

## 基于图像稀疏表示的红外小目标检测算法

赵佳佳<sup>1</sup>, 唐峥远<sup>1</sup>, 杨杰<sup>1</sup>, 刘尔琦<sup>2</sup>, 周越<sup>1</sup>

(1. 上海交通大学 图像处理与模式识别研究所, 上海 200240;

2. 中国航天科工集团公司第三研究院, 北京 100074)

**摘要:** 基于超完备字典的图像稀疏表示是一种新的图像表示理论, 利用超完备字典的冗余性可以有效地捕捉图像的各种结构特征, 从而实现图像的有效表示. 针对红外小目标检测问题, 提出了一种基于图像稀疏表示的检测方法, 该方法采用二维高斯模型生成样本图像, 继而构造超完备目标字典, 然后依次提取测试图像的图像子块并计算其在超完备字典中的表示系数, 背景和目标的表示系数有着显著的差异, 最后通过一个量化指标来判别该子图像块是否含有小目标, 实验结果证实了所提方法的有效性.

**关键词:** 图像稀疏表示; 红外小目标; 目标检测

**中图分类号:** TP391.4 **文献标识码:** A

## Infrared small target detection based on image sparse representation

ZHAO Jia-Jia<sup>1</sup>, TANG Zheng-Yuan<sup>1</sup>, YANG Jie<sup>1</sup>, LIU Er-Qi<sup>2</sup>, ZHOU Yue<sup>1</sup>

(1. Institute of Image Processing and Pattern Recognition, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. Institute of the Third Academy, CASIC, Beijing 100074, China)

**Abstract:** The sparse representation based on over-complete dictionary is a new image representation theory. The redundancy of over-complete dictionary can enable it effectively to capture the geometrical characteristics of the images. In this paper, a novel detection method based on image sparse representation was introduced. The over-complete target dictionary is first constructed with atoms which are produced by two-dimensional Gaussian model. Then the sub-image blocks of the test image are extracted successively and the corresponding coefficients are calculated with the constructed over-complete target dictionary. There is a significant difference between the coefficients of objective and background. Whether the sub-image block contains small target or not can be determined by the index of sparse concentration. Experimental results demonstrated the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** image sparse representation; infrared small target; object detection

**PACS:** 07.57.Kp

### 引言

利用红外成像技术实现目标检测是红外制导的关键技术之一, 同时也是军事武器系统的自动化、智能化、现代化的重要标志之一, 因此国内外许多科研机构的学者一直致力于该项技术的研究. 由于红外传感器受到大气、海面辐射、作用距离以及探测器噪声等因素影响, 使得远距离的目标在红外图像上尺寸较小, 甚至呈现点状; 此外, 图像的信噪比较低, 加上背景通常情况下比较复杂, 目标很容易被噪声和背景杂波所淹没, 使得红外小目标的检测变得更加困难. 实时鲁棒的小目标检测技术尚未完全突破, 仍

是机器视觉和图像处理领域的热门研究课题.

当前, 基于单帧的红外小目标检测算法可以分为两类: 基于图像滤波的检测算法和基于机器学习的检测算法. 基于图像滤波的检测算法, 首先对红外图像的背景起伏分量进行估计, 也称为背景估计, 然后将原始图像与背景起伏分量相减, 以得到包含目标成分和噪声成分的图像, 接着通过阈值处理或其他方法得到目标的位置, 代表方法包括 Max-Mean<sup>[1]</sup>, Max-Median<sup>[1]</sup>, Top-Hat<sup>[2]</sup>, TDLMS<sup>[3]</sup>. 基于机器学习的检测算法, 则是将目标检测问题转化为模式分类问题, 然后根据不同的学习算法对目标模型和背景模型进行训练, 利用得到的目标模型和背

收稿日期: 2010-06-12, 修回日期: 2010-12-17

基金项目: 国家自然科学基金(60772097); 航空科学基金(2008ZC57)

作者简介: 赵佳佳(1982-), 男, 河南沁阳人, 博士研究生, 主要从事红外图像处理工作, E-mail: zhaojjia1982@gmail.com.

Received date: 2010-06-12, revised date: 2010-12-17

景模型对输入的测试图像进行分类判别,即依次提取输入图像的子图像,然后根据判别规则判定该子图像块含有目标与否,其中,具有代表性的方法有 PCA<sup>[4]</sup>,PPCA<sup>[5]</sup>.

提出了一种基于超完备稀疏表示的红外小目标检测算法,与其他基于机器学习的算法相比,该算法不需要对目标模型和背景模型进行训练,而是通过求解一个线性规划问题来完成目标检测的任务.

