

# 径向非均匀圆柱介质波导本征值问题的网络分析\*

徐善驾 马哲旺

(中国科学技术大学无线电系, 安徽, 合肥, 230026)

用微波网络方法求解径向任意介质分布圆柱介质波导的本征值问题。利用阶梯近似, 将径向非均匀介质波导的电磁场边值问题等效为多层耦合径向传输线网络的特征解问题, 从而大大简化了求解过程, 文中比较了本方法与其它方法的计算结果及有关测试值, 表明本方法具有简单、精确和通用的特点。

**关键词:** 介质波导, 微波网络方法, 耦合径向传输网络。

## 1 引言

近年来, 径向非均匀介质波导在微波和毫米波技术中得到了许多重要应用<sup>[1~3]</sup>, 所有这些应用都是以非均匀介质波导本征值问题的求解为基础的, 因此该问题的求解在微波和毫米波工程中具有明显的实际意义。

场分量匹配法是研究各类介质波导本征值问题的基本方法, 但是由于用这种方法需要求出每一层介质中的场分量表达式, 然后根据各层介质交界面上切向场连续的边界条件确定特征方程, 最后解得各层介质中电磁场的分布。因此, 随着分层数的增加, 这种方法的求解过程将变得越来越复杂, 从而限制了它的实用范围。

本文利用微波网络方法求解上述本征值问题。把传输线网络的概念和严格的场匹配方法相结合, 将径向非均匀介质波导的电磁场边值问题等效为多层耦合径向传输线网络的特征解问题, 从而大大简化了求解过程。文中给出一个三层均匀介质波导计算值与实测值的比较, 二者吻合得很好; 同时还给出了抛物型光纤色散特性及群速和微分群时延的计算结果, 并与其它方法计算值进行了比较, 二者吻合得也很好, 从而证实了本方法的可靠性和有效性。

## 2 理论分析

将径向非均匀介质波导沿径向分为  $M+1$  层, 各层介电常数和半径分别为  $\epsilon_i$ 、 $r_i$  ( $i=1$ ,

本文 1990 年 9 月 12 日收到, 修改稿 1990 年 12 月 19 日收到。

\* 国家自然科学基金资助项目。

2, ..., M+1) (见图 1). 在介质波导的横截面内, 电磁场的横向 (相对于  $r$ ) 分量可以表示为 TE 模 ( $E_z=0$ , 用带''的量表示) 和 TM 模 ( $H_z=0$ , 用带'的量表示) 的叠加:

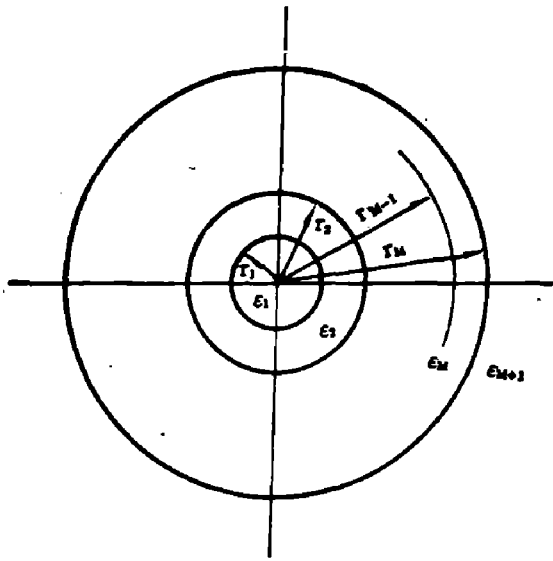


图 1 非均匀介质波导的径向阶梯近似

Fig. 1 Radial staircase approximation for non-uniform dielectric waveguide

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t(r, \phi) = \sum_m (V'_m(r) \mathbf{e}'_m(r, \phi) + V''_m(r) \mathbf{e}''_m(r, \phi)), \\ \mathbf{H}_t(r, \phi) = \sum_m (I'_m(r) \mathbf{h}'_m(r, \phi) + I''_m(r) \mathbf{h}''_m(r, \phi)); \end{cases} \quad (1)$$

式中幅度函数  $V_m(r)$ 、 $I_m(r)$  满足以下方程

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) + k_t^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] V_m(r) = 0; \quad (2)$$

式(2)中  $k_t^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_z^2$ .

