

一维非均匀介质中的孤子

Fritz K. Kneubühl, 冯剑虹

(Infrared Physics Laboratory, Physics Department, ETH (Swiss Federal Institute of Technology) CH-8093, Zürich, Switzerland)

非均匀介质中的孤子和孤波对于相对论量子力学和量子电子学(例如红外孤子激光器的研究)是很有意义的. 本文在简单介绍孤子的数学方法之后, 根据由折射率和非谐势函数修正的非线性 Klein-Gordon 方程, 对非均匀一维非线性介质中的孤子和孤波进行了理论研究, 特别强调了周期调制的情况. 并采用了不同的近似运算求解孤波和孤子, 将算得的典型解绘制成图, 以直观地说明孤子和孤波的特征.

关键词: 孤子, 孤波, 非均匀介质.

1 前 言

在应用数学和应用物理的许多研究领域, 例如流体力学, 基本粒子物理和激光科学中, 孤子和孤波代表了非线性系统的稳定态^[1~11]. “孤波”一词是 Scott Russel^[13] 在上世纪提出的, 而“孤子”一词则是 Zabusky 和 Kruskal^[12] 在本世纪六十年代中期引入的. 在激光物理中, 孤子的研究和应用主要在于光导纤维和波导管^[18], 单模光导纤维中孤子方式的脉冲传输有可能大大改善远距离数据传输性能^[18~15]. 总之, 孤子和孤波对近红外研究具有现实意义.

统观对孤子的研究报道^[1~11], 我们可以发现, 以往的研究工作均集中于均匀介质中的孤子, 极少见到对周期性的或其它非均匀介质中孤子的研究报道. 一些数学家, 理论物理学家和激光专家都证实了这个问题, 因此, 我们就开始了对这一课题的研究. 本文报道了我们的初步结果, 阐明了一维非均匀介质中孤子的运动和发展. 由于周期性介质中的孤子与分布布喇格反射器(DBR)和分布反馈(DFB)激光器中的波传播和波放大有关^[19~21], 因而它成为我们的研究重点.

在以下的讨论中, 我们用以研究孤子和孤波的根据是描述质量为 m 的自由相对论粒子的 Klein-Gordon 方程^[22, 23]

$$u_{xx} - c^{-2}u_{tt} = k_c^2 u, \quad (1)$$

式中 c 为真空中的光速, k_c 为康普顿圆波数, 并有

$$k_c = 2\pi m_0 c / h. \quad (2)$$

Klein-Gordon 方程(1)也对应于波导中的电磁波电场方程^[19], 在这种情况下, c 表示均匀介

质(如真空)中的电磁辐射速度,

$$k_c = \omega_c / c = 2\pi\nu_0 / c \quad (3)$$

由截止圆频率 ω_c 或截止频率 ν_0 所确定. Klein-Gordon 方程的色散关系由下式给出:

$$\omega = c[k_c^2 + k^2]^{1/2} = [\omega_c^2 + c^2k^2]^{1/2}, \quad (4)$$

式中 ω 为圆频率, k 为圆波数. 相速度 v_{ph} 和群速度 v_{gr} 有如下关系:

$$v_{gr} = c^2 / v_{ph} = c\omega^{-1}[\omega^2 - \omega_c^2]^{1/2}. \quad (5)$$

由于 Klein-Gordon 方程是线性的, 因此它的解包括孤子或孤波, 但可以用于描述均匀介质中波的传播. 为使式(1)既能适用于孤子, 也能适用于非均匀介质, 我们将 Klein-Gordon 方程改写为

$$u_{xx} - n(x)^2 c^{-2} u_{tt} = k_c^2 \mu(x) \cdot \frac{d\Phi(u)}{du}, \quad (6)$$

式中 $\Phi(u)$ 为势函数, 而 $n(x)$ 和 $\mu(x)$ 则表示介质的非均匀性. 这里, $n(x)$ 为有效折射率, 它与有效介电函数 $\epsilon(x)$ 和有效介电极化率的关系为

$$n(x)^2 = \epsilon(x) = 1 + \chi(x). \quad (7)$$

$\mu(x)$ 则代表势

$$\Phi = \Phi(u, x) = \mu(x)\Phi(u) \quad (8)$$

的空间调制. 一般表达式(6)在下列条件下可简化为标准的 Klein-Gordon 方程.

$$n(x) = \mu(x) = 1; \quad \Phi(u) = \frac{1}{2} u^2. \quad (9)$$

在下文中, 我们将对介质特性的不同类型的空间调制来讨论孤子方程及其解, 这些类型分别为: (1) 均匀介质, 即 $n(x) = \mu(x) = 1$; (2) 均匀势, 即 $\mu(x) = 1$; (3) 均匀折射率, 即 $n(x) = 1$; (4) 最后是非均匀折射率和势. (1) 的情况对应于普通孤子理论.

2 均匀介质中的孤子

均匀介质中的孤子是非线性 Klein-Gordon 方程

$$u_{xx} - c^{-2} u_{tt} = k_c^2 \frac{d\Phi(u)}{du} \quad (10)$$

的解, 设 $\mu(x) = n(x) = 1$, 即可由一般方程式(6)求出它的解. 方程(10)代表了孤子和孤波的非线性波方程的通用形式, 因此, 已对这些方程进行了详细的讨论, 参见文献[1~12], 它们作为我们下面讨论非均匀介质中孤子和孤波的基础. 所以, 我们在表1中概括地列出标准非线性 Klein-Gordon 方程(10), 它们的势 $\Phi(u)$ 及对应的孤波和孤子 $u(x, t)$, 势 $\Phi(u)$ 可由下列条件

$$\Phi(0) = \frac{d\Phi}{du}(0) = 0 \quad (11)$$

归一化. 方程(10)的基本解为

$$u(x, t) = F(y), \quad y = x \pm \beta ct. \quad (12)$$

式(12)中 $F(y)$ 为形状函数, 由以下关系式确定:

$$[\Phi(F) + \Phi_0]^{-1/2} dF = \pm 2^{1/2} \gamma k_c dy, \quad (13)$$

式中 $\gamma = [1 - \beta^2]^{-1/2}$, Φ_0 为常数. 如果势 $\Phi(u)$ 可以写成^[24]

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \Psi(u)^2, \quad (14)$$

则 $\phi(u)$ 被称为“超对称 (supersymmetric)”或写成“ss”，这意味着当 $\phi_0=0$ 时，方程(10)有简单解

$$\Psi(F)^{-1} dF = \pm \gamma k_c dy. \quad (15)$$

典型的形状函数有孤波(例如 sech)，扭结及反扭结(例如 $\pm \tan^{-1}$ 和 $\pm \tanh$)^[3,4] 和“呼吸子”。表 1 基本上包括我们提及的前两种类型。