## 1 图像的稀疏表示

对图像进行表示时,人们通常使用完备的正交基,因为完备的正交基可以使表示简单直观,而且表示是唯一的.近几年随着多尺度几何分析和压缩传感技术在图像处理领域的兴起,人们发现使用超完备基来表示图像会更加有效,能够得到更加稀疏的表示.与完备的正交基不同,超完备基的基底通常是冗余的,即基底的个数大于基元素的维数,超完备基又被称为超完备字典,基元素被称为字典的原子.稀疏表示使得图像的能量只集中于较少的原子,而这些具有非零表示系数的原子揭示了图像的主要特征和内在结构.目前,稀疏表示已广泛应用到图像处理和模式识别领域,如图像恢复、图像压缩、人脸识别等<sup>[6]</sup>.

图像在超完备字典中的稀疏表示可按照以下模型进行描述: $N \times M$ 的矩阵 $D$ 为超完备字典,通常情况下 $M \geq N$ , $y \in R^N$ 为图像的向量展开形式,求解图像 $y$ 在超完备字典 $D$ 中的最稀疏表示等同于求解

$$\min \|x\|_0 \quad \text{s. t.} \quad y = Dx, \quad (1)$$

其中, $\|x\|_0$ 表示向量 $x$ 的 $L_0$ 范数,定义为向量 $x$ 的非零元素个数,由于 $L_0$ 范数的非凸性,使得式(1)的求解变成了NP难的组合优化问题.最初,Mallat通过迭代的贪婪算法(匹配追踪算法)来求解式(1),随后,Donoho等人用 $L_1$ 范数取代 $L_0$ 范数,将式(1)转化为求解式(2):

$$\min \|x\|_1 \quad \text{s. t.} \quad y = Dx, \quad (2)$$

显然,式(2)是一个凸优化问题,可以通过线性规划算法来求解. Donoho<sup>[7]</sup>证明,当信号和超完备字典满足一定条件时,式(1)和式(2)是等价的,即式(1)的解可以通过求解式(2)来得到.

在红外小目标检测问题中,首先,必须构造一个超完备的目标字典,然后将测试图像按照原子的大小进行分块提取,计算该图像子块在超完备目标字典下的表示系数,若该图像子块含有红外小目标,则其在字典下的表示系数是稀疏的,即只有少量系数值较大,其他值均接近于0;若该图像子块没有包含

目标,为背景图像,则其在字典下的表示系数是均匀分布的,且每一个系数值均很小,也就是说,该图像子块包含目标与否,其在字典中的表示系数有着显著的差异,因此,只需通过一个量化指标来描述这种差异,然后对该指标进行阈值操作,就可以将目标和背景区分开来.

## 2 构造超完备字典

图像稀疏表示理论中的一个关键问题就是如何设计有效的超完备字典.利用超完备字典表示图像的基本思想最早由Mallat提出,他采用超完备的Gabor字典对图像进行稀疏表示.随后,人们又提出了多种构造超完备字典的方法,这些方法可以归为以下两个类别:第一类方法通过将标准的正交基进行级联来得到超完备字典,常用的标准正交基包括:傅里叶基、小波基、曲波基以及Gabor基等.第二类方法是用训练样本来构造超完备字典,这类方法又被称为稀疏编码,一方面可以通过学习算法来生成字典,如Elad<sup>[8]</sup>利用K-SVD算法来生成具有通用性的字典,另外也可以针对具体问题,直接用训练样本构造字典,如John Wright<sup>[9]</sup>直接以人脸图像作为原子来构造超完备字典.第二类方法生成的字典能够抓住图像的几何结构特征,且构造方法可以根据应用需求,更加灵活,因此,选择该类方法来构造超完备目标字典.

在基于学习的红外小目标检测方法<sup>[4,5]</sup>中,人们普遍使用二维高斯模型来对红外小目标进行建模,通过调节模型中的参数,生成目标子空间.采用该模型来生成红外目标样本图像,继而构造超完备目标字典.设生成的样本图像大小为 $m \times m$ ,二维高斯模型如下

$$I(i,j) = I_{\max} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[ \frac{(i-x_0)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(j-y_0)^2}{\sigma_y^2} \right]\right), \quad (3)$$

