

文章编号:1001-9014(2007)04-0312-05

本征正交分解在气动光学畸变仿真中的 分析与应用

吴琳, 房建成, 杨照华

(北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院, 北京 100083)

摘要:通过本征正交分解研究湍流流场相干结构和所造成的气动光学畸变间的关系. 以高速导弹红外窗口绕流流场的计算流体力学结果为源数据, 通过奇异值分解实现流场折射率场的本征正交分解. 比较折射率场的低阶奇异值和源数据产生的气动光学畸变参数光程差, 二者有很好的吻合性. 由此提出一种采用折射率场的奇异值直接仿真光程差的简易算法. 仿真表明只利用二维折射率场的第一阶奇异值即能描述畸变波前的特性, 其光程差的相对误差不超过 $\pm 2\%$, 验证了湍流中的相干结构造成了大部分的气动光学畸变.

关键词:气动光学; 相干结构; 奇异值分解

中图分类号: TP29/v21 **文献标识码:** A

PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION APPLIED IN THE ANALYSIS OF SIMULATING AERO-OPTICAL DISTORTIONS

WU Lin, FANG Jian-Cheng, YANG Zhao-Hua

(School of Instrumentation Science & Opto-Electronics Engineering, Beijing University of
Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The connection between coherent structure in turbulence and the aero-optical distortions was studied through proper orthogonal decomposition (POD). The computational fluid dynamics (CFD) solutions of high speed turbulence around a missile IR window were used as resource data. Singular vector decomposition was adopted to achieve POD for the spatial-dependent mean flow field. As optical path difference (OPD) is often used to describe optical performance, the low-order singular value of the refractive index fields has good agreement with OPD caused by the source data. Then a plain method for simulating aero-optical distortions was proposed, in which only singular values of refractive index were used. By using the first order singular value, the method can represent the characters of aberrated wave-front, and the relative error of OPD is no more than 2%. The results also validate the argumentation that most aero-optical distortions are caused by coherent structure.

Key words: aero-optics; coherent structure; singular value decomposition

引言

红外成像制导技术具有自动识别目标能力强、导引精度高、智能化高和抗干扰能力强等优点, 在军用和民用领域获得广泛的应用^[1]. 但飞行器在大气中高速飞行时, 周围产生复杂绕流流场, 其时变折射率引起通过流场的光波振幅和相位变化, 红外末制导过程伴随着强烈的气动光学效应, 严重影响了成

像质量, 序列图像呈抖动效应, 使目标识别非常困难^[2]. 提高制导精度, 就需仿真湍流流场产生的光学畸变, 为图像校正、湍流控制等提供理论基础. 国外研究表明, 不可压缩流和可压缩流中, 相干结构都造成了大部分的气动光学效应^[3,4]. 提取相干结构并分析研究相干结构和气动光学畸变间的关系, 可降低计算气动光学畸变的信息量, 对建立有效简便的气动光学效应计算仿真方法有重要作用.

收稿日期: 2006-09-04, 修回日期: 2007-01-08

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(513230103-3)资助项目

作者简介: 吴琳(1983-), 女, 山东菏泽人, 博士研究生, 主要研究方向为精确制导.

Received date: 2006-09-04, revised date: 2007-01-08

Cicchiello 利用本征正交分解 (proper orthogonal decomposition, POD) 研究了 2 维时变流场, 采用主元素分解 (principal component analysis, PCA) 方法实现 POD, 给出了低阶模态系数的时变规律, 指出仅采用低阶模态就能较好模拟流场产生的气动光学畸变^[5,6]. POD 广泛应用于湍流的相干结构提取上^[7], Cicchiello 首先将其应用于湍流折射率以研究其产生的气动光学畸变. 但 Cicchiello 的研究集中在分解后低阶模态的系数时变规律及对气动光学畸变贡献率的分析, 缺少由分解结果到光学畸变的直观规律研究. 本文选用另一种 POD 实现方法奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) 对时间平均的湍流折射率场进行研究, 分析了不同截面上奇异值与所产生的气动光学畸变间的关系, 由此提出一种简便有效的气动光学畸变仿真方法.

1 气动光学畸变

流场的计算流体力学 (Computational fluid dynamics, CFD) 结果能提供离散时间间隔 3 维网格点上的密度场数据, 采用该密度场数据得到折射率场数据, 计算其产生的光学畸变. 因流场速度远小于光速, 且光波传输通过的湍流层厚度较短, 光波足以在湍流流场发生变化前通过该湍流层. 因此, 可计算某时刻的折射率场空间结构造成的气动光学畸变. 本文采用时间平均的流场密度数据, 从不同截面的空间位置上分析气动光学畸变特性.

1.1 折射率场

气体介质折射率 x 和密度 ρ 间的关系由 Gladstone-Dale 公式给出

$$x = 1 + k_{CD} = 1 + k_{CD}(\lambda)\rho, \quad (1)$$

式中, ρ 是介质密度值, k_{CD} 是 Gladstone-Dale 常数, 查阅红外手册^[8], 对标准空气满足下式

$$k_{CD} = 0.133 + 0.00092/\lambda^2, \quad (2)$$

式中, λ 是光波波长, 单位为 μm .