3 非均匀折射率

我们开始讨论非均匀介质中的孤子。先引入折射率 n 的空间变化，假设一般方程式(6)中的 $\mu(x)=1$ ，我们可得到

$$u_{xx} - \sigma^{-2} n(x)^2 u_{tt} = k_c^2 \frac{d\Phi(u)}{du}. \quad (16)$$

方程(16)的解可从下式确定的特征线着手^[25,26]：

$$(dt/dx)^2 - \sigma^{-2} n(x)^2 = 0, \quad (17)$$

它的解为

$$w = w_{1,2} = \pm N(x) - ct, \quad (18)$$

其中 $dN(x)/dx = n(x)$ 。特征线就是由 w_1 或 w_2 等于常数为条件而确定的空间-时间曲线，这意味着特征线上点的运动速度为

$$v = dx/dt = \pm \sigma/n(x). \quad (19)$$

3.1 折射率的线性变化

利用以上特征线可以求出方程(16)对于任意势 $\phi(u)$ 和线性变化折射率 $n(x)$ 的精确解

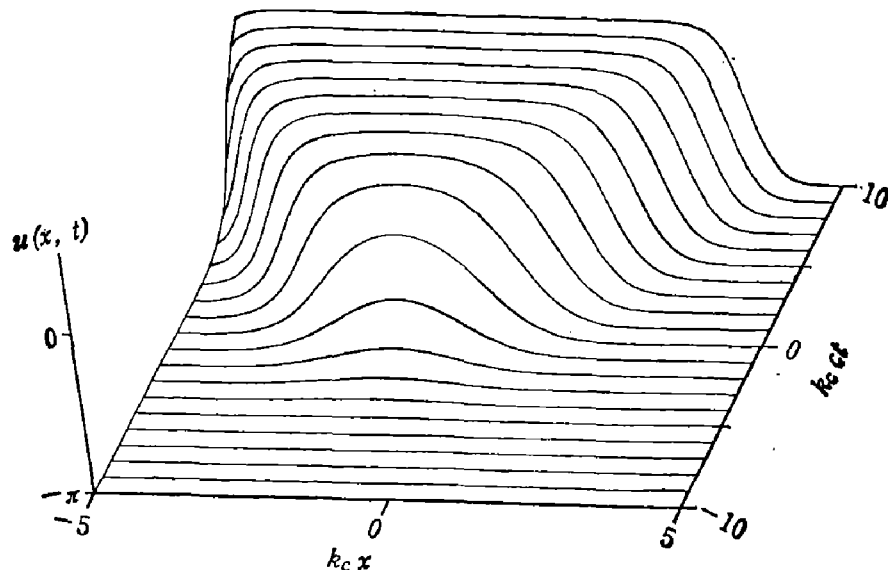


图 1 由方程(21) ($n_1=1$) 的解确定的非均匀折射率 $n(x)$ 的扭结和反扭结孤波 $u(x, t)$
 Fig. 1 Kink-antikink solitary wave $u(x, t)$ for inhomogeneous refractive index $n(x)$ determined by the solution of equation (21) ($n_1=1$)

为

$$\begin{cases} n(x) = 1 + n_1 k_c x, & N(x) = x + 1/2 n_1 k_c x^2, \\ u(x, t) = E(w) = E[\pm N(x) - ct], \\ (d\Phi/dE)^{-1} dE = \pm (k_c/n_1) dw. \end{cases} \quad (20)$$

作为一个实例,我们考虑熟知的正弦-Gordon 势,求出相应的解为

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 \sin^2 \frac{u}{2}, & d\Phi/du &= + \sin u, \\ u(x, t) &= E(w) = E[\pm N(x) - ct] \\ &= \pm 2 \arctan \exp(k_c/n_1) w. \end{aligned} \quad (21)$$

这些解如图 1 所示.

3.2 折射率的近似二次变化

为了求出方程(16)的折射率 $n(x)$ 非线性变化的解,假设

$$u(x, t) = H(z) = H[M(x) - ct], \quad (22)$$

由此得到基本方程(16)的修正形式为

$$H''(z) [M'(x)^2 - n(x)^2] + H'(z) M''(x) = k_c^2 \frac{d\Phi}{dH}. \quad (23)$$

根据式(23),我们能够计算折射率 $n(x)$ 的近似二次变化的孤波,折射率方程为

$$n(x) = [1 + (\eta k_c x)^2]^{1/2}, \quad (24)$$

计算得到下列关系式

$$M(x) = \pm 1/2 \eta k_c x^2, \quad (25a)$$

$$H''(z) - \eta k_c H'(z) = -k_c^2 \frac{d\Phi(H)}{dH}. \quad (25b)$$

根据式(25b),可以给定 $\phi(H)$ 算得 $H(z)$, 或者,亦可给定 $H(z)$ 算得 $\phi(H)$. 这样,我们对式(24)确定的折射率推导出以下势-孤子对:

$$\begin{cases} \Phi(u) = (\cos u - 1) - 4\eta \left(\cos \frac{u}{2} - 1 \right) = -\sin^2 \frac{u}{2} + 8\eta \sin^2 \frac{u}{4}, \\ u(x, t) = H(z) = 4 \arctan \exp k_c z. \end{cases} \quad (26)$$

3.3 Floquet 型处理方法

更普遍的一种方法类似于对周期性 Hill 和 Mathien 方程的 Floquet 处理方法^[26], 这种方法能对多种类型折射率变化求解方程(16). 它的特点是把电场表示为两个不同变量函数的乘积,即

$$u(x, t) = H(z) \cdot G(x) = H[M(x) - \beta ct] \cdot G(x), \quad (27)$$

式中 $z = M(x) - \beta ct$, $M'(x) > 0$. 把这一乘积代入方程(16),可得到关系式

$$H'' \cdot G \cdot [M'^2 - \beta^2 n^2] + H' \cdot G^{-1} \cdot \frac{d}{dx} (M' G^2) + H \cdot G'' = k_c^2 \frac{d\Phi}{du} (u = H \cdot G). \quad (28)$$

如果出 $\phi(u)$ 的形式为

$$\Phi(u) = \Phi_0 + \frac{1}{2} a u^2 + \frac{b}{r+1} u^{r+1}, \quad r \geq 2, \quad (29)$$

