

复合正则化联合稀疏贝叶斯学习的高光谱稀疏解混算法

孔繁镛, 郭文骏*, 沈秋, 王丹丹
(南京航空航天大学 航天学院, 江苏 南京 210000)

摘要:将稀疏贝叶斯学习引入线性混合像元分解中,提出一种基于复合正则化联合稀疏贝叶斯学习的高光谱稀疏解混算法.在多观测向量的稀疏贝叶斯框架下,对各参数建立概率模型,经贝叶斯推断得到基于 $L_{2,1}$ 正则化的联合稀疏贝叶斯解混模型,并将丰度向量的非负与和为一约束加入到凸优化的目标函数中,通过变量分离法将复合正则化问题分解成多个单一正则化问题交替迭代求解,并利用参数自适应算法对正则化参数进行更新.模拟数据和真实数据的实验结果表明,该算法比贪婪算法和凸优化算法能获得更高的解混精度,并且适用于端元个数较多和信噪比较低的高光谱数据.

关键词:高光谱图像;联合稀疏解混;复合正则化;稀疏贝叶斯学习
中图分类号:TP751.1 **文献标识码:**A

Compound regularized multiple sparse Bayesian learning algorithm for sparse unmixing of hyperspectral data

KONG Fan-Qiang, GUO Wen-Jun*, SHEN Qiu, WANG Dan-Dan
(College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210000, China)

Abstract: A compound regularized multiple sparse Bayesian learning algorithm for sparse unmixing is presented, in which sparse Bayesian learning model is integrated in the linear hyperspectral pixel unmixing. On the framework of sparse Bayesian Learning model based on MMV (Multiple Measurement Vectors), the parameters in the model is established with the probability, and a $L_{2,1}$ norm regularization-based multiple sparse Bayesian learning model for spectral unmixing is constructed by Bayesian inference, taking the non-negativity and sum-to-one property of abundances into the convex objective function. The compound regularization problem is decomposed into several single regularization problems solving by a variable separation method, and the regularization parameters of the model are updated by an adaptive adjustment algorithm. Experimental results on both synthetic and real hyperspectral data demonstrate that the proposed method outperforms the greedy algorithms and the convex algorithms with a better spectral unmixing accuracy, and is suitable for complex combination of endmembers and low signal-to-noise ratio hyperspectral data.

Key words: hyperspectral image, simultaneous sparse unmixing, compound regularization, sparse Bayesian learning

PACS: 84.40.Xb

引言

高光谱遥感图像具有很高的光谱分辨率,能够获得从可见光到热红外波段范围内频谱近乎连续的

影像数据,在资源勘测、环境监测、农业生产等领域有着广泛应用.受光学器件的限制,在获取像元的瞬时视场角内通常包含多于一种地物类型,形成混合像元.由于混合像元的普遍存在,导致分类和目标探

收稿日期:2015-06-25,修回日期:2015-12-21

Received date: 2015-06-25, revised date: 2015-12-21

基金项目:国家自然科学基金(61401200,61201365),南京航空航天大学青年科技创新基金(NS2013085)

Foundation items: Supported by National Natural Science Foundation of China(61401200,61201365), Youth Science and Technology Innovation Fund of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics((NS2013085))

作者简介(Biography):孔繁镛(1980-),男,浙江宁波人,讲师,主要研究领域为高光谱遥感图像处理. E-mail: kongfq@nuaa.edu.cn

* 通讯作者(Corresponding author): E-mail: nuaaguowenjun@126.com

测等高光谱遥感图像应用研究难以达到实用的要求,因此如何有效进行高光谱解混,成为近年来遥感领域的一个研究热点.针对高光谱混合像元的模型可分为线性混合模型^[1]和非线性混合模型^[2]两种,由于线性混合模型建模简单、物理含义明确,目前,国内外的研究更多地采用线性混合模型.传统的解混算法有基于统计和基于几何的高光谱解混算法^[3,4].随着压缩感知和稀疏表示理论蓬勃发展,Iordache等人将光谱稀疏性引入解混模型,用已知的光谱库代替端元集合,提出稀疏解混算法^[5].

目前,稀疏解混算法主要分为凸优化算法、贪婪算法和贝叶斯学习算法三类.凸优化算法主要有SUnSAL (Sparse unmixing by variable splitting and augmented Lagrangian)^[6]、CL-SUnSAL (Collaborative-SUnSAL)^[7]、SUnSAL-TV^[8]和加权 L_1 正则化方法^[9]等,凸优化算法在一定条件下利用 L_1 范数来刻画丰度系数的稀疏性,进行高效的求解.但是与贪婪算法相比,凸优化算法求解速度较慢.正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)和匹配追踪算法(Matching Pursuit, MP)等^[5]贪婪算法主要是基于单观测向量(Single Measure Vectors, SMV)模型,在提取端元时并未考虑相邻像元间的相似性,容易陷入局部最优.联合正交匹配追踪(Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit, SOMP)^[10]和子空间匹配追踪(Subspace Matching Pursuit, SMP)^[10]等基于多观测向量(Multiple Measure Vectors, MMV)模型的联合稀疏解混算法采用联合稀疏模型并结合分块策略进行端元提取,相比OMP和MP等算法能更准确地获得全局最优解,缺点是端元集合中存在过多冗余端元,影响了丰度重建的精度.与以上两类求解方法不同的另一种方法是稀疏贝叶斯学习(Sparse Bayesian Learning, SBL)^[11],它基于贝叶斯思想,对未知量进行概率建模,并将丰度系数非负性加入先验模型中,通过贝叶斯推断得到稀疏解,但是该方法在更新参数中采用EM方法,导致运算量大,而且未考虑相邻像元中端元组合的联合稀疏性,导致算法求解效率较低.

