3+\lambda,$$

$$e=T_0-T_a+\frac{\frac{3.799W_e\rho LD}{P_a}}{\rho C_p+\frac{3.799W_e\rho LK}{P_a}}\ .$$

假设随机变量 X，Y 均服从正态分布，则有

$$T=\frac{\xi}{\eta}-e\ , \tag{10}$$

式(10)中，$\xi=aY+b$，服从正态分布，其平均值和方差为 ay_0+b，$a^2\sigma_y^2$. $\eta=CX+d$，服从正态分布，其平均值和方差为 CX_0+d，$C^2\sigma_x^2$.

T 的概率分布函数可写为

$$F(T)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y ac}\int_0^\infty e^{-\frac{(X-CX_0-d)^2}{2\sigma_x^2C^2}}\mathrm{d}x\int_0^{(T+e)x}e^{-\frac{(y-ay_0-b)^2}{2\sigma y_2 a^2}}\mathrm{d}y, \tag{11}$$

按 T 的概率密度 $P(T)=\mathrm{d}F(T)/\mathrm{d}T$，求得

$$P(T)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y ac}\int_0^\infty xe^{-(AX^2+BX+C')}\mathrm{d}x, \tag{12}$$

式(12)中，

$$A=\frac{1}{2C^2\sigma_x^2}+\frac{(T+e)^2}{2a^2\sigma_y^2},$$

$$B=-\frac{(CX_0+d)}{C^2\sigma_x^2}-\frac{(T+e)(ay_0+b)}{a^2\sigma_y^2},$$

$$C'=\frac{(cX_0+d)^2}{2C^2\sigma_x^2}+\frac{(ay_0+b)^2}{2a^2\sigma_y^2}.$$

对式(12)积分，得 T 的概率密度的最后表示式为

$$P(T)=\frac{e^{-C'}}{2\pi\sigma_x\sigma_y ac}\left\{\frac{1}{A}+\frac{B\pi^{\frac{1}{2}}}{2A^{3/2}}\cdot e^{\frac{B^2}{4A}}\cdot erf(\frac{B}{2A^{1/2}})\right\}, \tag{13}$$

式(13)中 T 的平均值和均方差可按下式求得

$$\overline{T}=\int_{-\infty}^{\infty}TP(T)dT, \tag{14}$$

$$\sigma_T=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{(T-\overline{T})^2P(T)}\mathrm{d}T. \tag{15}$$

对于夜晚，太阳在地表上的辐照度 $E_s=0$，按上述同样步骤可得 T 的概率密度表示式为

$$P(T)=\frac{b}{\sqrt{2\pi}\sigma_x C(T+e)^2}\cdot e^{-\frac{(\frac{b}{T+e}-CX_0-d)^2}{2\sigma_x^2C^2}}, \tag{16}$$

式(16)，b、c、d、e 的表示式同式(9).

3 实验验证

按式(14)可计算地表的平均温度，从而可计算地表的红外辐射量. 某地表瞬时的平均温度取决于包含在 $P(T)$ 中其它量的平均值，其它量的平均值采用 1994 年 5 月 25 日我们在西安郊区实测数据和进一步计算的数据. 其中气象数据见表 1. 另外的数据有：地下不变恒温 $T_0=293(\mathrm{K})$，土壤含水量因子 $W_e=0.298\sim0.438$，空气密度 $\rho=1.14(\mathrm{kg/m^3})$，空气定压比热 $C_P=1.0057\times10^3(\mathrm{J/kg\cdot K})$. 地表长波发射率 $\varepsilon=0.85$，土壤单位长导热系数 $\lambda=0.66(\mathrm{W/m^2\cdot K})$. 斯蒂芬-玻耳兹曼常数 $\sigma=5.67\times10^{-8}(\mathrm{W/m^2\cdot K^4})$. 水的汽化潜热按公式 $L=[597.4-0.57(T_a-273.15)\times4180(\mathrm{J/kg})$ 计算. 天空辐照度按公式 $E_k=\sigma T_a^4[0.61+0.05\sqrt{e_a}](\mathrm{W/m^2})$ 计算，其中 e_a 为地面处水蒸汽压强(100Pa). 天空辐照度按 Kahle 公式计算. 取 $\sigma_x=0.05$，$\sigma_y=0.01$.

平均温度计算的结果与利用辐射温度计测量的结果见表 2，两者相比，相差 0.5～4.2(K). 用文献[1]的简化计算方法计算的结果列于表 2，误差较大. 由计算的平均温度算得的地表平均辐射亮度(8～14μm)约为 45W/m²·sr.

表 1 气象参量

Table 1 The meteorological parameters

北京时间	大气温度 T_a(K)	相对湿度 RH(%)	大气压强 P_a(100Pa)	风速 (m/s)
14	296.5	60.5	956.2	1.21
15	298.5	61.5	956.1	0.59
16	297.3	63.1	956.0	0.34
17	297.0	62.9	956.0	0.56
18	296.9	65.8	956.0	0.59
19	295.2	68.2	957.1	0.82
20	294.0	68.0	957.3	0.91
21	293.0	69.8	957.8	0.95
22	292.8	75.3	957.2	0.62
23	291.0	81.5	957.5	0.71
24	290.3	85.9	957.2	0.79

表 2　计算结果

Table 2 The calculated results

北京时间	地表温度计算值 T_g(K)	地表温度测量值 T'_g(K)	地表温度均方差 σT(K)	差值 T'_g-T_g(K)	地表温度简化计算值 T_g(简) (K)	差值 T'_g-T_g(简) (K)
14	298.2	302.4	0.76	4.2	298.2	4.2
15	299.2	301.6	0.88	2.4	298.9	2.7
16	298.4	300.1	0.71	1.7	295.2	4.9
17	297.7	298.7	0.65	1.0	292.7	5.0
18	296.8	297.7	0.84	1.1	290.7	7.2
19	294.1	294.6	0.27	0.5	289.0	5.6
20	292.0	293.8	0.03	1.8	286.2	7.6
21	292.0	291.4	0.04	−0.6	283.5	7.9
22	292.0	290.7	0.05	−1.3	297.6	−6.9
23	292.0	290.2	0.15	−1.8	277.7	12.5
24	289.0	298.2	0.18	−3.1	277.5	20.7

参考文献

1 Ben-Yosef N, Wilner K, Fuchs I, *et al*. *Appl. Opt*. 1985, **24**: 4167

2 左大康, 谢贤群. **农田蒸发研究**, 北京: 气象出版社, 1993, 111

3 复旦大学数学系. **概率论与数理统计**, 上海: 上海科学技术出版社, 1961, 8

4 白长城, 张建奇, 张海兴, 顾国琪. **西安电子科技大学学报**, 1993, **20**(3): 72~78

THE HEAT BALANCE EQUATION OF GROUND SURFACE INCLUDING LATENT ENERGY AND ITS STATISTICAL SOLUTION

Zhang Haixing　Zhang Jianqi　Bai Changcheng　Zhou Rongxing

(Department of Technical Physics, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract　The heat balance equation of an element of ground surface including the term of latent heat exchange was presented. The method of temperature linearization was used. By selecting the absorptivity of ground surface and the reciprocal of heat exchange resistance between ground surface and atmosphere as random noncorrelated variables, and assuming that the two variables obey normal distribution, the expression of the probability density of temperature difference between ground surface and constant-temperature underground was derived. The average temperature of ground surface was calculated. Compared with the data measured, the result is satisfactory.

Key words　statistical model, heat balance equation, probability density.