我们可以得出式(28)的解. 这里,设

$$M'^2 - \beta^2 n^2 = C_1 G^{r-1}, \quad (30)$$

$$\frac{d}{dx} (M'G^2) = C_2 k_c G^{r+1}, \quad (31)$$

$$G'' - a^2 k_c^2 G = C_3 k_c^2 G^r. \quad (32)$$

由此可将式(28)变换成 $H(z)$ 的微分方程

$$C_1 H'' + C_2 k_c H' + C_3 k_c^2 H = b_r k_c^2 H^r. \quad (33)$$

假定 $M'G^2 = 1$, 进一步简化式(30)~(33), 可得到方程组

$$G'' = a^2 k_c^2 G + C_3 k_c^2 G^r, \quad (32)$$

$$M' = G^{-2}, \quad (34)$$

$$n = \beta^{-1} (G^{-4} - C_1 G^{r-1})^{1/2}, \quad (35)$$

$$H'' = -(C_3/C_1) k_c^2 H + (b/C_1) k_c^2 H^r. \quad (36)$$

式(32)与(36)相似, 我们在表2列出部分解, 表3列出该方程组的一些解, 它包括了折射率 $n(x)$ 周期变化的情况。

3.4 经典解的微扰

有可能把周期性介质中的孤子的解看成是均匀介质中的孤波方程的经典解加上一个小的微扰。举例说明: 我们列出一种类似于最近用于研究均匀介质中非线性 Klein-Gordon 方程调制不稳定性所采用的一种方法^[28]。为此我们假定极化率 χ 很小, 并且是周期性的, 即

$$\begin{cases} \chi(x) \ll 1, \\ \chi(x) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \chi(s) \exp(i2sk_B x), \quad \chi(-s) = \chi^*(s), \end{cases} \quad (37)$$

式中 k_B 是布喇格圆频率。作为均匀介质中经典的孤波解, 我们考虑载波 $J(t)$ 应服从

$$J'' = -\omega_c^2 \frac{d\Phi}{dJ}(J). \quad (38)$$

由式(38)可得

$$\frac{1}{2} (J')^2 + \omega_c^2 \Phi(J) = \omega_c^2 \Phi_{\max}. \quad (39)$$

我们假定 $J(t)$ 在 $[\phi_{\max} - \phi(J)] = 0$ 的两个单零点 J_{\pm} 之间振荡, 即 $J_- \leq J \leq J_+$, 由此可给出圆频率 $\omega(\phi_{\max})$ 和周期 $T(\phi_{\max})$ 为^[28]

$$T(\phi_{\max}) = \frac{2\pi}{\omega(\phi_{\max})} = \frac{d\Gamma(\phi_{\max})}{d\phi_{\max}} = (2/\omega_c) \int_{J_-}^{J_+} \{2[\phi_{\max} - \Phi(J)]\}^{-1/2} dJ, \quad (40)$$

$$\Gamma(\phi_{\max}) = \frac{2}{\omega_c} \int_{J_-}^{J_+} \{2[\phi_{\max} - \Phi(L)]\}^{+1/2} dJ = \omega_c^{-2} \int_T (J')^2 dt. \quad (41)$$

其中最后的积分是对整个周期 T 的积分。振荡的 $J(t)$ 可由傅里叶级数表示为

$$J(t) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} J(r) \exp[ir\omega(\phi_{\max})t]. \quad (42)$$

为了计算周期介质中的孤波, 我们选择了以下近似:

$$u(x, t) = J(t) + L(x, t), \quad (43)$$

式中周期性微扰为^[24]

$$L(x, t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} L(s, t) \exp(is2k_B x). \quad (44)$$

由此可得到以下有关 $L(s, t)$ 的方程:

$$\frac{d^2}{dt^2} L(s, t) + \left[4s^2 \omega_B^2 + \omega_c^2 \frac{d\Phi(J)}{dJ^2} \right] \cdot L(s, t) = \chi(s) \omega_c^2 \frac{d\Phi(J)}{dJ}, \quad (45)$$

或

$$\frac{d^2}{dt^2} L(s, t) + [4s^2 \omega_B^2 - (J'''/J')] \cdot L(s, t) = -\chi(s) J'', \quad (46)$$

式中 $\omega_B = ck_B$ 为布喇格圆频率。利用下列近似可作进一步简化:

$$\Phi(J) \approx \frac{1}{2} J \frac{d\Phi}{dJ}(0) + \frac{1}{6} J^3 \frac{d^3\Phi}{dJ^3}(0). \quad (47)$$

如将式(47)用于关系式(44), 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L(s, t)}{dt^2} + \left[4s^2 \omega_B^2 + \omega_c^2 \frac{d\Phi}{dJ^2}(0) + \omega_c^2 \frac{d^3\Phi}{dJ^3}(0) \cdot J(t) \right] \cdot L(s, t) \\ = \chi(s) \cdot \omega_c^2 \cdot \frac{d^2\Phi}{dJ^2}(0) \cdot J(t). \end{aligned} \quad (48)$$

$J=0$ 时势 ϕ 的二阶和三阶导数均列于表1, 对大部分势 ϕ , $J=0$ 时三阶导数为零。在这些情况下, 式(48)代表了 $L(s, t)$ 的非均匀线性微分方程。对应的常系数均匀线性微分方程则描述一个具有下列圆频率的谐振:

$$\Omega(s) = \left[\omega_c^2 \frac{d\Phi}{dJ^2}(0) + 4s^2 \omega_B^2 \right]^{1/2}, \quad (49)$$

相关的圆波数为

$$k(s) = 2sk_B. \quad (50)$$

对于 $J=0$ 时 ϕ 的三阶导数趋于零的情况, 非均匀方程(48)的解为

$$\begin{aligned} L(x, t) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} J(r) \chi(s) \omega_c^2 \frac{d^2\Phi}{dJ^2}(0) [\Omega(s) - r^2 \omega(\Phi_{\max})^2]^{-1} \cdot \exp i[2sk_B x \\ + r\omega(\Phi_{\max})t] + \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (L_{s1} \exp i[2sk_B x - \Omega(s)t] + L_{s2} \exp i[2sk_B x + \Omega(s)t]). \end{aligned} \quad (51)$$

如果 $L(s, t)$ 和 $J(t)$ 的频率一致, 即

$$\Omega(s) = r \cdot \omega(\Phi_{\max}), \quad r = 1, 2, 3, 4, \dots, s = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (52)$$