其中, $I_{\max}$ 是目标中心像素值(灰度峰值); $\sigma_x$ 为水平散布参数, $\sigma_y$ 为垂直散布参数,这两个参数控制着目标像素的散布特性;以样本图像的左上角为原点, $(x_0, y_0)$ 为目标图像的中心坐标, $(i, j)$ 为样本图像的其他像素坐标.通过调节 $(x_0, y_0)$ , $I_{\max}$ , $\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ 四个参数来生成不同位置,不同亮度,不同形状的红外小目标样本图像.将得到的每一幅样本图像均展开为 $m^2 \times 1$ 的一维列向量,然后将这些向量组成为一个矩阵:

$$D = [s_1, s_2, \dots, s_n] \in R^{m^2 \times n}, \quad (4)$$

设样本的数目为 $n$ ,称该矩阵 $D$ 为超完备字典,矩阵中的每一列 $s_i$ 为超完备字典中的一个原子.图1

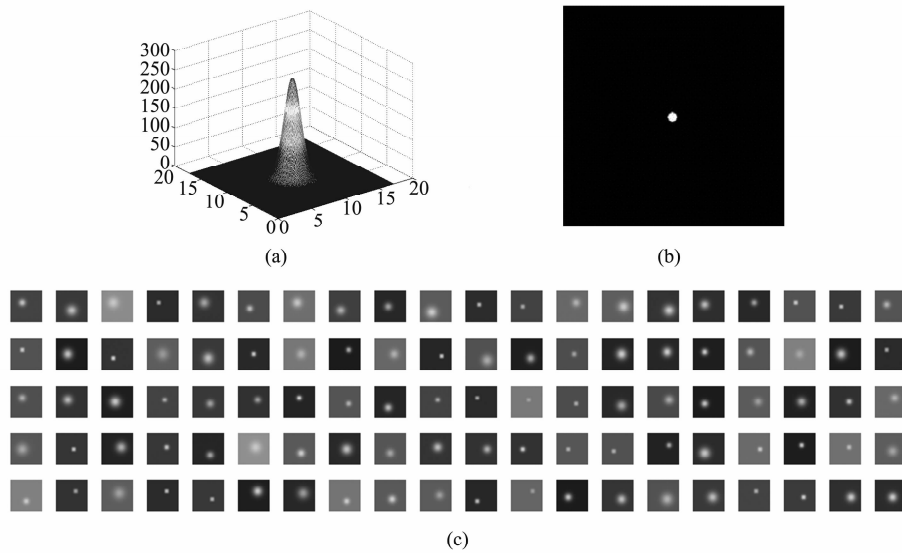


图1 超完备字典示意图 (a)超完备字典中原子的三维显示图 (b)原子的能量谱平面图 (c)超完备字典中的部分原子  
Fig.1 Diagram of the over-complete target dictionary (a)three-dimensional display of atom (b)the energy spectrum of atom (c)part of the over-complete dictionary

是生成的样本图像及超完备字典示意图,其中,图1(a)是根据式(3)生成的目标样本三维显示图,图1(b)是对应的能量谱平面图,图1(c)为生成的部分字典。

### 3 基于稀疏表示的检测算法

根据以上构造的红外目标超完备字典,将输入的测试图像进行分块,然后计算各图像子块在字典下的表示系数,通过定量比较各图像子块的表示系数的差异,来判断该图像子块是否含有小目标,从而完成目标检测的任务。具体的步骤如下:

(1) 利用  $m \times m$  (与字典中原子具有相同的大小)的滑动窗口,从上到下、从左到右依次提取测试图像的图像子块,并将其展开为  $m^2 \times 1$  维列向量。

(2) 计算图像子块在超完备字典中的表示系数。图像子块在超完备字典中的表示系数可以通过优化式(1)或者式(2)来求解,但是,由于在红外小目标检测问题中,图像子块往往包含不同程度的噪声,使得直接利用式(1)或式(2)求解得到的结果不理想。因此,为了消除噪声的干扰,得到更加稳定的解,利用改进的模型来求解图像子块在字典中的表示系数

$$\min \|\alpha\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|D\alpha - x\|_2 \leq \varepsilon, \quad (5)$$

其中,  $x \in R^{m^2}$  是图像子块的向量表示,  $D \in R^{m^2 \times n}$  是红外小目标超完备字典,求得的  $n \times 1$  维列向量  $\alpha$  为图像子块  $x$  在超完备字典中的表示系数。参数  $\varepsilon$  为图