为了更好地利用稀疏贝叶斯学习的方法进行混合像元分解,提高贝叶斯学习的迭代速率和丰度系数的重建精度,本文提出一种基于复合正则化的联合稀疏贝叶斯解混算法(Compound Regularized Multiple Sparse Bayesian Learning, CRMSBL).在MMV模型下,利用分层贝叶斯模型描述丰度系数的先验分布,经过理论推导,得到基于联合稀疏贝叶斯学习

的最优化问题.将最优化问题转化为一个正则化的凸优化目标函数,把丰度系数的物理属性作为复合正则项加入到目标函数中.传统的稀疏贝叶斯学习方法收敛速度慢,计算量大,不适合数据量大的高光谱图像.本文推导出一种快速的参数迭代算法,能够自适应地调整参数,并且算法稳定性好.在模拟数据和真实数据的实验中,对比凸优化和贪婪算法,本文算法在解混精度上有大幅提高.

1 高光谱稀疏解混模型

高光谱图像的线性混合模型可以表示为:

$$y_i = \sum_{j=1}^p m_{ij}x_j + n_i \quad , \quad (1)$$

式中, p 表示端元的个数, m_{ij} 表示谱线 j 在第 i 个谱段的反射值.写成矩阵形式为:

$$y = \mathbf{M}x + n \quad . \quad (2)$$

$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times p}$ 表示所含端元集合, $y \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 表示对高光谱图像中某一像元的在 N 个波段上的观测值, $x \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 表示每个端元对应的丰度系数, n 表示观测误差.其中,丰度系数 x 满足非负性约束($x_j \geq 0, j = 1, \dots, p$)及和为一约束($\sum_{j=1}^p x_j = 1$).

稀疏解混模型用已知光谱库代替端元集合,来求解高光谱混合像元分解:

$$y = \mathbf{A}x + n \quad , \quad (3)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 表示光谱库,包含种不同地物对应 N 个波段下的反射值.由于高光谱数据中相邻像元所含物质相似,相邻像元的端元混合模型可以由光谱库中的端元通过不同的混合系数线性组合而成,是一个多观测向量MMV模型:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{N} \quad , \quad (4)$$

其中, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times L}$ 表示 L 个像元在 N 个波段下的观测值, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times L}$ 为丰度系数矩阵, \mathbf{N} 为观测噪声.对式(4)的求解参照联合稀疏近似问题,目标函数可以表示为如下:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\text{row}-0} \text{ s. t. } \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_F \leq \delta \quad , \quad (5)$$

式中, $\|\mathbf{X}\|_{\text{row}-0}$ 代表丰度矩阵 \mathbf{X} 中包含的非全零行行数.

2 正则化联合稀疏贝叶斯解混模型

针对式(4)的线性高光谱混合像元模型,定义 \mathbf{Y}_j 和 \mathbf{X}_j 分别表示 \mathbf{Y} 与 \mathbf{X} 的第 j 列,可得似然函数:

$$p(\mathbf{Y}_j | \mathbf{X}_j) = (\pi\sigma^2)^{-N} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{Y}_j - \mathbf{A}\mathbf{X}_j\|_2^2\right) \quad . \quad (6)$$

构建先验分布时,采用分层贝叶斯模型(Hierarchical Bayesian Model)设计先验分布. 第一层先验,假设丰度矩阵 \mathbf{X} 的第 i 行 \mathbf{X}_i 服从参数 γ_i 的高斯先验 $p(\mathbf{X}_i; \gamma_i) = N(0, \gamma_i I)$, 则丰度矩阵先验是一个高维高斯分布:

$$p(\mathbf{X}; \gamma) = \prod_{i=1}^M p(\mathbf{X}_i; \gamma_i) \quad , \quad (7)$$

其中, $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M]^T \in R_+^M$, γ_i 用于表征丰度矩阵每一行的稀疏性. 当时 $\gamma_i = 0$, \mathbf{X}_i 为全零行, 即满足条件概率 $p(\mathbf{X}_i = 0 | \mathbf{Y}; \gamma_i = 0) = 1$. 第二层先验, 参数 γ_i 服从 Gamma 分布: $p(\gamma_i | \lambda_i) \sim \Gamma(\gamma_i | 1, \lambda_i/2)$. 令 λ_1 和 σ^2 服从 Gamma 超先验: $\Gamma(\lambda_1 | a, b)$, $\Gamma(\sigma^{-2} | c, d)$, 将参数全部置零获得一致超先验.