这时非均匀线性微分方程(48)发生谐振, 在这种情况下, 必须考虑式(45)中 J 的非线性项。

4 非均匀非线性

下面我们讨论在具有均匀折射率 n 的介质中由非均匀非线性势所确定的孤波, 这些孤波应遵守非线性 Klein-Gordon 方程

$$u_{xx} - \sigma^2 u_{tt} = k_c^2 \mu(x) \frac{d\Phi(u)}{du}. \quad (53)$$

式(53)是假定 $n(x) = 1$, 由一般式(6)推导出来的。假定

$$u(x, t) = H(z) = H[M(x) - \beta ct], \quad z = M(x) - \beta ct \quad (54)$$

即可求解方程(53), 得到关系式

$$H'' [(M')^2 - \beta^2] + H' M'' = k_c^2 \mu \frac{d\Phi}{du}. \quad (55)$$

我们用以下分离方法

$$M'' = -O_1 k_c [(M')^2 - \beta^2], \quad (56)$$

$$\mu = -O_2 [(M')^2 - \beta^2] = + (O_2/O_1 k_c) M'', \quad (57)$$

$$H'' = O_1 k_c H' - O_2 k_c^2 \frac{d\Phi}{dH}, \quad (58)$$

对方程(55)进行试解。对于给定的 $\mu(x)$ ，我们可由式(56)和(57)算出 $M(x)$ 。作为例子，我们取

$$\mu(x) = \mu_0 \operatorname{sech}^2 \alpha k_c x, \quad (59)$$

即可得到

$$\begin{cases} M(x) = \beta (\alpha k_c)^{-1} \ln \cosh (\alpha k_c x), \\ O_1 = \alpha / \beta, O_2 = \mu_0 / \beta^2. \end{cases} \quad (60)$$

方程(58)的解 $H(z)$ 由势 $\phi(u)$ 确定，这样，势

$$\Phi(u) = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{8} u^4 \quad (61)$$

就意味着

$$H(z) = 1 + \tanh(\alpha k_c z), \quad (62)$$

并有

$$\mu_0 = \alpha^3, \beta = 1/2. \quad (63)$$

假定

$$u(x, t) = G(x) + F(y), \quad (64)$$

可得到方程(53)的另一种形式的解，式(64)中 $y = x \pm \beta ct$ ，并且 F 作为小的微扰，由这一假设可得到

$$G'' + \gamma^2 F'' = k_c^2 \mu \frac{d\Phi}{du} (u = G + F) \approx k_c^2 \mu \frac{d\Phi}{dG} (G) + k_c^2 \left[\mu \frac{d\Phi}{dG^2} (G) \right] \cdot F. \quad (65)$$

为得到近似解，我们假设

$$\mu \frac{d^2\Phi}{dG^2} (G) = -\alpha^2, \quad (66)$$

式中 α 为常数，式(66)意味着

$$G'' + \alpha^2 k_c^2 \frac{d\Phi/dG}{d^2\Phi/dG^2} = -[\gamma^2 F'' + \alpha^2 k_c^2 F] = C. \quad (67)$$

如果常数 C 为零， $F(y)$ 就有振荡解

$$F(y) = F_0 \sin(\alpha \gamma k_c y - \varphi_F), \quad (68)$$

其中 φ_F 为相位。函数 $G(x)$ 由势 $\phi(u)$ 确定。在

$$\Phi(u) = u^{r+1} \quad (69)$$

的情况下，函数 $G(x)$ 也是振荡的，即

$$G'' + r^{-1} \alpha^2 k_c^2 G \approx 0, \quad (70)$$

$$G(x) \approx G_0 \sin(r^{-1/2} \alpha k_c x - \varphi_G). \quad (71)$$

对应的调制函数 $\mu(x)$ 为

$$\mu(x) = -r^{-1}(r+1)^{-1} \alpha^2 G_0^{(1-r)} \sin^{(1-r)}(r^{-1/2} \alpha k_c x - \varphi_G). \quad (72)$$

考虑到式(71)和(72), r 应满足条件

$$r = 2s/2m + 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (73)$$

5 混合非均匀性

最后,我们讨论一般方程(6)在非均匀折射率 $n(x)$ 和非均匀 $\mu(x)$ 情况下的孤波. 对于以下条件

$$n^2(x) = \cos^2 \delta + \sin^2 \delta \cos^2 kx, \quad (74)$$

$$\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 \sin^2 kx, \quad (75)$$

可以有简单解. 在这些条件下,我们取

$$u(x, t) = F(y) = F(x \pm \beta ct), \quad y = x \pm \beta ct, \quad (76)$$

首先得到关系式

$$F''(1 - \beta^2 n^2) = \mu k_c^2 \frac{2d\Phi}{dF}. \quad (77)$$

联合式(74), (75)与(77), 可得

$$\beta = [1 + (\mu_0/\mu_1) \sin^2 \delta]^{-1/2} \quad (78)$$

和

$$F'' = (\mu_0 + \mu_1 \sin^2 \delta) k_c^2 \frac{d\Phi}{dF}. \quad (79)$$

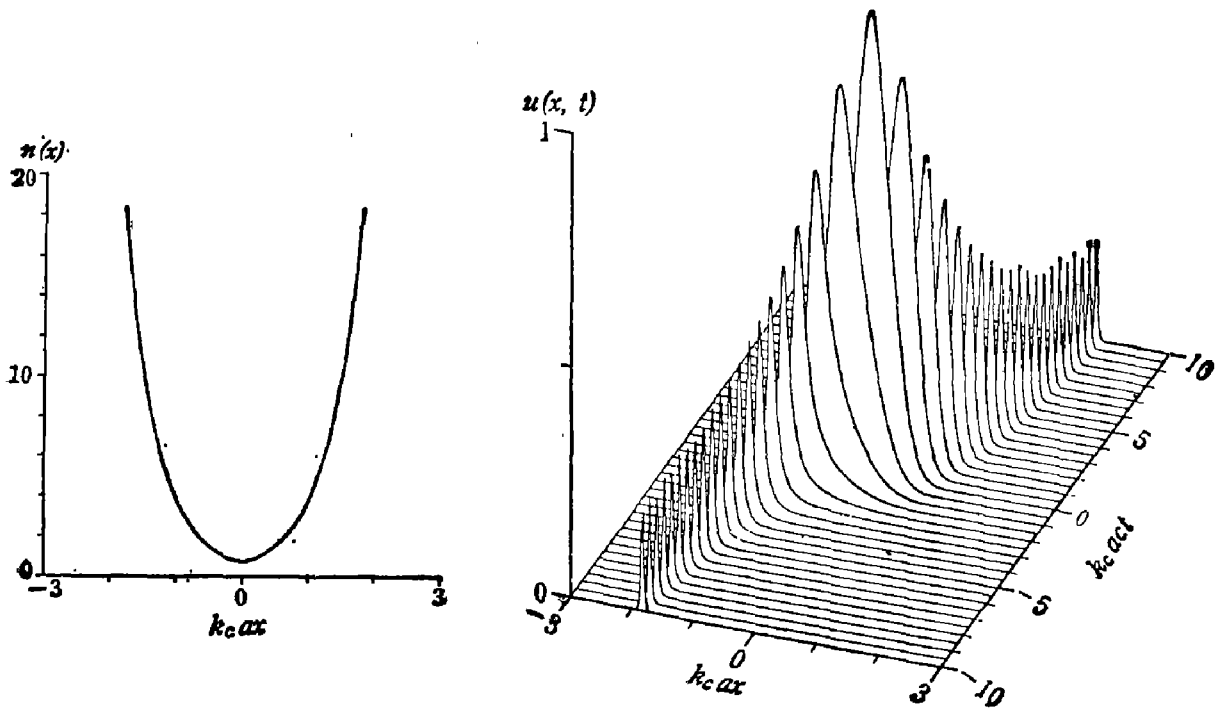


图2 非均匀折射率 $n(x)$ 的解 $u(x, t)$, 方程在表3列出, 参数为 $k=5, c_1 > 0$
 ($c_1=1/2, b=-3a^2, n_0=1, t_0=0$)