模式函数为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_m &= e'_{\phi m} \mathbf{i}_\phi + e'_{zm} \mathbf{i}_z, & \mathbf{e}''_m &= e''_{\phi m} \mathbf{i}_\phi + e''_{zm} \mathbf{i}_z; \\ \mathbf{h}'_m &= h'_{\phi m} \mathbf{i}_\phi + h'_{zm} \mathbf{i}_z, & \mathbf{h}''_m &= h''_{\phi m} \mathbf{i}_\phi + h''_{zm} \mathbf{i}_z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e'_{zm} &= -\cos m\phi, & h'_{zm} &= \sin m\phi, \\ h'_{zm} &= 0, & e'_{zm} &= 0, \end{aligned}$$

$$h'_{\phi m} = \frac{\delta_m}{2\pi r} \cos m\phi, \quad e''_{\phi m} = \frac{\delta_m}{2\pi r} \sin m\phi,$$

$$e'_{\phi m} = -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{m}{r} \sin m\phi, \quad h''_{\phi m} = -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{m}{r} \cos m\phi;$$

$\delta_m = 1 (m=0)$  或  $\delta_m = 2 (m \neq 0)$ . 可验证上列模式函数满足正交归一关系:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathbf{h}_m^* \times \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{e}'_n r d\phi &= \int_0^{2\pi} \mathbf{h}_m^* \times \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{e}''_n r d\phi = \delta_{mn}, \\ \int_0^{2\pi} \mathbf{h}_m^* \times \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{e}''_n r d\phi &= \int_0^{2\pi} \mathbf{h}_m^* \times \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{e}'_n r d\phi = 0; \end{aligned}$$

将场表达式(1)代入 Maxwell 方程, 利用上列正交归一性质和式(2), 得到 TE<sub>mn</sub> 模和 TM<sub>mn</sub> 模所满足的径向传输线方程<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{dV_m}{dr} = -jk_{rm} Z_{rm} I_m, \\ \frac{dI_m}{dr} = -jk_{rm} Y_{rm} V_m; \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中  $V_m = V'_m$  或  $V''_m$ ,  $I_m = I'_m$  或  $I''_m$ ,  $k_{rm}^2 = k_t^2 - \frac{m^2}{r^2}$ ,

$$Z'_{rm} = \frac{1}{V'_{r,m}} = \frac{\delta_m}{2\pi r} \frac{k_t^2}{\omega \epsilon k_{rm}},$$

$$Y''_{rm} = \frac{1}{I''_{r,m}} = \frac{\delta_m}{2\pi r} \frac{k_t^2}{\omega \mu k_{rm}}.$$

我们将方程(3)在第  $i$  层中的解写成

$$\begin{cases} V_m(r_i) = aV_m(r_{i-1}) + bI_m(r_{i-1}), \\ I_m(r_i) = cV_m(r_{i-1}) + dI_m(r_{i-1}); \end{cases} \quad (4)$$

对于  $TE_{mn}$  模, 系数  $a, b, c, d$  分别由下列诸式确定<sup>[7]</sup>:

$$a'' = \frac{x}{y} \operatorname{cs}(x, y) + \frac{m}{y} \operatorname{sn}(x, y),$$

$$b'' = -jZ''_{r_i} \frac{k_{ti}}{k_{ri}} \left[ \frac{m}{y} \operatorname{cs}(x, y) + S_n(x, y) + \frac{m^2}{xy} \operatorname{sn}(x, y) - \frac{m}{x} O_s(x, y) \right],$$

$$c'' = -jY''_{r_{i-1}} \frac{k_{r_{i-1}}}{k_{t_{i-1}}} \operatorname{sn}(x, y),$$

$$d'' = O_s(x, y) - \frac{m}{y} \operatorname{sn}(x, y);$$

$$x = k_{ti}r_i, \quad y = k_{t_{i-1}}r_{i-1}, \quad k_{ti}^2 = \omega^2 \mu \epsilon_i - k_z^2,$$

$$k_{ri}^2 = k_{ti}^2 - \left(\frac{m}{r_i}\right)^2, \quad k_{r_{i-1}}^2 = k_{t_{i-1}}^2 - \left(\frac{m}{r_{i-1}}\right)^2,$$

$$Y''_{r_{i-1}} = \frac{\delta_m}{2\pi r_{i-1}} \cdot \frac{k_{ti}^2}{\omega \mu k_{r_{i-1}}}, \quad Z''_{r_i} = \frac{2\pi r_i}{\delta_m} \cdot \frac{\omega \mu k_{ri}}{k_{ti}^2}.$$