根据照贝叶斯理论得到后验分布:

$$p(\mathbf{X}_j | \mathbf{Y}_j; \gamma) = \frac{p(\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j; \gamma)}{\int p(\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j; \gamma) d\mathbf{X}_j} = N(\boldsymbol{\mu}_j, \Sigma) \quad , \quad (8)$$

式中, 均值和方差可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_L] = E[\mathbf{X} | \mathbf{Y}; \gamma] = \Gamma \mathbf{A}^T \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y} \\ \Sigma &= \text{Cov}[\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j; \gamma] = \Gamma - \Gamma \mathbf{A}^T \Sigma_Y^{-1} \Gamma, \forall j \end{aligned} \quad , \quad (9)$$

其中, $\Gamma = \text{diag}(\gamma)$, $\Sigma_Y = \sigma^2 I + \mathbf{A} \Gamma \mathbf{A}^T$.

联合稀疏贝叶斯学习的代价函数对数形式表示如下^[12]:

$$\begin{aligned} L(\gamma, \sigma^2) &= -2 \log \int p(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) p(\mathbf{X}; \gamma, \sigma^2) d\mathbf{X} \\ &= L \log |\Sigma_Y| + \sum_{j=1}^L \mathbf{Y}_j^T \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y}_j \quad . \quad (10) \end{aligned}$$

针对凹函数项, 定义 $h^*(z)$ 为 $\log |\Sigma_Y|$ 的共轭函数. 通过凹共轭转化, 利用共轭函数的性质可得:

$$L(\gamma, z) = \min_{z \geq 0} z^T \gamma - L h^*\left(\frac{z}{L}\right) + \sum_{j=1}^L \mathbf{Y}_j^T \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y}_j \quad . \quad (11)$$

对上式可采用交替最优化求解. 通过求导法则, 固定 z, γ 的最优化问题表示如下:

$$\min_{\gamma} L_z(\gamma) = z^T \gamma + \sum_{j=1}^L \mathbf{Y}_j^T \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y}_j \quad . \quad (12)$$

目标函数式(12)是一个凸优化问题, 根据文献[13]的推导易证:

$$\mathbf{Y}_j^T \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y}_j = \frac{1}{\sigma^2} \min_{\mathbf{X}_j} \|\mathbf{Y}_j - \mathbf{A} \mathbf{X}_j\|_2^2 + \sum_i^M \frac{\mathbf{X}_{ij}^2}{\gamma_i} \quad . \quad (13)$$

将二次型变分, 则目标函数可改写为:

$$\begin{aligned} L_z(\mathbf{X}, \gamma) &= \frac{1}{\sigma^2} \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{X}\|_F^2 + z^T \gamma + \mathbf{X}^T \Gamma^{-1} \mathbf{X} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{X}\|_F^2 + z^T \gamma + \sum_{i=1}^M \|\mathbf{X}_i\|_2^2 \end{aligned} \quad . \quad (14)$$

对式(14)利用求导法则, 可得的最优迭代:

$$\gamma_i = z_i^{-1/2} \sqrt{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T} = z_i^{-1/2} \|\mathbf{X}_i\|_2 \quad (\forall i) \quad . \quad (15)$$

将式(15)代入式(14), 并规范正则项的系数, 令 $w_i = \sigma^2 z_i^{1/2}$, 式(14)可进一步改写为:

$$\mathbf{X} = \arg \min_{\mathbf{X}, \mathbf{W}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{X}\|_F^2 + \|\mathbf{W} \mathbf{X}\|_{2,1} \quad , \quad (16)$$

其中, $\mathbf{W} = \text{diag}(w_i)$. 式(16)是一个 $L_{2,1}$ 正则化加权迭代问题, 利用交替迭代法求解的结果在全局收敛, 并且是最稀疏解^[13].

通过以上推导, 对于问题(10)可通过交替迭代进行参数学习, 其中第 k 步迭代步骤如下:

表1 交替迭代法更新参数

Table1 Update parameters by alternating iteration

1.	$\forall i, \gamma_i^{(k+1)} \leftarrow (z_i^{(k)})^{-1/2} \ \mathbf{X}_i^{(k)}\ _2;$
2.	$\forall i, z_i^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{A}_i^T (\sigma^2 I + \mathbf{A} \Gamma^{(k+1)} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}_i;$
3.	$(\sigma^2)^{(k+1)} \leftarrow \frac{\ \mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{X}^{(k)}\ _F^2 / L}{N - M + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L (\mathbf{X}_{ij}^{(k+1)})^2 / \gamma_i^{(k+1)}};$
4.	$\forall i, w_i^{(k+1)} \leftarrow (\sigma^2)^{(k+1)} (z_i^{(k+1)})^{1/2};$

3 复合正则化的联合稀疏贝叶斯解混算法

已有的稀疏贝叶斯解混算法均基于 SMV 模型, 并未考虑相邻像元的联合稀疏性. 针对传统稀疏贝叶斯算法的不足, 考虑到稀疏丰度矩阵中, 非零元素所在位置具有结构化特征, 本文提出一种基于复合正则化的联合稀疏贝叶斯学习算法, 建立行稀疏的丰度矩阵模型, 并将丰度系数的非负性与和为一性约束加入到目标函数中, 利用交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)方法进行求解.