1.2 光程和光程差

光波波前性质通常用光程^[9] (optical path length, OPL) 来表示. 将每条光线的传输路径分为不同段, 第 k 段传输路径上对应的 OPL 为^[10]

$$\text{OPL}_k = \Delta L_k x(\lambda, \rho)_k, \quad (3)$$

式中, ΔL_k 为第 k 段传输路径的长度.

传输路径上的整体 OPL 为分段路径上 OPL 的和. 光波波前的变化更多用光程差^[11] (optical path difference, OPD) 表示

$$\text{OPD} = \text{OPL} - \text{OPL}_{\text{ref}}, \quad (4)$$

式中, OPL_{ref} 是光波经过真空的参考光程.

2 湍流折射率场的 POD 分析及实现方法 SVD

POD 的主要思想是在一组子空间中找到一组正交基函数, 使样本空间中的样本可用这组基的最初 l 个基函数最优表示. POD 是一种获取高维系统低维描述的有效方法, 最大特征在于其最优性: 能以有限维的模态描述出无限维系统最主要成分^[12]. 1967 年, Lumley 首先采用 POD 提取湍流速度场的相干结构, 该方法不需预知流场中相干结构形状和位置的先验知识, 对实验数据及计算数据的相干结构辨识上都有重要作用, 此后国外有很多湍流的 POD 应用研究, 包括各向异性湍流及粒子影像测速 (particle image velocimetry, PIV) 中, 获得了实验中观察到的相干结构^[13].

2.1 折射率场的 POD 分析

利用 POD 可将湍流折射率场 x 分解为一系列最优正交基函数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ 的线性和, 用均方根误差度量该最优问题表示为

$$E\{\|x - x(l)\|^2\} \leq E\{\|x - \hat{x}(l)\|^2\}, \quad (5)$$

式中, $x(l)$ 是用最初 l 个最优正交基表示的折射率 x , $\hat{x}(l)$ 是用 l 个任意基表示的 x .

该基函数使折射率 x 满足以下极值条件:

$$\begin{aligned} \min \varepsilon^2(l) &= E\{\|x - x(l)\|^2\}, \\ \text{s. t. } \varphi_i^T \varphi_j &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $x(l) = \sum_{i=1}^l y_i \varphi_i (l \leq m)$.

2.2 折射率场的奇异值分解 SVD

POD 有 3 种实现方法, Karhunen-Loeve 分解 (Karhunen-Loeve decomposition, KLD), PCA 和 SVD, 且 3 种方法互相等效^[14]. 在矩阵理论中, 矩阵的奇异值是矩阵的固有特征, 具有较好的稳定性, 即当矩阵元素发生小变动时, 其奇异值变化很小, 同时矩阵奇异值还具有比例不变性和旋转不变性^[15]. 因此, 本文选用 SVD 实现 POD, 分析湍流折射率场固有特征和其造成的气动光学畸变间的关系.

设 2 维截面上的折射率场为 $X_{m \times n}$, m 为 2 维折射率场的一维展开向量维数, n 为样本数. 记 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则 $XX^T \in R^{m \times m}$ 是 $m \times m$ 的半正定矩阵.

设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 是 R^m 空间中选取的任一组正交基, 则

$$x_i = c_{1i}\varphi_1 + c_{2i}\varphi_2 + \cdots + c_{mi}\varphi_m \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

式中, $c_{ji} = \varphi_j^T x_i$.

取前 l 个正交基近似表示, 得到

$$x_i(l) = c_{1i}\varphi_1 + c_{2i}\varphi_2 + \cdots + c_{li}\varphi_l \quad (8)$$

误差函数为

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(l) &= \sum_{i=1}^n \|x_i - x_i(l)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=l+1}^m c_{ji}\varphi_j \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^m c_{ji}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^m \varphi_j^T x_i x_i^T \varphi_j \\ &= \sum_{j=l+1}^m \varphi_j^T X X^T \varphi_j = \|X^T \Phi_{m-l}\|_F^2 \quad (9) \end{aligned}$$

式中, $\Phi_{m-l} = (\varphi_{l+1}, \varphi_{l+2}, \dots, \varphi_m)$, 问题转化为如下极值问题

$$\begin{aligned} \min \varepsilon^2(l) &= \sum_{j=l+1}^m \varphi_j^T X X^T \varphi_j, \\ \text{s. t. } \varphi_j^T \varphi_j &= \delta_{ij} \quad (10) \end{aligned}$$

引入 Lagrangian 乘子 u_{ij} , 得到 Lagrangian 函数

$$L = \sum_{j=l+1}^m \varphi_j^T X X^T \varphi_j - \sum_{i=l+1}^m \sum_{j=l+1}^m u_{ij} (\varphi_i^T \varphi_j - \delta_{ij}) \quad (11)$$

上式两边对 φ_j 取导数得

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi_j} &= 2 \left(X X^T \varphi_j - u_{ij} \sum_{i=l+1}^m \varphi_i \right) \\ &= 2 X X^T \varphi_j - 2 \Phi_{m-l} \mathbf{u}_j, \\ (j=l+1, l+2, \dots, m) \quad (12) \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{u}_j = (u_{(l+1)j}, u_{(l+2)j}, \dots, u_{mj})^T$, 将上式写为矩阵形式为

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{m-l}} = 2 X X^T \Phi_{m-l} - 2 \Phi_{m-l} U_{m-l} \quad (13)$$

式中, $U_{m-l} = (\mathbf{u}_{l+1}, \mathbf{u}_{l+2}, \dots, \mathbf{u}_m)^T$.