像子块的标准差,描述了不同子块中噪声的强度。

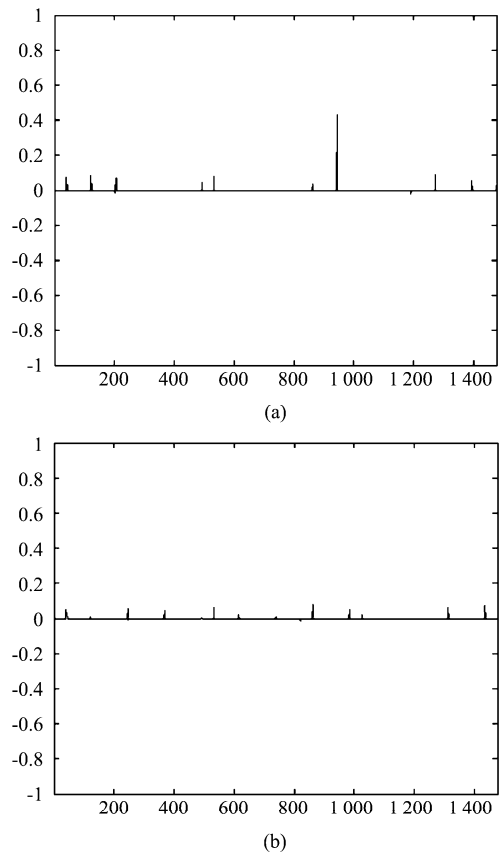


图2 表示系数的差异 (a)目标在字典中的表示系数 (b)背景在字典中的表示系数

Fig.2 The difference of representation coefficients (a) small target in the dictionary, and (b) background in the dictionary

(3) 根据定义的稀疏程度指标,计算测试图像的稀疏程度指标矩阵.若图像子块中含有小目标,则求得的表示系数  $\alpha$  比较稀疏,即只有少量数值比较大,其他值均很小;若图像子块为背景,则求得的表示系数  $\alpha$  数值均比较小.图 2(a)为测试图像(见图 4(a))中包含目标的图像子块的表示系数;图 2(b)为某个背景图像块的表示系数,由图中可以看出,图像子块中是否含有目标,其在超完备字典中的表示系数有着显著的差异,我们通过定义稀疏程度指标(Sparsity Index, SI)来定量的描述表示系数的差异

$$SI(x) = \frac{k \cdot \max_i \|\delta_i(x)\|_1 / \|x\|_1 - 1}{k - 1} \in [0, 1], \quad (6)$$

其中,  $k$  表示样本类别的个数,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\delta_i(x)$  表示  $x$  中属于第  $i$  个位置的系数.将图像子块在字典中的表示系数  $\alpha$  代入式(6),得到该图像子块的  $SI$  值.显然,含有目标的子图像块的  $SI$  值接近于 1,而不含目标的背景子块的  $SI$  值接近于 0.将得到的  $SI$  值赋给滑动窗口在原始测试图像的中心位置,则最终得到一个新的矩阵,我们称之为稀疏程度指标矩阵,该矩阵与原始测试图像具有相同的尺寸(不考虑边界效应),矩阵的元素值介于  $[0, 1]$  之间.

(4) 对稀疏程度指标矩阵进行阈值处理,得到目标的精确位置.稀疏程度指标矩阵中,目标所在位

置具有接近于 1 的数值,其他位置数值均接近于 0,因此,通过简单的阈值操作即可得到目标的精确位置

$$SI(x) \geq \tau, \quad (7)$$

其中  $\tau$  为阈值,  $\tau \in [0, 1]$ ,可以根据实际情况进行设定.式(7)是根据设定的阈值对稀疏程度指标矩阵进行二值化处理,处理结果中,数值 1 所在的位置即为目标的所在位置.

## 4 实验结果及分析

为了验证算法的有效性,选择多幅含红外图像来进行实验,并将算法的检测结果与基于 *Max-Median*、*Top-Hat*、*TDLMS*、*PCA* 的检测算法进行了比较.实验中,根据二维高斯模型生成的目标样本大小为  $16 \times 16$ ,构造的超完备字典  $D$  的大小为  $D$ ,稀疏表示系数利用  $l_1$ -magic 工具箱<sup>[10]</sup>来求解,阈值  $\tau$  取 0.6.