基于联合稀疏贝叶斯学习解混算法的目标函数如下:

$$\mathbf{X} = \arg \min_{\mathbf{X}, \mathbf{W}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{X}\|_F^2 + \|\mathbf{W} \mathbf{X}\|_{2,1} \text{ s. t. } \mathbf{X} \geq 0, \mathbf{1}_M^T \mathbf{X} = 1 \quad , \quad (17)$$

其中, $\mathbf{1}_n = \text{ones}(1, n)$. 直接对上式求解比较困难, 故将约束条件作为正则项加入到目标函数中, 将最优化问题转化为一个无约束的复合正则化问题进行求解:

$$\mathbf{X} = \arg \min_{\mathbf{X}, \mathbf{W}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{X}\|_F^2 + \|\mathbf{W} \mathbf{X}\|_{2,1} + l_{|1|}(\mathbf{X}) + l_{|R+|}(\mathbf{X}) \quad , \quad (18)$$

其中, 正则项 $l_{|1|}(\cdot)$ 与 $l_{|R+|}(\cdot)$ 分别定义为:

$$l_{|1|}(X) = \begin{cases} 0, 1_M^T X = 1_L \\ \infty, 1_M^T X \neq 1_L \end{cases}, l_{|R+|}(X) = \begin{cases} 0, X_{ij} \geq 0 \\ \infty, X_{ij} < 0 \end{cases} \quad \forall i, j, \quad (26)$$

(19)

3.1 算法推导

针对式(18),采用交替方向迭代方法将无约束最优化问题转化为带约束的最优化问题,目标函数表示如下:

$$\min_{U, V_1, V_2, V_3, V_4} \frac{1}{2} \|Y - V_1\|_F^2 + \|V_2\|_{2,1} + l_{|1|}(V_3) + l_{|R+|}(V_4) \\ \text{s. t. } V_1 = AU, V_2 = WU, V_3 = U, V_4 = U \quad (20)$$

利用 Lagrangian 乘子法将约束项作为二次罚函数加入目标函数:

$$\min_{U, V_1, V_2, V_3, V_4} \frac{1}{2} \|Y - V_1\|_F^2 + \|V_2\|_{2,1} + l_{|1|}(V_3) + l_{|R+|}(V_4) \\ + \frac{\mu}{2} \|AU - V_1 - D_1\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|WU - V_2 - D_2\|_F^2 \\ + \frac{\mu}{2} \|U - V_3 - D_3\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|U - V_4 - D_4\|_F^2 \quad (21)$$

式中, μ 为惩罚因子. 式(21)将无约束问题转化为包含项数更多的无约束最优化问题,当惩罚因子选择适当时,能够很好地逼近最优解. 首先求解参数 U , 然后利用 U 依次对每个单一正则项进行求解更新. 假设当前为第 $K+1$ 次迭代,则对的更新是求解最优化问题:

$$\min_U \frac{\mu}{2} \|AU - V_1^{(K)} - D_1^{(K)}\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|WU - V_2^{(K)} - D_2^{(K)}\|_F^2 \\ + \frac{\mu}{2} \|U - V_3^{(K)} - D_3^{(K)}\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|U - V_4^{(K)} - D_4^{(K)}\|_F^2 \quad (22)$$

定义 $\varphi_i^{(K)} = V_i^{(K)} + D_i^{(K)}, i = 1, 2, 3, 4$, 根据范数求导法则可得的可得迭代表达式:

$$U^{(K+1)} \leftarrow (A^T A + W + 2I)^{-1} (A^T \varphi_1^{(K)} + W \varphi_2^{(K)} + \varphi_3^{(K)} + \varphi_4^{(K)}) \quad (23)$$

然后利用 U , 将变量 V_1, V_2, V_3, V_4 的最优化问题分别表示为:

$$V_1^{(K+1)} = \arg \min_{V_1} \frac{1}{2} \|Y - V_1\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|AU^{(K+1)} - V_1 - D_1^{(K)}\|_F^2 \quad (24)$$

$$V_2^{(K+1)} = \arg \min_{V_2} \|V_1\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \|WU^{(K+1)} - V_2 - D_2^{(K)}\|_F^2 \quad (25)$$

$$V_3^{(K+1)} = \arg \min_{V_3} l_{|1|}(V_3) + \frac{\mu}{2} \|U^{(K+1)} - V_3 - D_3^{(K)}\|_F^2$$

$$V_4^{(K+1)} = \arg \min_{V_4} l_{|R+|}(V_4) + \frac{\mu}{2} \|U^{(K+1)} - V_4 - D_4^{(K)}\|_F^2 \quad (27)$$

由此,将求解式(18)的复合正则化问题分解为式(23)~(27)各个独立的求解相对简单的单一正则化问题. 其中,式(24)是一个最小二乘问题,式(25)是一个迭代加权 $L_{2,1}$ 范数正则化问题,式(26)表示和为一约束,式(27)表示非负性约束,以上各问题都能通过不同的算法对应求解.