Fig. 2 Soliton $u(x, t)$ for inhomogeneous refractive index $n(x)$ as listed in Table 3
 for the parameters: $k=5, c_1 > 0 (c_1=1/2, b=-3a^2, n_0=1, t_0=0)$

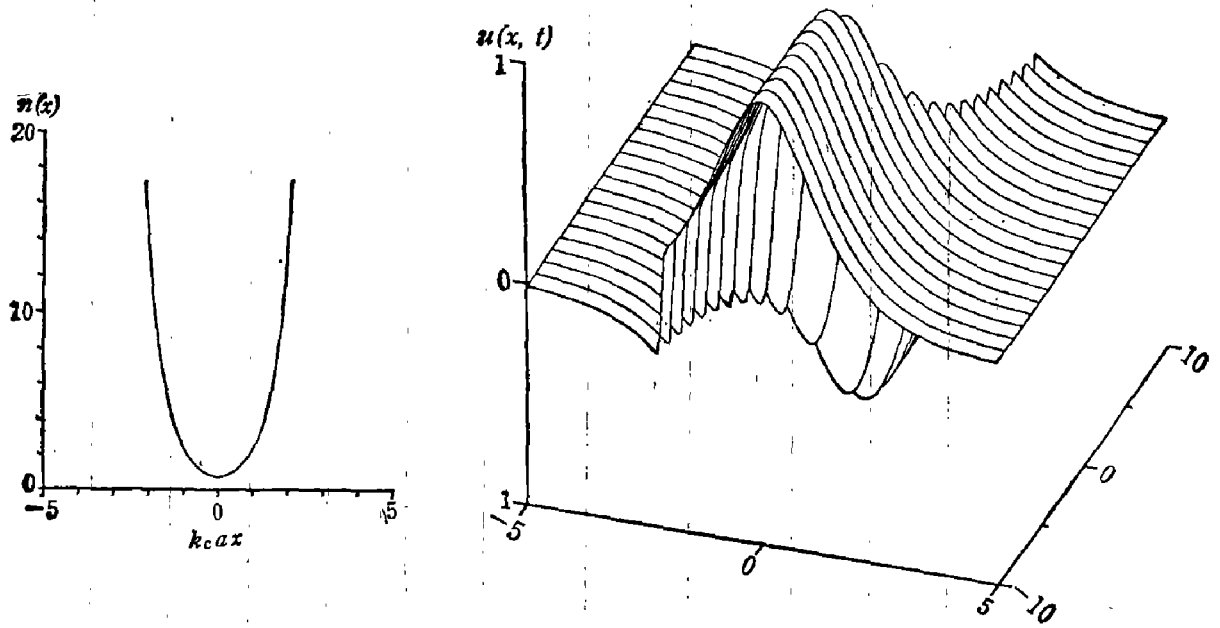


图3 非均匀折射率 $n(x)$ 的扭结孤波 $u(x, t)$ 函数如表3所示, 参数为

$$k=3, C_1 < 0 (C_1 = -1/2, b = -2a^2, n_0=1, t_0=0)$$

Fig. 3 Kink solitary wave $u(x, t)$ for inhomogeneous refractive index $n(x)$ as listed in Table 3 for the parameters: $k=3, C_1 < 0 (C_1 = -1/2, b = -2a^2, n_0=1, t_0=0)$

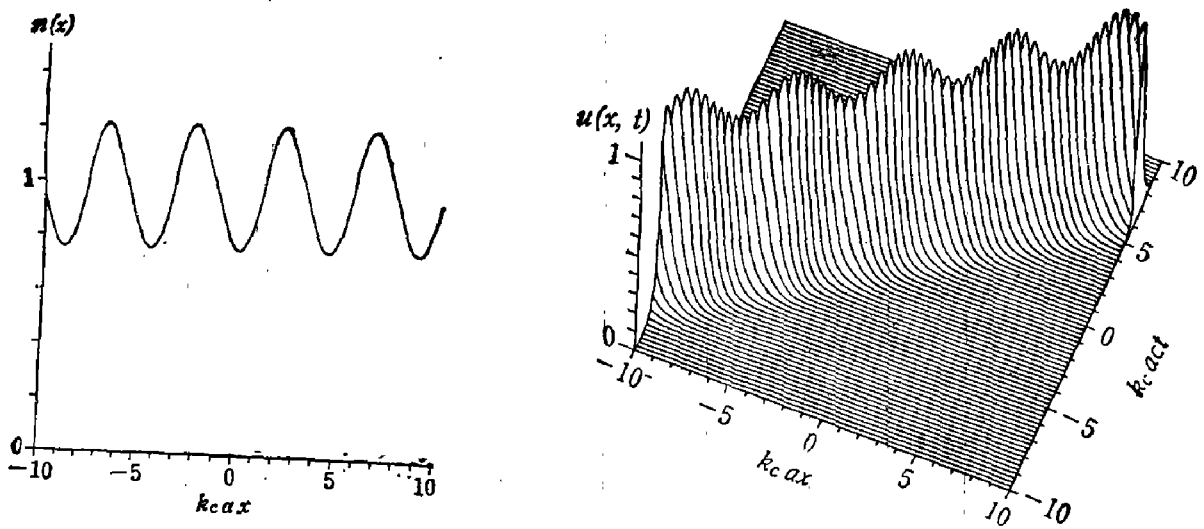


图4 周期性折射率 $n(x)$ 的解 $u(x, t)$ 函数如表3所示, 参数为 $k=3, C_1 > 0$

$$(C_1 = 0.1, \alpha_1 = 1.2, b = -2a^2, n_0=1, t_0=0)$$

Fig. 4 Soliton $u(x, t)$ for periodic refractive index $n(x)$ as listed in Table 3 for the parameters: $k=3, C_1 > 0 (C_1 = 0.1, \alpha_1 = 1.2, b = -2a^2, n_0=1, t_0=0)$

用上文所述办法, 对于给定的 $\phi(u)$ 可以求解方程(79).