$S_n(x, y)$ ,  $O_s(x, y)$ ,  $\operatorname{sn}(x, y)$  和  $\operatorname{cs}(x, y)$  分别是  $m$  阶大半径及小半径正弦和余弦函数。可以证明, 对于  $TM_{mn}$  模, 有下列关系:

$$a' = d'', \quad b' = \frac{\mu}{\epsilon_i} c'', \quad c' = \frac{\epsilon_i}{\mu} b'', \quad d' = a''.$$

利用介质分界面上电磁场切向分量的连续性条件, 可以将介质波导中的混合模用与上述  $TE$  模和  $TM$  模对应的径向传输线构成的耦合网络来等效(见图 2)。图 2 中理想变压器表示发生在每相邻两层介质交界面上的电磁场的耦合, 变压比  $N_i$  由下式确定<sup>[4]</sup>:

$$N_i = -j \frac{2m\pi k_z}{\delta_m} \left[ \frac{1}{k_{t_{i+1}}^2} - \frac{1}{k_{t_i}^2} \right]. \quad (5)$$

图 2 中  $Y'_{e0}$ 、 $Z''_{e0}$  分别表示最内层介质的等效  $TM$  模导纳和  $TE$  模阻抗,  $Y'_{oi}$ 、 $Z''_{oi}$  分别表示

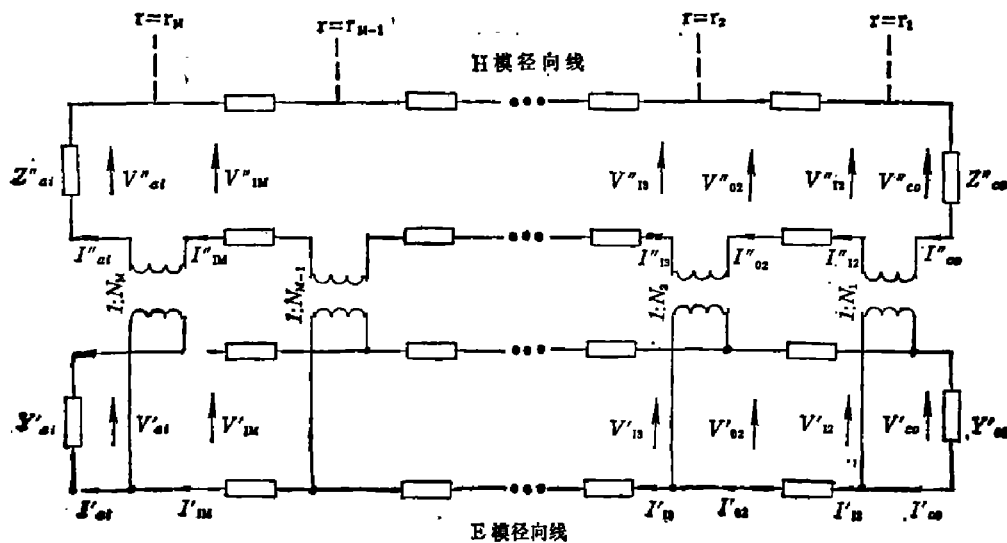


图 2 径向非均匀圆柱介质波导中混合模的等效网络表示

Fig. 2 Equivalent network representation for hybrid modes in inhomogeneous cylindrical dielectric waveguide

最外层介质的等效 TM 模导纳和 TE 模阻抗, 它们分别为:

$$\begin{cases} Y'_{c0} = \frac{j2\pi r_1}{\delta_m} \frac{\omega \epsilon_1}{k_{t1}} \frac{J'_m(k_{t1} r_1)}{J_m(k_{t1} r_1)}, & Z''_{c0} = \frac{\mu}{\epsilon_1} Y'_{c0}, \\ Y'_{ai} = \frac{j2\pi r_M}{\delta_m} \frac{\omega \epsilon_{m+1}}{\tau_{tm+1}} \frac{k'_m(\tau_{tm+1} r_M)}{k_m(\tau_{tm+1} r_M)}, & Z''_{ai} = \frac{\mu}{\epsilon_{m+1}} Y'_{ai}; \end{cases} \quad (6)$$