3.2 算法实现与步骤

式(24)可通过求导法则,得到迭代表达式:

$$V_1^{(K+1)} \leftarrow \frac{1}{\mu + 1} [Y + \mu(AU^{(K+1)} - D_1^{(K)})] \quad (28)$$

式(25)可通过矢量软阈值函数进行求解:

$$V_2^{(K+1)} \leftarrow \text{vect-soft}(WU^{(K+1)} - D_2^{(K)}, 1/\mu) \quad (29)$$

定义矢量软阈值函数 $\text{vect-soft}(y, \tau)$:

$$y \leftarrow y \frac{\max\{\|y\|_2 - \tau, 0\}}{\max\{\|y\|_2 - \tau, 0\} + \tau}, \forall i \quad (30)$$

对式(26)按行矢量进行迭代,表示如下:

$$(V_2)_i^{(K+1)} \leftarrow \text{vect-soft}(w_i U_i^{(K+1)} - D_2^{(K)}, 1/\mu), \forall i \quad (31)$$

利用残差归一化可进行模和为一的逼近,将式(26)可转化为以下迭代形式:

$$V_3^{(K+1)} \leftarrow (U^{(K+1)} - D_3^{(K)}) + 1_M^T \cdot \frac{1}{M} [1_L - \sum_i (U^{(K+1)} - D_3^{(K)})] \quad (32)$$

针对式(27),可利用硬阈值法进行迭代更新:

$$V_4^{(K+1)} \leftarrow \max(U^{(K+1)} - D_4^{(K)}, 0) \quad (33)$$

此外,在学习过程中,绝大多数超参数会收敛至零. 由于超参数满足非负性,在迭代过程中,需要将小于阈值 γ_{prune} 的参数剔除,并将其对应的原子从光谱库中剔除,更新光谱库 $A(\text{ind})$, 具体步骤如下:

$$\forall i, \gamma_i < \gamma_{\text{prune}}, \text{ind} \leftarrow \text{ind} \setminus i, A \leftarrow A(\text{ind}) \quad (34)$$

基于前面的理论介绍与公式推导,表2给出本文解混算法的具体流程.

4 实验与分析

分别对模拟和实际高光谱数据进行实验仿真,将 SUnSAL^[6]、CL-SUnSAL^[7]、SUnSAL-TV^[8]、SOMP算法^[10]、SBL算法^[11]及本文算法(CRMSBL)的解混结果进行对比. 在实验中将各算法的参数调至最优,充分验证CRMSBL算法的性能,通过测算各算法的

表 2 基于复合正则化联合稀疏贝叶斯学习的高光谱稀疏解混算法

Table 2 The hyperspectral unmixing algorithm of CRMS-BL

1.	Input $Y, A, \gamma_{\text{prune}}, E_{\text{err}}$ and K_{max} ;
2.	Initialization. $U^{(0)} \leftarrow (A^T A + W^{(0)} + 2I)^{-1} (A^T Y)$, $V_1^{(0)} \leftarrow A U^{(0)}$, $V_2^{(0)} \leftarrow W U^{(0)}$, $V_3^{(0)} \leftarrow U^{(0)}$, $V_4^{(0)} \leftarrow U^{(0)}$, $D_i^{(0)} \leftarrow \mathbf{0}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $W^{(0)} = I$;
Repeat:	
3.	Update $\varphi_i^{(K)} = V_i^{(K)} + D_i^{(K)}$, $i = 1, 2, 3, 4$;
4.	$U^{(K+1)} \leftarrow (A^T A + W + 2I)^{-1} (A^T \varphi_1^{(K)} + W \varphi_2^{(K)} + \varphi_3^{(K)} + \varphi_4^{(K)})$;
5.	Update $V_i^{(K+1)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ using (28) - (33);
6.	$D_1^{(K+1)} \leftarrow D_1^{(K)} - A U^{(K+1)} + V_1^{(K+1)}$;
7.	$D_2^{(K+1)} \leftarrow D_2^{(K)} - W U^{(K+1)} + V_2^{(K+1)}$;
8.	$D_3^{(K+1)} \leftarrow D_3^{(K)} - U^{(K+1)} + V_3^{(K+1)}$;
9.	$D_4^{(K+1)} \leftarrow D_4^{(K)} - U^{(K+1)} + V_4^{(K+1)}$;
10.	Update $W^{(K+1)}$ using Table 1;
11.	$\forall i, \gamma_i < \gamma_{\text{prune}}, \text{ind} \leftarrow i \notin \text{ind}, A \leftarrow A(\text{ind})$;
12.	$K = K + 1$;
Until $\ X^{(K+1)} - X^{(K)}\ _F \leq E_{\text{err}}$ or $K > K_{\text{max}}$.	

运行时间以定量比较它们的复杂度. 本文所有实验的硬件平台采用 Intel(R) Core(TM) i7-3770 CPU, 3.40GHz, 内存 4 GB, 软件平台采用 Matlab R2010b.

4.1 模拟数据仿真

在模拟实验中, 采用美国地质调查局 (United States Geological Survey, USGS) 光谱库 splib06, 包含 498 种不同物质的光谱曲线. 为充分验证算法性能, 本实验从中选出 15 种相关度不同的端元光谱构造混合像元. 图 1 中展示了其中 5 个端元的光谱曲线, 另外 10 个端元分别是: Neodymium Oxide GDS34、Monazite HS255. 3B、Samarium Oxide GDS36、Meionite WS700. HLsep、Spodumene HS210. 3B、Grossular WS484、Zoisite HS347. 3B、Wollastonite HS348. 3B、Labradorite HS17. 3B、Pigeonite HS199. 3B.