使用简化式(53)的同样方法, 可求解方程(6). 同样取

$$u(x, t) = H(z) = H[M(x) - \beta ct], \tag{54}$$

可得到方程组

$$M'' = -C_1 k_0 [(M')^2 - \beta^2 n^2], \tag{56a}$$

$$\mu = -C_2 [(M')^2 - \beta^2 n^2], \tag{57a}$$

表1 标准非线性 Klein-Gordon 方程(10)的孤波解
Table 1 Solitary solutions of standard nonlinear Klein-Gordon equation (10)

$$(y = x \pm \beta ct - x_0, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, x_0 = \text{arbitrary const.})$$

type	symm.	$\phi(u)$	$\frac{d\phi(u)}{du}$	$\frac{d^2\phi(u=0)}{du^2}$	$\frac{d^3\phi(u=0)}{du^3}$	soliton u	ref.
Hertz	ss	0	0	0	0		
Klein-Gordon	ss	$\frac{1}{2}u^2$	u	1	0		
Sine-Gordon	ss	$2 \sin^2 \frac{u}{2}$	$\sin u$	1	0	$4 \cdot \tan^{-1} [\exp(\pm k_c \gamma y)] + n\pi$ ($n=0, \pm 2, \pm 4, \dots$)	1, p. 10
	nss	$-2 \sin^2 \frac{u}{2}$	$-\sin u$	-1	0	$4 \tan^{-1} [\exp(\pm k_c \gamma y)] + n\pi$ ($n=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$)	
arctan	ss	$\frac{1}{2} \sin^4 u$	$\frac{1}{2} \sin(2u) - \frac{1}{4} \sin(4u)$	0	0	$\frac{\pi}{2} \pm \tan^{-1}(k_c \gamma y) + n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	
ϕ^4 -model	ss	$\frac{1}{2}u^2(2-u)^2$	$2u^2 - 6u^2 + 4u$	4	-12	$1 \pm \tan h(k_c \gamma y)$	24
	nss	$-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4$	$-u + u^3$	-1	0	$\pm \tanh\left(\frac{k_c \gamma y}{\sqrt{2}}\right)$	1, p. 6
ϕ^6 -model	nss	$\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4$	$u - u^3$	1	0	$\pm \sqrt{2} \cdot \sec h(k_c \gamma y)$	1, p. 6
	ss	$\frac{1}{8}u^2(2-u^2)^2$	$\frac{3}{4}u^5 - 2u^3 + u$	1	0	$[1 \pm \tan h(k_c \gamma y)]^{1/2}$	24
Casahorran ($n=3, 4, 5$)	ss	$\frac{1}{2n^2}u^2(2-u^n)^2$	$\frac{1}{n^2}u(2-u^n)(2-[n+1]u^n)$	$\frac{4}{n^2}$	0	$[1 \pm \tan h(k_c \gamma y)]^{1/n}$	24
sech ($n=1, 2, 3, \dots$)	nss	$\frac{1}{2}u^2(1-u^n)$	$u - \frac{n+2}{2}u^{n+1}$	1	0	$(\pm 1)^{n+1} \cdot \sec h^{2/n}\left(\frac{n}{2}k_c \gamma y\right)$	
Lorentz	nss	$2u^2 - 8u^4$	$6u^2 - 8u^3$	0	12	$\frac{1}{1 + (k_c \gamma y)^2}$	

$$H'' = C_1 k_c H' - C_2 k_c^2 \frac{d\Phi}{dH}, \tag{58}$$

分别对应于式(56)~(58). 这些关系式可用来计算方程(6)在以下调制形式的解:

$$n^2(x) = \cos^2 \delta + \sin^2 \delta \operatorname{sech}^2 \alpha k_c x, \tag{80}$$

$$\mu(x) = \mu_0 \operatorname{sech}^2 \alpha k_c x. \tag{81}$$

$M(x)$ 及常数 C_1 和 C_2 可通过联立(56a), (57a), (80)和(81)推得, 结果为

$$\begin{cases} M(x) = (\beta/\alpha k_c) \cos \delta \cdot \ln \cosh \alpha k_c x, \\ C_1 = (\alpha/\beta) \cos \delta; \quad C_2 = \mu_0/\beta. \end{cases} \tag{82}$$

式(58)中 $H(z)$ 仍由势 $\phi(u)$ 确定. 对于由式(61)给定的势, 得到 $H(z)$ 的解对应于式(62)

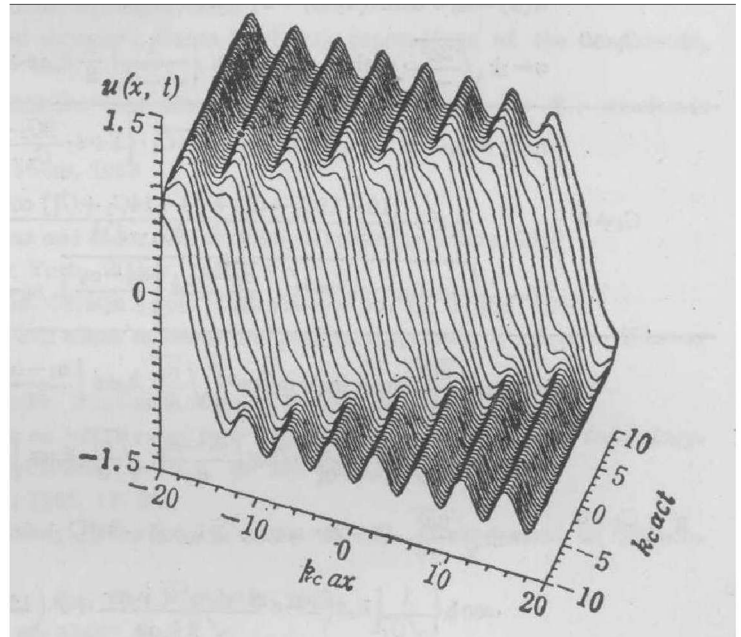
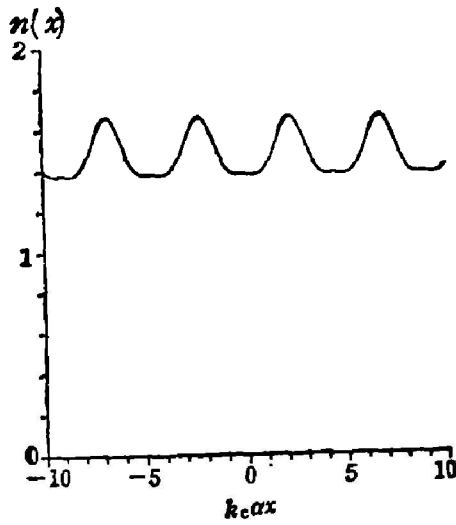