图 3 包含了三幅典型的红外测试图像,分别为陆地、天空和海天背景,其中,包含的小目标数目分别为一个、两个和三个.从原始图像的三维显示可以看到,小目标几乎被背景杂波和噪声所湮没,特别是第三幅图像,由于背景复杂,目标几乎呈点状.图 3(c)和图 3(d)分别为文中检测算法的检测结果及

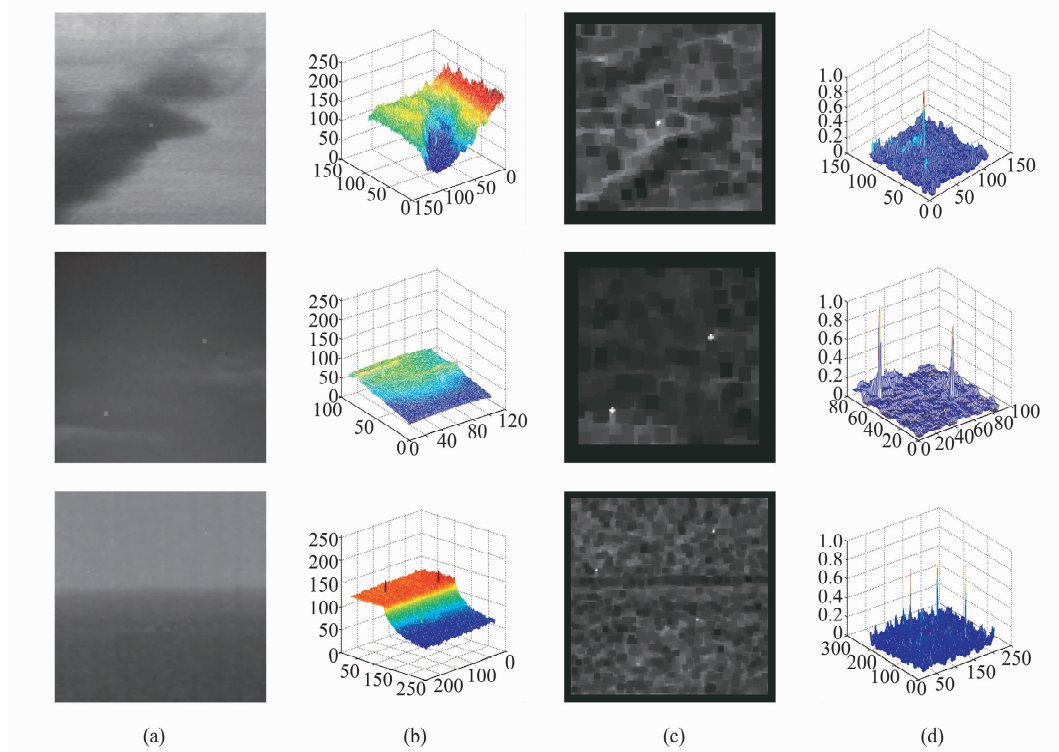


图 3 (a)原始测试图像 (b)原始图像的三维显示图 (c)检测结果 (d)检测结果的三维显示图

Fig. 3 (a)Original test images (b)3-d display of test images (c)detection results (d)3-d display of detection results

