96,15(3) 161-163

第15卷第3期 1996年6月 | 红外与毫米波学报 J. Infrared Millim. Waves | Vol. 15, No. 3 June, 1996

1996 PI874A 013 003

构造自傅里叶函数的"两项积"法则

华建文 刘立人 李国强

(中国科学院上海光学精密机械研究所,上海,201800)

O174.22

A **摘要** 给出了构造自傅里叶函数的"两项积"法则,并讨论了它的优缺点.它和Caola法则互为补充.

关键词 傅里叶变换,函数构造.

161-240

引言

自傅里叶函数就是其傅里叶变换与原函数相同的函数.人们原来只知道两个傅里叶函数,即高斯函数和狄拉克梳状函数.1991年Caola[1]指出有无穷多的自傅里叶函数,他给出了构造自傅里叶函数的一种法则.1992年Lohmann和Mendlovic[2]在光学领域里使用类似的法则产生了光学中的其它几个自变换函数,如离散自傅里叶函数,自分数Talbot函数等.还给出了能实现自傅里叶变换的奇数次循环的光学变换装置[3].1994年,Mendlovic,Lohmann和Ozaktas[4]又把它推广到分数自傅里叶变换,并对自傅里叶变换函数的成像特性作了较为详细的研究[5].Cincotti,Santarriero[6]及Lakhlakia[7]等人也作了这方面的研究.1995年Lipson[8]和Banerjee[9]等人给出了光学领域中两个自傅里叶函数的实例.本文给出了自傅里叶函数的又一种构造法,即"两项积"法则,并讨论了它的优缺点.它与Caola法则互为补充.

1 构造自傅里叶函数的"两项积"法则

自傅里叶函数可用数学语言表达,若$f(x)$满足

$$f^{F}(u)=\int f(x)e^{-i2\pi ux}\mathrm{d}x=f(u), \tag{1}$$

则$f(x)$为自傅里叶函数.在自傅里叶函数的发展过程中,处于主导地位的是Caola[1]给出的法则.它表述为:对于任意可傅里叶变换的函数$g(x)$,下列函数

$$f(x)=g(x)+g^{F}(x)+g(-x)+g^{F}(-x), \tag{2}$$

便是自傅里叶函数.式(2)中$g^{F}(x)$表示函数$g(x)$的傅里叶变换.但在式(2)中,发生函数$g(x)$如果为一奇函数,则$f(x)$将恒为0,得到的自傅里叶函数没有实际意义.有时候,$g(x)$即使不是纯粹的奇函数,如$[1+\sin(fx)]/2$,它表示一块正弦光栅,代入式(2)产生自傅里叶函数也没有多少实用意义.光栅的信号项为$\sin(fx)$,而得到的结果却和$g(x)$等于1/2得到的结果一样,完全失去了发生函数的光栅特征信号.为了克服这种构造法则的不足,我们利

* 国家自然科学基金资助项目
本文1996年1月19日收到,修改稿1996年4月2日收到

用两项积来产生自傅里叶函数，简称为"两项积"法则.表达如下：设 $g(x)$为任意的可傅里叶变换的函数，则函数

$$f(x)=g(x)g(-x)+g^F(x)*g^F(-x) \tag{3}$$

为自傅里叶函数.式(3)中符号"＊"表示卷积.这一法则的证明和 Caola 方法的证明一样简单.因为式(3)的傅里叶变换

$$\begin{aligned}f^F(u)&=g^F(u)*g^F(-u)+[g^F(u)]^F[g^F(-u)]^F\\&=g^F(u)*g^F(-u)+g(-u)g(u)\\&=g(u)g(-u)+g^F(u)*g^F(-u),\end{aligned} \tag{4}$$

令式(3)中的 x 为 u，并与式(4)对照，显然有

$$f^F(u)=f(u).$$

这符合自傅里叶函数的定义(见式(1)).因而式(3)两项积所构成的函数是自傅里叶函数.其实例如下：

例(1)
$$g(x)=x\exp[-\pi(ax)^2],$$
$$f(x)=-x^2\exp(-2\pi a^2x^2)-\frac{1-\pi(x/a)^2}{8\pi a^3}\exp(-\frac{\pi u^2}{2a^2});$$

例(2)
$$g(x)=x\ \mathrm{rect}(x/2),$$
$$f(x)=-x^2\mathrm{rect}(x/2)+\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi^3x^3}-\frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2x^2}-\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}.$$

例(1)见图1，图1中 $g(x)$表示发生函数，取 $a=0.28$.它是高斯函数与线性函数的乘积，是一个奇函数；$f(x)$表示按"两项积"法则，即式(3)构成的自傅里叶函数.