式(6)中  $\tau_{tm+1}^2 = k_z^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{m+1}$ . 这样, 图 1 所示多层介质波导的本征值问题就转化为图 2 所示多层耦合径向传输线网络的本征解问题. 由变压比  $N_i$  的表达式(5)可以看出,  $m=0$  时,  $N_i=0$ , 耦合消失, 图 2 中 E 模和 H 模径向传输线就成为两支互相独立的传输线网络, 分别对应于圆柱介质波导中角向对称的  $TM_{0n}$  和  $TE_{0n}$  模, 而对于  $m \neq 0$  的一般情形,  $TM_{mn}$  和  $TE_{mn}$  模不能单独在圆柱介质波导中存在, 此时本征模是混合模, 须用图 2 所示的耦合网络来表示.

求解图 2 所示的耦合网络时, 可先求出每层电压、电流的传输矩阵  $[T_{ci}]$ :

$$\begin{bmatrix} V'_I \\ I'_I \\ V''_I \\ I''_I \end{bmatrix}_{i+1} = [c_i] \begin{bmatrix} V'_0 \\ I'_0 \\ V''_0 \\ I''_0 \end{bmatrix}_i = [c_i] [T_i] \begin{bmatrix} V'_I \\ I'_I \\ V''_I \\ I''_I \end{bmatrix}_i = [T_{ci}] \begin{bmatrix} V'_I \\ I'_I \\ V''_I \\ I''_I \end{bmatrix}_i$$

其中  $[c_i]$  表示与  $r=r_i$  处理想变压器对应的耦合矩阵,  $[T_i]$  表示与第  $i$  层的径向传输线对应的传输矩阵,

$$[c_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -N_i \\ -N_i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_i] = \begin{bmatrix} a' & b' & 0 & 0 \\ c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'' & b'' \\ 0 & 0 & c'' & d'' \end{bmatrix}$$

然后将各层传输矩阵相级乘, 得到:

$$\begin{bmatrix} V'_{ai} \\ I'_{ai} \\ V''_{ai} \\ I''_{ai} \end{bmatrix} = [T_{cM}] [T_{cM-1}] \cdots [T_{c2}] [T_{c1}] \begin{bmatrix} V'_{c0} \\ I'_{c0} \\ V''_{c0} \\ I''_{c0} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V'_{c0} \\ I'_{c0} \\ V''_{c0} \\ I''_{c0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

由于  $I'_{ai} = V'_{ai} Y'_{ai}$ ,  $V''_{ai} = I''_{ai} Z''_{ai}$ ,  $I'_{c0} = -V'_{c0} Y'_{c0}$  以及  $V''_{c0} = -I''_{c0} Z''_{c0}$ , 这样式(7)最后可化为仅含  $V'_{c0}$  和  $I''_{c0}$  的二元一次齐次线性方程组:

$$[A] \begin{bmatrix} V'_{c0} \\ I''_{c0} \end{bmatrix} = 0$$

上式有非零解的充要条件为

$$\det[A] = 0 \quad (8)$$

这就是我们要求的特征方程, 求解该方程即可得到径向非均匀圆柱介质波导的本征值, 进而可得到相应的本征函数.

### 3 应用举例

一般均匀圆柱介质波导由二层介质 ( $\epsilon_0 \epsilon_r$  和  $\epsilon_0$ ) 构成, 此时图 2 中的网络就只有一个理想

变压器, 将  $Y'_{c0}$ 、 $Y'_{a1}$  和  $Z''_{c0}$  以及  $Z''_{a1}$  连接在一起; 利用式 (6) 给定的阻抗、导纳值, 便可直接得到均匀圆柱介质波导的特征方程:

$$\left[ \frac{J'_m(x)}{xJ_m(x)} + \frac{K'_m(y)}{yK_m(y)} \right] \left[ \frac{\epsilon_r J'_m(x)}{xJ_m(x)} + \frac{K'_m(y)}{yK_m(y)} \right] = \left( \frac{mk_z}{k_0} \right)^2 \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right]^2;$$

式中  $x = k_t a$ ,  $y = \tau_t a$ ,  $k_t^2 = k_0^2 \epsilon_r - k_z^2$ ,  $\tau_t^2 = k_z^2 - k_0^2$ ;  $a$  为波导半径. 对于 Goubau 线, 可将图 2 中的  $Y'_{c0}$ 、 $Z''_{c0}$  短路; 对于介质加载金属圆波导, 则可将图 2 中的  $Y'_{a1}$ 、 $Z''_{a1}$  短路, 然后求解相应的耦合网络即可.