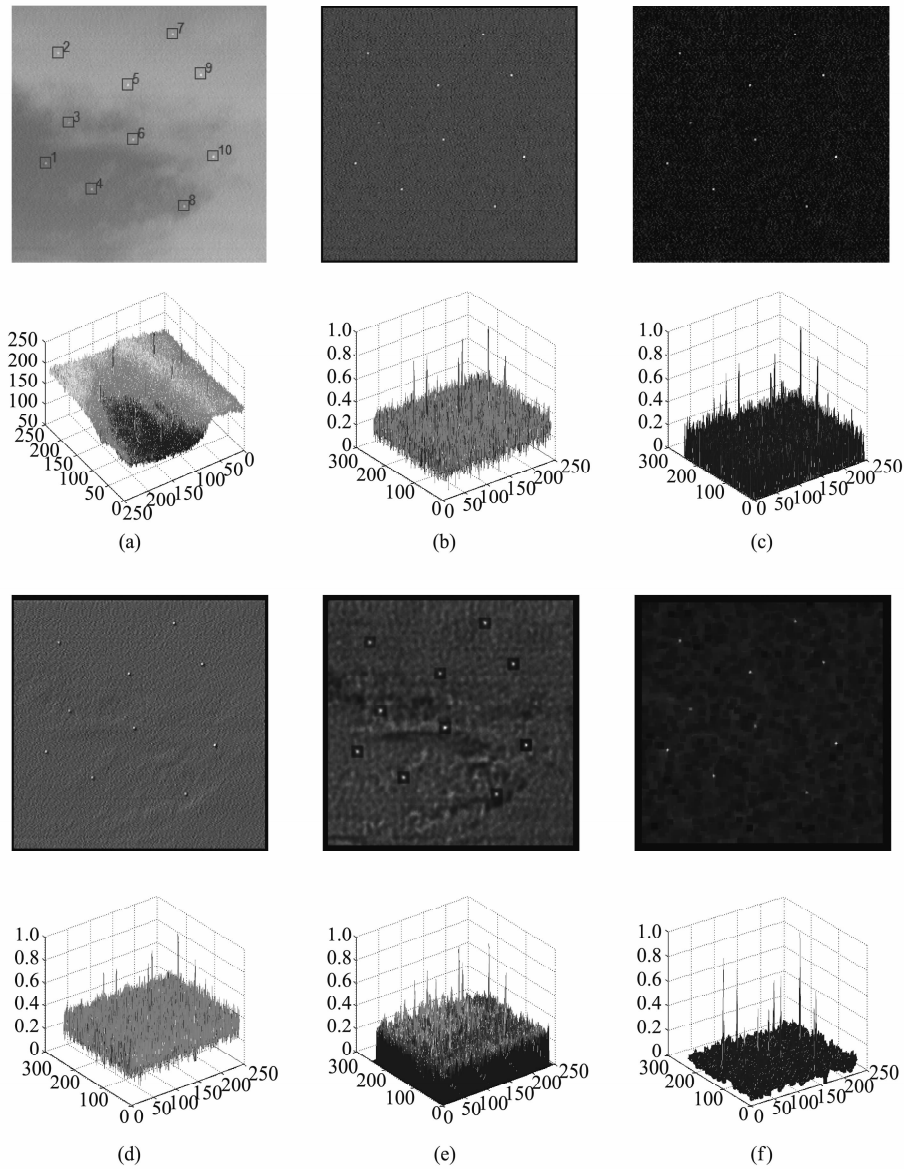


图4 (a)原始测试图像 (b)Max-Median 检测结果 (c)Top-Hat 检测结果 (d)TDLMS 检测结果 (e)PCA 检测算法结果 (f)SR 检测结果

Fig. 4 (a)The original test image (b) the detection result of Max-Median (c) the detection result of Top-Hat (d) the detection result of TDLMS (e) the detection result of PCA (f) the detection result of SR

其对应的三维显示图,从检测结果可以看到,所提算法能够很好的抑制背景,凸出目标,在归一化的图像中,背景最大值不超过 0.3,而目标均在 0.8 以上,只需简单的阈值操作即可将目标检测出来。

为了进一步验证所提出的算法的性能,将该算法与四种典型的红外小目标检测算法进行了比较.各种检测算法的检测结果见图 4.从图 4 的检测结果可以看到,相比于其他几种检测算法,所提 SR 算法能够更好地将背景进行抑制.为了对各种检测算法的性能进行定量比较,选择局部信噪比(Local Signal-to-Noise Ratio, LSNR)和局部信噪比增益

(Local Signal-to-Noise Ratio Gain, LSNRG)两个量化指标来对五种检测算法进行客观的分析和比较. LSNR 定义如下:

$$\text{LSNR} = \frac{S_{\text{area}}}{N_{\text{area}}}, \quad (8)$$

其中,  $S_{\text{area}}$  表示局部信号值,实验中取目标区域内像素灰度的极大值;  $N_{\text{area}}$  表示局部背景值,实验中取背景区域的极大值.较大的 LSNR 表明该局部区域内,目标相对于背景杂波而言更为显著,因而检测的效果也更好. LSNRG 的定义如下:

表 1 客观评价指标值

Table 1 The values of all evaluation indexes

Target	LSNR					LSNRG				
	M-Med	Top-Hat	TDLMS	PCA	SR	M-Med	Top-Hat	TDLMS	PCA	SR
1	1.3094	1.7073	1.3704	1.5263	4.3750	1.5114	1.9707	1.5818	1.7618	5.0500
2	1.1713	1.4715	1.2284	1.2632	3.1071	1.1004	1.3826	1.1541	1.1868	2.9193
3	1.0829	1.2846	1.1049	1.6015	1.9643	1.2428	1.4743	1.2682	1.8381	2.2545
4	1.2376	1.6829	1.2654	1.4962	3.5714	1.3812	1.8782	1.4123	1.6698	3.9858
5	1.2652	1.6016	1.3704	1.1504	3.7857	1.1359	1.4379	1.2303	1.0328	3.3987
6	1.2320	1.5528	1.3765	1.9173	2.2143	1.2444	1.5684	1.3903	1.9365	2.2364
7	1.2597	1.6016	1.3025	1.4361	2.6786	1.2059	1.5333	1.2469	1.3748	2.5643
8	1.2210	1.5528	1.2963	1.3534	2.6607	1.3050	1.6597	1.3855	1.4465	2.8437
9	1.2762	1.8374	1.4321	1.4887	2.9464	1.1064	1.5929	1.2416	1.2907	2.5544
10	1.4088	2.0732	1.5741	1.7143	4.5536	1.2373	1.8208	1.3824	1.5056	3.9992

$$\text{LSNRG} = \frac{\text{LSNR}_{\text{out}}}{\text{LSNR}_{\text{in}}}, \quad (9)$$