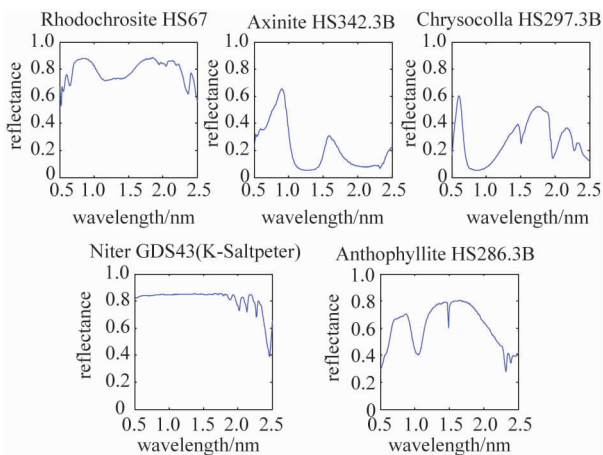


图 1 USGS 光谱库中的 5 个光谱曲线
Fig. 1 Five spectral signatures from the USGS

定义 64×64 大小的模拟数据块, 分别包括 5, 7, 9, 11, 13, 15 个端元, 丰度系数服从 Dirichlet 随机分布, 满足非负性与和为一性. 在生成的模拟图像中分别加入零均值高斯白噪声和相关噪声, SNR 分别为 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 dB. 在实验中, 使用信号重构误差 (Signal to Reconstruction Error, SRE) [5] 衡量丰度系数重建的质量, SRE 定义为 $E[\|X\|_2^2 / E[\|X - \hat{X}\|_2^2]]$. 其中, X 表示原始丰度矩阵, \hat{X} 表示重建丰度矩阵, 用 dB 表示为 $\text{SRE}(\text{dB}) = 10 \lg(\text{SRE})$. 模拟数据实验从不同端元数解混性能, 抗噪声性能和算法复杂度三个方面分别对以上算法的解混结果进行对比分析.

不同端元数时解混性能的结果如图 2 和图 3 所示. 通过对 30dB 高斯噪声和相关噪声下不同端元数时模拟数据解混性能比较可以看出, 随着端元个数的增加, 所有算法的 SRE 都有明显下降. 在不同端元数的情况下, CRMSBL 和 SBL 算法的 SRE 最高, 其他算法性能相近但都低于 CRMSBL 和 SBL 算法. 在 30dB 高斯噪声下, CRMSBL 算法比 SBL 算法平均 SRE 高出 1.85dB, 比 SOMP 算法平均 SRE 高出 5.61dB. 在 30dB 相关噪声下, CRMSBL 算法在不同端元数时解混性能均最高, 在 5 端元时 CRMSBL 和 SBL 算法性能相近, 并高于其他四种算法, 而随着端元数目的增加, SBL 算法的性能明显下降, 本文算法由于利用了相邻像元的联合稀疏性, 性能依然保持最高.

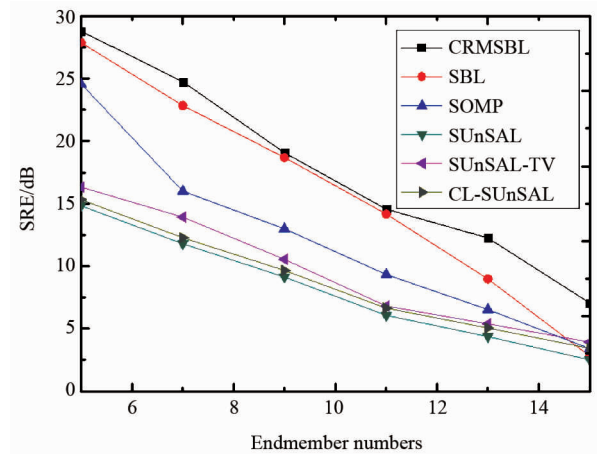


图 2 30dB 高斯噪声下不同端元数时模拟数据解混结果
Fig. 2 Results on the synthetic data of different endmember number with 30-dB white noise

抗噪声性能的结果如图 4 和图 5 所示. 通过在 20 ~ 50 dB 的高斯和相关噪声下, 不同算法对 7 端

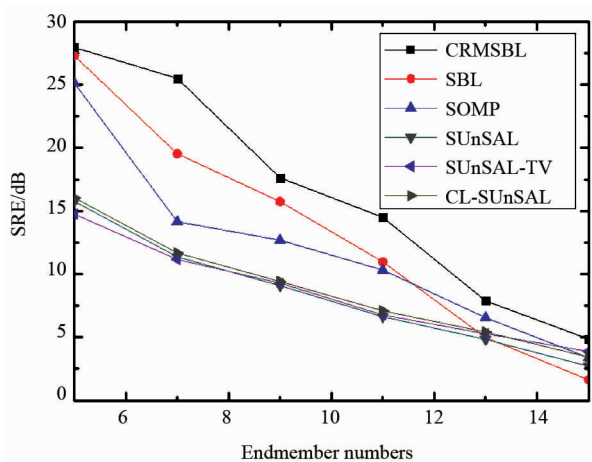


图3 30 dB 相关噪声下不同端元数时模拟数据解混结果
Fig.3 Results on the synthetic data of different endmember number with 30-dB correlated noise

元模拟数据解混的性能比较可以看出,随着噪声 SNR 的增加,不同算法的解混精度都有所增加,CRMSBL 和 SBL 算法在不同 SNR 情况下,性能均为最优且 SRE 明显高于 SOMP 等其他算法.在高斯噪声下和相关噪声情况下,本文算法的平均 SRE 分别高于 SBL 算法 1.46 dB 和 5.21 dB.在 20 dB 的相关噪声情况下,本文算法的性能下降明显,但仍较 SBL 算法 SRE 提高了 1.16 dB.