表 1 给出了几种参数情况下, 由文献 [2] 所述介质套管中填充介质粉末波导主模  $HE_{11}$  模传输波长的测量值与本方法计算值的比较, 由表 1 可见, 二者吻合得很好.

表 1 X 波段三层波导  $HE_{11}$  模波长测量值与计算值的比较

Table 1 comparison of measured and theoretical values of guide wavelengths for  $HE_{11}$  mode of three-layer guide at X-band

$r$ (cm)		频率 (GHz)	$\epsilon_r$		$\lambda$	
芯层	包层		芯层	包层	测量值 [2] (cm)	本文 (cm)
0.33	0.45	10.000	7.62	4.52	2.05	2.0596
0.25	0.35	10.000	13.45	4.52	2.30	2.1945
0.26	0.30	10.000	11.40	2.08	2.88	2.8605
0.26	0.30	11.311	11.40	2.08	2.14	2.0948
0.30	0.40	10.940	13.02	2.25	1.38	1.3108
0.32	0.47	9.794	12.39	2.25	1.71	1.6517

注: 最外层介电常数为  $\epsilon_0$ .

下面求解一典型抛物型光纤的传输特性. 光纤介电常数分布如下:

$$\epsilon(r) = \begin{cases} 2.34 - 0.09 \left( \frac{r}{a} \right)^2 & 0 \leq r \leq a \\ 2.25 & r \geq a. \end{cases}$$

图 3 给出了其色散曲线, 其中  $k_0$  是自由空间波数,  $K_z$  是传播常数, 图中实线系用本文方法算得, 圆点是用文献 [5] 中的矢量阶梯近似法算得, 二者吻合很好, 这充分证实了本文方法的可靠性与精确性.

表 2-4 给出了采用不同分层数  $M$  时,  $HE_{11}$  模的归一化传输常数  $k_z/k_0$ 、归一化群速  $V_g/c$  和微分群时延  $\tau_g$  计算结果的比较. 可见它们都随着分层数的增大稳定地收敛于其渐近值.

其中  $c$  是自由空间中的光速,  $\tau_g = 10^{12} (1/V_g - n_1/c) \text{ ns/km}$ ,  $n_1^2 = 2.34$ . 由此可见, 本方法可以有效地进行径向非均匀光纤的群速、微分群时延等参数的计算.

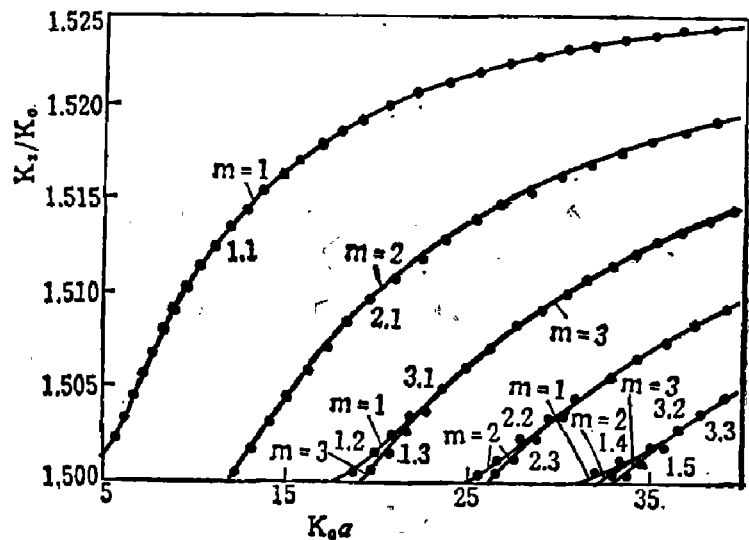


图 3 抛物型光纤的色散曲线

Fig. 3 Dispersion curves for a typical parabolic fiber

表 2 抛物型光纤  $HE_{11}$  模归一化传输常数  $k_z/k_0$  计算值随分层数  $M$  增大时的收敛特性  
 Table 2 Convergence of normalized phase constant  $k_z/k_0$  calculated with increasing number of layers  $M$  for  $HE_{11}$  mode of a parabolic fiber