其中  $\text{LSNRG}_{\text{in}}$  和  $\text{LSNRG}_{\text{out}}$  分别是在进行目标检测前后目标区域的 LSNR. 较大的 LSNRG 表明目标检测算法对于 LSNR 的提升越明显, 因而检测性能也越好. 表 1 显示了使用不同检测算法对测试图像(图 4(a))进行检测后的 LSNR 和 LSNRG 值, 指标最优值均以下划线指出. 从表 1 可以看到, 在各种检测算法中, 文中算法得到的 LSNR 和 LSNRG 均为最大, 说明 SR 算法的性能最优, 这也与前面的主观评价结果一致.

LSNR 和 LSNRG 两个指标从检测结果的局部区域对各种算法进行了比较, 为了能够对各种算法进行更加综合的评价, 选择目标检测中常用的 ROC (Receiver Operating Characteristic) 曲线来对各种检测算法进行综合的分析. ROC 曲线是检测概率和虚警概率的函数曲线, 通过不断变动检测阈值, 来得到相应的虚警率和检测率, 曲线以下包含的面积越大, 则该算法性能越好. 图 5 给出了各种检测算法的 ROC 曲线图, 从图中可以看到当虚警率接近于 0% 的时候, SR 的检测概率依然为 100%, 而其他算法则均达不到 100%. 从三维显示图的主观效果, 到量化指标以及 ROC 曲线的客观评价结果, 均证明了所提算法是一种有效的检测算法.

## 5 结论

根据图像的稀疏表示理论, 提出了一种新的红外小目标检测算法. 与以往的用完备的正交基来表示图像不同, 稀疏表示理论认为利用超完备的字典能更加有效地表示图像. 首先根据二维高斯模型构造了红外目标的超完备字典, 然后, 计算测试图像的图像子块在超完备字典中的表示系数, 图像子块中

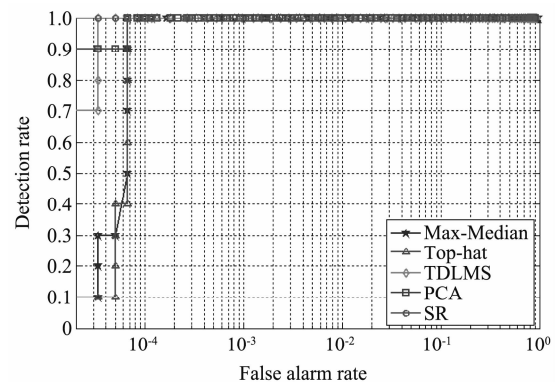


图 5 各种算法的 ROC 曲线图

Fig. 5 The ROC curves of all kinds of algorithms

含有目标与否, 其表示系数显著不同, 根据这一事实来完成目标检测的任务. 最后将提出的算法与其他经典的检测算法进行了比较, 实验结果验证了算法的有效性. 由于文中直接采用  $l_1$ -magic 工具箱来求解稀疏表示系数, 因此, 为了进一步提高算法的实时性, 可以考虑采用更加快速的算法来求解  $l_1$  范数最小化问题.

## REFERENCES

- [1] Deshpande S D, Er M H, Venkateswarlu R, *et al.* Max-mean and max-median filters for detection of small targets [J]. *Proc. SPIE*, 1999, **3809**:74—83.
- [2] Li J C, Shen Z K, Lan T. Detection of spot target in infrared clutter with morphological filter [J]. *IEEE Aerospace and Electronics*, 1996, **1**:168—172.
- [3] Cao Y, Liu R M, Yang J. Small target detection using two-dimensional least mean square (TDLMS) filter based on neighborhood analysis [J]. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2008, **29**(2):188—200.
- [4] Liu Z J, Chen C Y, Shen X B, *et al.* Detection of small objects in image data based on the nonlinear principal component analysis neural network [J]. *Optical Engineering*, 2005, **44**(9)093604(1-9).