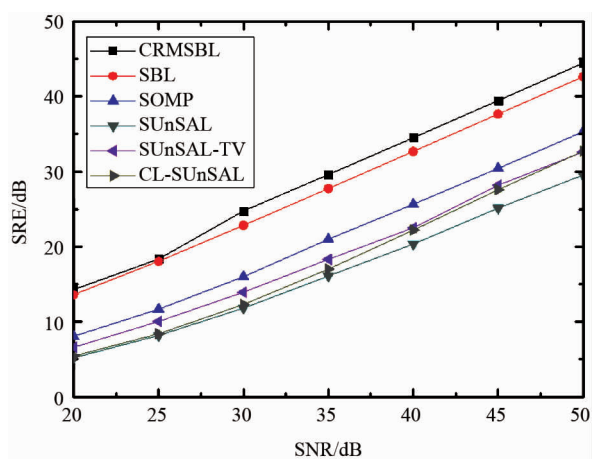


图4 7 端元数时不同 SNR 高斯噪声的模拟数据解混结果
Fig.4 Results on Simulated Data with white noise as function of SNR when the endmember number is 7

不同算法的复杂度通过算法运行的平均时间进行衡量.从表 3 中可看出,SOMP 算法利用分块方法联合提取端元效率最高,SUnSAL-TV 算法利用邻域信息复杂度最高.对比 SBL 算法,本文算法利用了快速参数自适应方法进行迭代,能够快速收敛至全局最稀疏解,效率更高.

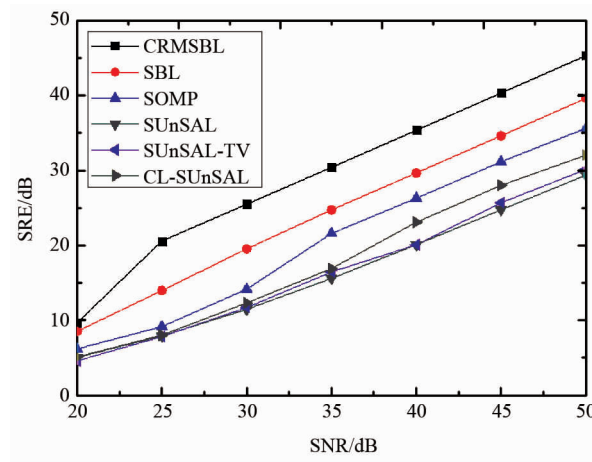


图5 7 端元数时不同 SNR 相关噪声的模拟数据解混结果
Fig.5 Results on Simulated Data with correlated noise as function of SNR when the endmember number is 7

综上所述,本文算法对比凸优化和贪婪算法,在解混性能上有了显著提高.针对端元个数多和信噪比低的图像,凸优化和贪婪算法算法性能有明显的下降,但是本文算法基于联合稀疏模型,利用了丰度系数的性质,仍然具有较高的解混精度.对比 SBL 算法,本文算法具有更快的迭代速度和更高的重构精度.

表 3 30 dB 高斯噪声下不同端元数时不同算法解混平均运行时间的比较

Table 3 Comparison of different algorithms average run time of different endmember number with 30-dB white noise

Algorithms	SUnSAL	SUnSAL-TV	CL-SUnSAL	SOMP	SBL	CRMSBL
Run	67.92	245.03	66.52	3.87	68.70	41.80

4.2 真实数据仿真

真实图像实验使用的图像源自于 AVIRIS Cuprite 数据,选取与文献[14]相同尺寸和区域的图像子块作为测试图像,其图像子块大小为 250×191 像素的图像,其中每个像素包含 188 个谱段(已去掉大气水分吸收和低信噪比的谱段).光谱库仍采用 USGS 光谱库的 498 条谱线构成.图 6 为利用 Tri-corder3.3 软件对 USGS 光谱库进行分析得到的不同矿物的丰度图像.

由于实际图像的原始丰度图像无法获得,实验中采用丰度图像的稀疏度和高光谱图像重建误差来评价算法的性能.丰度图像的稀疏度定义为每个图像像元中非零值系数的平均个数,定义数值大于 0.001 为非零值^[15].高光谱重建图像的重建误差用均方根误差(root mean square error, RMSE)^[16]来衡量:

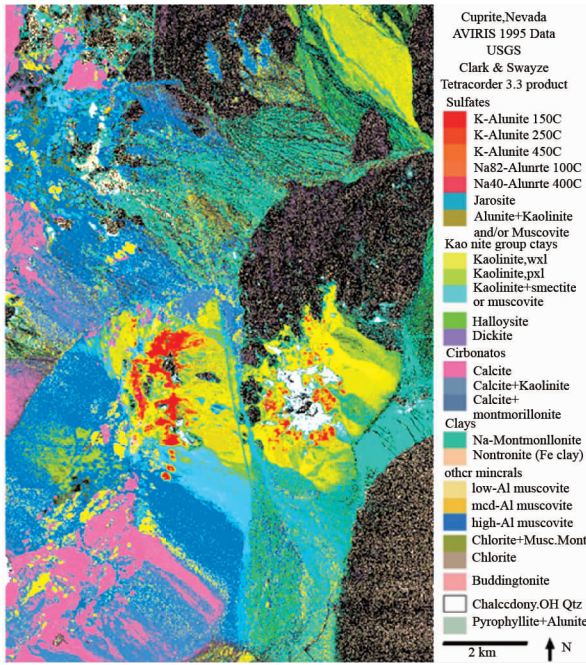


图 6 Cuprite 数据中不同矿物的 USGS 分布图
Fig. 6 USGS map showing the distribution of different minerals in the Cuprite scene

$$RMSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2} \quad (34)$$

表 4 为高光谱重建图像的稀疏度和重建误差比较,虽然在重构误差性能上本文算法略差于 SUnSAL-TV 和 CL-SUnSAL,但本文算法在稀疏度方面的性能指标远优于这两种算法,表明本文算法对真实高光谱图像同样具有较高的解混性能.图 7 为 Tricorder3.3 软件生成的丰度分布图和各种算法的重建丰度图像,从中可以看出本文算法的重建丰度图像具有较少的噪声点又保留了丰度图像的边缘和特征信息,更接近软件生成的丰度分布图.

表 4 丰度图像稀疏度和高光谱图像重建误差比较
Table 4 Comparison of sparsity of the abundance vectors and the reconstruction error of the hyperspectral imagery

Algorithms	SUnSAL	SUnSAL-TV	CL-SUnSAL	SOMP	SBL	CRMSBL
Sparsity	17.563	20.472	20.7989	13.684	15.0548	13.5885
RMSE	0.0057	0.0038	0.0065	0.0048	0.0044	0.0043

5 结论

传统的稀疏贝叶斯学习算法只是建立了稀疏的丰度先验分布,并未利用相邻像元间相似的端元组合信息,解混精度有限.本文基于 MMV 问题,对相邻像元建立行稀疏的先验分布,提出一种基于正则化的联合稀疏贝叶斯学习的高光谱解混模型.本文

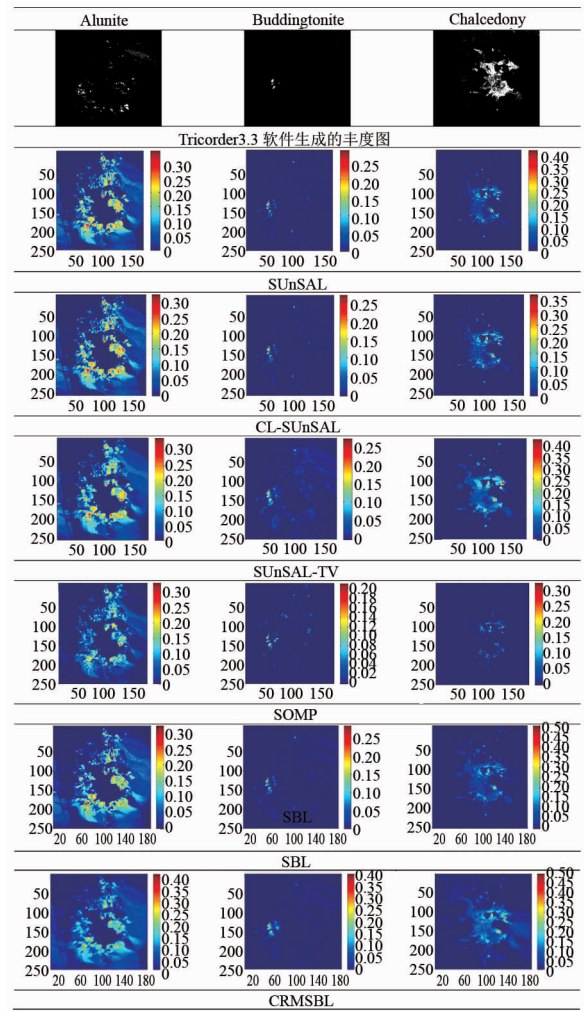


图 7 三种不同元素的丰度分布及各种算法的重建丰度图像
Fig. 7 The fractional abundance and reconstruct abundance maps of three different elements

还将丰度系数的非负与和为一性作为正则项约束加入到基于正则化稀疏贝叶斯的目标函数中,得到基于复合正则化的联合稀疏贝叶斯学习解混算法,采用 ADMM 算法将其分解为多个单一正则化问题进行求解.此外,为解决传统贝叶斯算法参数设置敏感,迭代速度慢,计算复杂度高的问题,本文推导出一种基于交替迭代的参数自适应更新算法,只需设置参数的初始值,并且初值的设置不影响收敛结果.在模拟数据实验中,本文算法的重构性能明显高于其他算法;在真实数据实验中,本文算法也有较高的丰度重建效果,对实际复杂的高光谱图像混合像元分解具有重要的意义.

References

[1] Bioucas-Dias J M, Plaza A, Dobigeon N, et al. Hyperspec-