$M$	$k_z/k_0$	$k_0a$				
		5.0	10.0	20.0	30.0	40.0
5		1.5013439	1.5107806	1.5198297	1.5231422	1.5248162
10		1.5013040	1.5107605	1.5198346	1.5231232	1.5247715
20		1.5012952	1.5107612	1.5198476	1.5231352	1.5247815
30		1.5012936	1.5107616	1.5198506	1.5231383	1.5247845
40		1.5012930	1.5107617	1.5198517	1.5231394	1.5247856

表 3  $HE_{11}$  模归一化群速  $V_g/c$  计算值的收敛特性  
 Table 3 Convergence of normalized group velocity  $V_g/c$  calculated with increasing number of layers  $M$  for  $HE_{11}$  mode of a parabolic fiber

$M$	$V_g/c$	$k_0a$				
		5.0	10.0	20.0	30.0	40.0
5		0.6627439	0.6550684	0.6537360	0.6536734	0.6536553
10		0.6628068	0.6550345	0.6537483	0.6537153	0.6537106
20		0.6628201	0.6550203	0.6537417	0.6537126	0.6537158
30		0.6628224	0.6550175	0.6537400	0.6537114	0.6537148
40		0.6628232	0.6550164	0.6537393	0.6537109	0.6537143
50		0.6628236	0.6550160	0.6537390	0.6537107	0.6537141

表 4  $HE_{11}$  模微分群时延  $\tau_g$  的收敛特性  
 Table 4 Convergence of differential group delay  $\tau_g$  calculated with increasing number of layers  $M$  for  $HE_{11}$  mode of a parabolic fiber

$M$	$\tau_g$	$k_0a$				
		5.0	10.0	20.0	30.0	40.0
		ns/km		PS, km		
20		-70.003	-10.119	-16.542	61.346	35.893
40		-70.026	-10.089	-14.717	74.451	47.585
60		-70.031	-10.083	-14.354	77.241	50.231
80		-70.033	-10.081	-14.225	78.246	51.194
100		-70.033	-10.080	-14.165	78.715	51.646
120		-70.033	-10.080	-14.133	78.971	51.894

## 4 结 论

本文提出的方法有如下几个特点: (1) 具有通常场分量匹配法的严格性, 但公式简单, 计算过程简便; (2) 对于径向分层均匀的介质波导, 本文方法未做任何近似假定, 对于一般径向非均匀介质波导, 除了所作阶梯近似以外, 也未做其它近似假定. 文献[6]证实矢量阶梯近似法是求解光纤传输特性最精确的方法之一, 从本文的推导过程即可看出本方法实质上与矢量阶梯近似法是等效的, 而且可将波型之间耦合特性等物理图象显露得便清晰、直观; (3) 标量阶梯近似法一般仅适用于弱导型的光纤, 而本文方法通用性强, 适用于径向任意分布的圆介质波导.

## 参 考 文 献

- 1 Andres M V. *IEE Proc.*, 1987; **134**: 1~6
- 2 Bruno W M, Bridges W B. *IEEE Trans.*, 1988; **MTT-36**: 882~890
- 3 Chou R C, Lee S W. *IEEE Trans.*, 1988; **MTT-36**: 1167~1176
- 4 Clarricoats P J B, Oliner A A. *Proc. IEE*, 1965; **112**: 883~894
- 5 Bianciardi E, Rizzoli V. *Optical and Quantum Electron*, 1977; **9**: 121~133
- 6 Morishita K, Obata Y, Kumagai N. *IEEE Trans.*, 1982; **MTT-30**: 1821~1826
- 7 徐善驾, 马哲旺. *应用科学学报*, 1990; **8(3)**: 189~195

## NETWORK ANALYSIS OF EIGENVALUE PROBLEM FOR RADIALLY INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL DIELECTRIC WAVEGUIDES\*

XU SHANJIA, MA ZHEWANG

*(Department of Radio and Electronics, University of Science and Technology  
of China, Hefei, Anhui 230026, China)*

The eigenvalue problem of radially inhomogeneous cylindrical dielectric waveguides is solved by microwave network method. The EM field boundary value problem is represented by equivalent coupled radial transmission line networks, which give clear physical pictures of the coupling characteristics of the EM fields and the whole calculation procedure is significantly simplified. Numerical examples show that the present method is simple, accurate and versatile.

**Key words:** dielectric waveguides, microwave networks, coupled radial transmission line networks.

---

\* The project supported by National Natural Science Foundation of China.