(下转 166 页)

### 3 结论

为了抑制地空探测系统中可能出现的云层和人工建筑物复杂杂波对弱小目标检测性能的影响,采用贝叶斯最大后验估计,设计了基于剪切波变换和高斯尺度混合模型的背景抑制方法.利用基于模拟和真实的图像序列的几组实验验证了所提方法的抑制性能.实验结果表明,所提方法可较好地实现对红外地空探测系统中可能出现的云层和人工建筑物所引起的强边缘的抑制,展示了基于剪切波变换的高斯尺度混合模型作为一种新的多尺度几何分析工具在红外图像处理中的应用潜力.在细节特征的抑制上仍不能让人满意,如何减轻甚至消除残留的强边缘背景是下一步值得研究的课题和今后的研究方向.

### REFERENCES

- [1] Chen J Y, Reed I S. A detection algorithm for optical targets in clutter[J]. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1987, **23**(1):46—59.
- [2] Silverman J, Cafer C E, Vickers V E. Temporal filtering for point target detection in staring IR imagery; II. Recursive variance filter[J]. *Proc. SPIE*. 1998, **3373**:45—53.
- [3] Lin J N, Nie X, Unbehauen R. Two-dimensional LMS adaptive filter incorporating a local-mean estimator for image processing[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems; Analog and Digital Signal Processing*, 1993, **40**(7):417—428.
- [4] Li H, Wei Y T, Li L Q, et al. Infrared moving target detection and tracking based on tensor locality preserving projection[J]. *infrared physics & technology*. 2010, **53**(2):77—83.
- [5] Porat B, Friedlander B. A frequency domain algorithm to multiframe detection and estimation of dim targets [J].
- ~~~~~
- (上接 161 页)
- [5] Cao Y, Liu R M, Yang J. Infrared Small Targets Detection Using PPCA[J]. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2008, **29**(4):385—395.
- [6] Plumbley M D, Abdallah S A, Blumensath T, et al. Musical audio analysis using sparse representations[J]. *Proceedings in Computational Statistics*, 2006, **2**:104—117.
- [7] Donoho D, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2001, **47**(7):2845—2862.
- IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1990, **12**(4):398—401.
- [6] DelMarco S, Agaian S. The design of wavelets for image enhancement and target detection [J]. *Proc. SPIE*, 2009, **7351**:
- [7] LI Hong, ZHENG Cheng-Yong, GAO Jing-Li. Weak and small object detection based on wavelet multiscale analysis and fisher algorithm[J]. *J. Infrared Millim. Waves*(李红, 郑成勇, 高景丽. 基于小波多尺度分析及 Fisher 分割的红外弱小目标检测. *红外与毫米波学报*), 2003, **22**(5):353—356.
- [8] LIU Ru-Ming, LIU Er-Qi, YANG Jie, et al. Detect infrared point targets based on kernel fukunaga-Koontz transform [J]. *J. Infrared Millim. Waves*(刘瑞明, 刘尔琦, 杨杰, 等. 核 Karhunen-Loeve 变换红外弱小目标检测. *红外与毫米波学报*), 2008, **27**(1):47—50.
- [9] Zhang BY, Zhang TX, Cao ZG, et al. Fast new small target detection algorithm based on a modified partial differential equation in infrared clutter[J]. *SPIE optical engineering*. 2007, **46**(10):106401—1~6.
- [10] Guo K, Labate D. Optimally sparse multidimensional representation using shearlets[J]. *SIAM J. Math Anal.* 2008, **39**(1):298—318.
- [11] Portilla J, Strela V, Wainwright M J, et al. Image denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, **12**(11):1338—1351.
- [12] BAI Jing, HOU Biao, WANG Shuang, et al. SAR image denoising based on lifting directionlet domain Gaussian scale mixtures model[J]. *Chinses journal of computers*(白静, 侯彪, 王爽, 等. 基于提升 Directionlet 域高斯混合尺度模型的 SAR 图像噪声抑制. *计算机学报*), 2008, **31**(7):1234—1241.
- [13] QIN Han-Lin, LIU Shang-Qian, ZHOU Hui-Xin, et al. Background suppression for dim small target with Gabor kernel non-local means[J]. *Infrared and Laser Engineering*(秦翰林, 刘上乾, 周慧鑫, 等. 采用 Gabor 核非局部均值的弱小目标背景抑制. *红外与激光工程*), 2009, **38**(4):737—741.
- [8] Elad M, Aharon M. Image denoising via sparse and redundant representation over learned dictionaries [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006, **15**(12):3736—3745.
- [9] Wright J, Yang A Y, Ganesh A, et al. Robust Face Recognition via Sparse Representation[J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, **31**(2):210—227.
- [10] Candes E J, Tao T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2005, **51**(12):4203—4215.