例(2)中，发生函数 $g(x)$是线性函数 x 在区间$[-1,1]$的一段，它显然也是一个奇函数，由它按"两项积"构成的自傅里叶函数 $f(x)$仍然具有丰富的涵义(见图2).

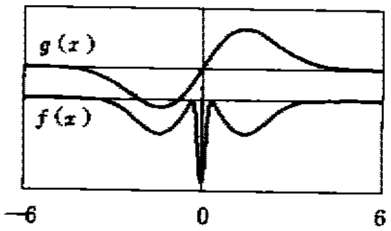

图1 自傅里叶函数例1
Fig. 1 The SFF example (1)

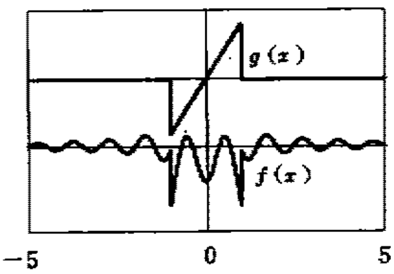

图2 自傅里叶函数例2
Fig. 2 The SFF example (2)

2 对"两项积"法则的讨论

"两项积"法则的优点是用偶函数、奇函数、或非奇非偶函数作为发生函数都能产生有意

义的自傅里叶函数. 但它的不足之处是，当 $g(x)$ 为一些特定的非对称断续函数时，如

$$g(x)=\mathrm{rect}(x-1/2)$$

或

$$g(x)=\mathrm{comb}(x-1/4)$$

等，也会产生无意义的自傅里叶函数. 因此，本文提出"两项积"法则的目的不是完全取代 Caola 的法测. 它们是一对简单而相互补充的构造法. 使用时可根据需要合理选用. 另外也可以用这两种构造法则的组合来产生另一些复杂的构造法则，例如：

$$f(x)=g^2(x)g(-x)+g(x)g^2(-x)$$
$$+g^F(x)*g^F(x)*g^F(-x)+g^F(x)*g^F(-x)*g^F(-x)$$

或

$$f(x)=g(x)+g(x)g(-x)+g(-x)+g^F(x)+g^F(x)*g^F(-x)+g^F(-x).$$

显然，如合理使用两种方法的组合，既可消除 $g(x)$ 为奇函数时带来的问题，又可消除 $g(x)$ 为非对称断续函数时产生的问题.

这些构造法则的用途和 Caola 的法则一样，都是用来构造自傅里叶函数. 自傅里叶函数在光学方面的用处见文献 2～9.

参考文献

1 Caola M J. *J. Phys. A*, 1991; **24**: L1143～L1144
2 Lohmann A W, mendlovic D. *J. Opt. Soc. Am. A*. 1992; **9**(9): 2009～2012
3 Lohmann A W, Mendlovic D. *Optics Communications*, 1992; **93**: 25～26
4 Medlovic D, *et al*. *Optics*, *Communications*, 1994; **105**: 36～38
5 Lohmann A W, Mendlovic D. *Applied Optics*, 1994; **33**(2): 153～157
6 Cincotti G, Gori F, Santarsiero M. *J. Phys. A*. 1992; **25**: L1191～L1193
7 Lakhtakia A. *Optik*, 1993; **94**(1): 51～52
8 Lipson S G, *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993; **10**(9): 2088～2089
9 Banerjee P, Poon T C. *J. Opt. Soc*, *Am. A*, 1995; **12**(2): 425～426

CONSTRUCTING SFFs BY TWO TERMS OF PRODUCT

Hua Jianwen　Liu Liren　Li Guoqiang

(Information Optics Laboratory, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, *China)*

Abstract　The recipe of constructing SFFs by two terms of product was given, which is complementary to the Caola's. Its advantages and shortcomings were dealt with.

Key words　Fourier transfosm, function construction.