图5 周期性折射率 $n(x)$ 的扭曲孤波, 参数如表3所示: $k=3, C_1 < 0 (C_1 = -1, \alpha_1 = 1.3, b = -a^2, n_0 = 1, t_0 = 0)$

Fig. 5 Kink solitary wave $u(x, t)$ for periodic refractive index $n(x)$ as listed in Table 3 for the parameters: $k=3, C_1 < 0, (C_1 = -1, \alpha_1 = 1.3, b = -a^2, n_0 = 1, t_0 = 0)$

表2 方程 $f'' = Af + Bf^k (A, B$ 为常数) 的解, $cu(u|m)$ 为 Jacobian 椭圆函数^[27]

Table 2 Solutions of equation $f'' = Af + Bf^k (A, B = \text{constant}), cn(u|m)$ is the Jacobian elliptic function^[27]

k	A	B	type	$f(x)$
2, 3, ...	$A > 0$	$B < 0$	solitary	$\pm \left(\frac{(k+1)A}{2B} \right)^{\frac{1}{k-1}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{k-1}} \left(\frac{k-1}{2} \sqrt{A} (x-x_0) \right)$ $x_0 = \text{arbitrary constant}$
3	$A < 0$	$B > 0$	kink	$\pm \sqrt{\frac{-A}{B}} \tanh \left[\sqrt{\frac{-A}{2}} (x-x_0) \right]$
8	$A > 0$	$B < 0$	periodic	$\pm \sqrt{\frac{ 2A }{-B}} \cdot \left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\alpha_1 A} (x-x_0) \mid \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ $\alpha_2 = 1 - \alpha_1, \frac{1}{2} < \alpha_1 < 1,$

表3 由方程(32)~(36)确定的非均匀折射率解($b < 0$, $n_0 = 1/\beta$, t_0 为任意常数, $cn(u|m)$ 代表Jacobian椭圆函数^[27], $\Pi(n; u|m)$ 为第三类椭圆积分

Table 3 Solutions for inhomogeneous refractive index determined by system of Eqs. (32) to (36) ($b < 0$, $n_0 = 1/\beta$, $t_0 = \text{arbitrary const.}$), $cn(u|m)$ represents the Jacobian elliptic function^[27], $\Pi(n; u|m)$ the elliptic integral of the third kind^[27]

k	C_1	$n(x)$ and $u(x, t)$
5	$C_1 > 0$	$n(x) = n_0 \sqrt{\cosh^2(2k_c ax) - C_1 \cdot \operatorname{sech}^2(2k_c ax)}$ $u(x, t) = \pm \sqrt{\frac{3a^2}{-b}} \cdot \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2k_c ax) \cdot \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{3}{C_1}} \left[(\sinh(2k_c ax) - 2k_c a \frac{c}{n_0} (t - t_0)) \right] \right\}$
3	$C_1 < 0$	$n(x) = n_0 \sqrt{\cosh^4(k_c ax) - C_1 \cdot \operatorname{sech}^2(k_c ax)}$ $u = \pm \sqrt{\frac{2a^2}{-b}} \cdot \operatorname{sech}(k_c ax) \cdot \tanh \left\{ \frac{1}{\sqrt{-C_1}} \left[\frac{1}{2} k_c ax + \frac{1}{4} \sinh(2k_c ax) - k_c a \frac{c}{n_0} (t - t_0) \right] \right\}$
$C_1 \neq 0$		$n(x) = n_0 \sqrt{G^4 - C_1 \cdot G^2} = n_0 \sqrt{1 - C_1} \cdot \left\{ 1 + \varepsilon \cdot \frac{2C_1 + 4}{C_1 - 1} \cos(\sqrt{2} k_c ax) \right.$ $\left. + \varepsilon^2 \cdot \frac{(12 - 18C_1 - C_1^2) + (4 - 14C_1 + C_1^2) \cos(\sqrt{8} k_c ax)}{(C_1 - 1)^2} + O[\varepsilon^3] \right\}$ $G = \sqrt{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} k_c ax \left \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \right. \right)}, \alpha_2 = 2 - \alpha_1, 1 < \alpha_1 < 2$
3	$C_1 > 0$	$u = \pm \sqrt{\frac{2a^2}{-b}} \left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} k_c ax \left \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \right. \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ $\cdot \operatorname{sech} \left[\frac{1}{\sqrt{C_1}} \left(\sqrt{\frac{2}{a^2}} \cdot \Pi \times \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}; \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} k_c ax \left \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \right. \right) - \frac{k_c a c (t - t_0)}{n_0} \right) \right]$ $= \pm \sqrt{\frac{2a^2}{-b}} \cdot \left\{ 1 + 2\varepsilon \cdot \cos(\sqrt{2} k_c ax) - 2\varepsilon^2 [1 + \sin^2(\sqrt{2} k_c ax)] + O[\varepsilon^3] \right\}$ $\cdot \operatorname{sech} \left\{ \frac{1}{\sqrt{C_1}} \left[k_c x \left(1 - \varepsilon \frac{4 \sin \sqrt{2} k_c ax}{\sqrt{2} k_c ax} + \varepsilon^2 \left(12 + \frac{4 \sin \sqrt{8} k_c ax}{\sqrt{8} k_c ax} \right) + O[\varepsilon^3] \right) - \frac{k_c c (t - t_0)}{n_0} \right] \right\},$ $\varepsilon = \alpha_1 - 1$
$C_1 < 0$		$u = \pm \frac{a}{\sqrt{-b}} \left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} k_c ax \left \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \right. \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ $\cdot \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{-2C_1}} \left(\sqrt{\frac{2}{a^2}} \cdot \Pi \times \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}; \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} k_c ax \left \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \right. \right) - \frac{k_c a c (t - t_0)}{n_0} \right) \right]$ $= \pm \frac{a}{\sqrt{-b}} \cdot \left\{ 1 + 2\varepsilon \cdot \cos(\sqrt{2} k_c ax) - 2\varepsilon^2 [1 + \sin^2(\sqrt{2} k_c ax)] + O[\varepsilon^3] \right\}$ $\cdot \tanh \left\{ \frac{1}{\sqrt{-2C_1}} \left[k_c x \left(1 - \varepsilon \frac{4 \sin \sqrt{2} k_c ax}{\sqrt{2} k_c ax} + \varepsilon^2 \left(12 + \frac{4 \sin \sqrt{8} k_c ax}{\sqrt{8} k_c ax} \right) + O[\varepsilon^3] \right) - \frac{k_c c (t - t_0)}{n_0} \right] \right\}$

的解, 其中的参数为

$$\mu_0 = \alpha^2 \cos^2 \delta, \quad \beta / \cos \delta = 1/2. \quad (83)$$

6 结 语

我们针对各种折射率和非线性势的空间调制, 特别是对周期性调制形式, 求出了若干

非线性 Klein-Gordon 方程的孤波和孤子的解, 由此, 我们对这一相当复杂的问题有了进一步的认识. 这在基础物理以及量子电子学(例如孤子红外激光)中都是很有意义的. 本文可能是有关这一研究领域的首次报道之一, 因而要取得更深入的进展尚须做大量工作.

致谢: 本工作得到苏黎世 ETH 资助, 作者感谢与 ETH 数学物理部 W. Baltensperger, J. Fröhlich, U. Kirchgraber, K. Osterwalder, M. Struwe 的有益的讨论及他们提出的建议.

参 考 文 献

- 1 Bullough R K, Caudrey P J eds. *Solitons*, Berlin: Springer, 1980
- 2 Campbell D. K. et al. eds. *Solitons and coherent structure*, Santa Barbara: proceedings of the conference, 1985, also in *Physica D*, 1986; 180: 1~490
- 3 Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon J D et al. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, N. Y.: Academic Press, 1982
- 4 Drazin P G. *Solitons*, Cambridge: University Press, 1983
- 5 郭柏灵, 庞小峰, 孤立子. 北京: 科学出版社, 1987.
- 6 Infeld E, Rowlands G. *Nonlinear waves, solitons and chaos*, Cambridge: University Press, 1990
- 7 Lamb G L Jr. *Elements of soliton theory*, New York: Wiley, 1980
- 8 Newell A C. *Solitons in mathematics and physics*, CBMS Appl. Math. Series no. 48, SIAM, 1985
- 9 Rabinovich M I, Trubetskov D I. *Oscillations and waves in linear and nonlinear systems*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989
- 10 Toda M. *Nonlinear waves and solitons*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989
- 11 Wilhelmsson H. *Solitons in physics, Symposium on solitons and their applications in science and technology*, Stockholm: Aspnaesgarden, 1979; also in *Physica Scripta* 1979; 20: 291~562
- 12 Zabusky N J, Kruskal M D. *Phys. Rev. Lett.*, 1965; 15: 240
- 13 Scott Russel J. *Report on waves*, Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science, London, U K, 1844
- 14 Mollenauer L F, Stolen R H, Gordon J P. *Phys. Rev. Lett.*, 1980; 45: 1095
- 15 Hasegawa A, Kodama Y. *Proc. IEEE*, 1981; 69: 1145
- 16 Mollenauer L F, Smith K. *Opt. Lett.*, 1988; 13: 675
- 17 Hasegawa A. *Optical Solitons in Fibres*, Berlin: Springer, 2nd ed. 1989
- 18 Aitchison J S, Weiner A M, Silberberg Y et al. *Opt. Lett.*, 1991; 16: 15
- 19 Kneubühl F K, Sigrist M. *Laser (in German)*, Stuttgart: Teubner, 3rd ed. 1991
- 20 Gnepf S, Kneubühl F K. *Infrared & Millimeter Waves*, N. Y.: Academic Press, Vol. 16, Ch. 2, 35, 1986
- 21 Arnsson J, Cui D, Gnepf S et al. *Applied Physics*, 1989; B49: 1
- 22 Gordon W. *Zeitschrift für Physik*, 1926; 40: 117
- 23 Klein O. *Zeitschrift für Physik*, 1927; 41: 407
- 24 Casahorran J. *Phys. Lett.*, 1991; 153: 199
- 25 Courant R, Hilbert D. *Methoden der mathematischen Physik II (in German)*, Berlin: Springer. 1937, 1968
- 26 Zwillinger D. *Handbook of differential equations*, New York: Academic Press, 1989
- 27 Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of mathematical functions*, New York: Dover, 1964
- 28 Parkes E J. *Wave Motion*, 1991; 13: 261

SOLITONS IN ONE-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS MEDIA

Fritz K. KNEUBÜHL, FENG JIANHONG

(*Infrared Physics Laboratory, Physics Department, ETH (Swiss Federal Institute of Technology),
CH-8093 Zürich, Switzerland*)

Solitons and solitary waves in inhomogeneous media are of interest in relativistic quantum mechanics and quantum electronics, e. g. in research on infrared soliton lasers. After a short introduction to soliton mathematics the authors present a theoretical study on solitons and solitary waves in inhomogeneous one-dimensional nonlinear media on the basis of nonlinear Klein-Gordon equations modified by spatial variations of refractive index and anharmonic potential. Special emphasis is on periodic modulations. Various approaches and approximations have been applied to find solitary-wave and soliton solutions. Typical solutions are illustrated in order to demonstrate their characteristic features.

Key words: solitons, solitary waves, inhomogeneous media.



Fritz K. Kneubühl

Professor of Physics, Head of Infrared Physics Laboratory, ETH Zürich

born March 7, 1931 in Zürich, Switzerland. Study of Physics at ETH Zürich. 1955 Diploma ETH in Physics. 1959 Ph. D. Thesis ETH in Physics. 1959 Ramsay Memorial Fellow, Univ. College London and Univ. of Southampton, U. K. 1960 Graefflins Fellow, Johns Hopkins Univ., Baltimore, USA. 1963 Privatdozent (Lecturer) 1966 Assistant Prof.; 1970 Associate Prof.; 1972 Full Professor of Physics, ETH Zürich. 1976/78 Chairman Quantum Electronics Division, European Phys. Soc. 1976 Permanent Member, Johns Hopkins Society of Scholars, Baltimore, USA 1978/80 Head of Physics Dept. 1986/88 First Head of Inst. of Quantum Electronics, ETH Zürich. 1989 Lorand Eötvös Medal, Hungarian Phys. Soc., H.. 1990 Permanent Foreign Member Academy of Sciences, GDR/FRG. 1975~1988 Chairman Intern. Conferences 1 to 4 on Infrared Physics, Zürich, CH.

Publications: 300 to 400 papers on infrared physics including quantum optics, spectroscopy, solar and astrophysics, atmospheric physics, plasma physics and building physics: several books and patents.

Feng Jianhong

Assistant, ETH Zürich

born October 22, 1963 in Hubei, PRC. Study of Physics, University, Bonn, FRG. 1988 Diploma in Physics, 1989 Assistant, University, Bern, CH. 1990 Assistant, ETH Zürich, CH.