使 $\frac{\partial L}{\partial \Phi_{m-l}} = 0$, 得到

$$X X^T \Phi_{m-l} = \Phi_{m-l} U_{m-l} \quad (14)$$

两边左乘 Φ_{m-l}^T , 得到

$$U_{m-l} = \Phi_{m-l}^T X X^T \Phi_{m-l} \quad (15)$$

因 U_{m-l} 是半正定矩阵, 存在一个正交矩阵 P , 使得

$$\Lambda = P^T U_{m-l} P \quad (16)$$

将式(15)代入式(16)得

$$\Lambda = P^T \Phi_{m-l}^T X X^T \Phi_{m-l} P \quad (17)$$

式中, Λ 是对角阵, 式(14)右乘 P 得

$$X X^T \Phi_{m-l} P = \Phi_{m-l} U_{m-l} P \quad (18)$$

因 P 是正交矩阵, 有 $P P^T = I$, 代入上式有

$$X X^T \Phi_{m-l} P = \Phi_{m-l} P P^T U_{m-l} P \quad (19)$$

则由式(16), 上式转化为

$$X X^T \Phi_{m-l} P = \Phi_{m-l} P \Lambda \quad (20)$$

从上式可见, Λ 是 $X X^T$ 的特征根 λ_i , $\Phi_{m-l} P$ 由 $X X^T$ 特征根 λ_i 的对应特征向量组成. 把 $X X^T$ 的特征根按降序排列为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > \lambda_{l+1} = \dots = \lambda_m = 0$. 由矩阵理论, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} (i = 1, 2, \dots, m)$ 称为矩阵 X^T 的奇异值, 即 Λ 的对角线元素的平方根是矩阵 X^T 的奇异值 σ_i , $\Phi_{m-l} P$ 由 σ_i 的对应特征向量组成.

下面不加证明得引用如下定理^[16]

设 $A \in R^{n \times m}$, $Q \in R^{m \times m}$ 是正交矩阵, $\|\cdot\|_F$ 是 Frobenius 范数, 则 $\|A\|_F = \|A Q\|_F$.

由式(9)和上述定理得

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(l) &= \|X^T \Phi_{m-l}\|_F^2 = \|X^T \Phi_{m-l} P\|_F^2 \\ &= \text{tr}((X^T \Phi_{m-l} P)^T X^T \Phi_{m-l} P) \\ &= \text{tr}(\Lambda) \quad (21) \end{aligned}$$

因 Λ 是对角矩阵, 且其对角线元素是矩阵 X^T 奇异值的平方, 所以, 要得到 $\varepsilon^2(l)$ 的最小值, 只需使 Λ 的对角线元素为 X^T 的最后 $m-l$ 个奇异值, 即

$$\varepsilon^2(l) = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=l+1}^m \sigma_i^2 \quad (22)$$

由此, 证得当取二维折射率场的转置矩阵 X^T 奇异值对应的特征向量作为最优正交基时, 误差最小, 即利用 SVD 可实现 POD, 提取出湍流的相干结构, 也表明, 利用低阶奇异值和对应特征向量即能反映出流场的主要特征.

3 实验结果与分析

3.1 流场 CFD 结果

以导弹红外窗口外的绕流流场为例, 流场条件为马赫数 7 mach, 高度 30 km, 其平均密度场如图 1 所示. 气动光学畸变的仿真数据取红外窗口为网格数 $64 \times 80 \times 64$ 的区域, 真实物理区域的坐标为

$x \in [69 \text{ mm}, 132 \text{ mm}]$, $y \in [0, 79 \text{ mm}]$, $z \in [-31 \text{ mm}, 32 \text{ mm}]$. 取 $x = 78 \text{ mm}$ 处的 XZ 截面为例, 对其密度数据用 Gladstone-Dale 公式后的折射率场如图 2 所示.

3.2 结果与分析

对不同 x 位置上的 ZY 截面上的折射率数据作 SVD, 以图 2 截面数据为例, 奇异值结果如图 3 所示.

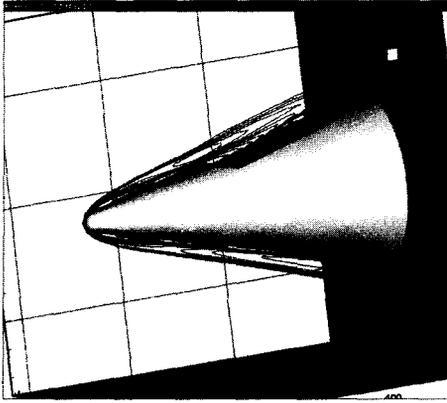


图1 平均密度场等高线
Fig.1 Density contour

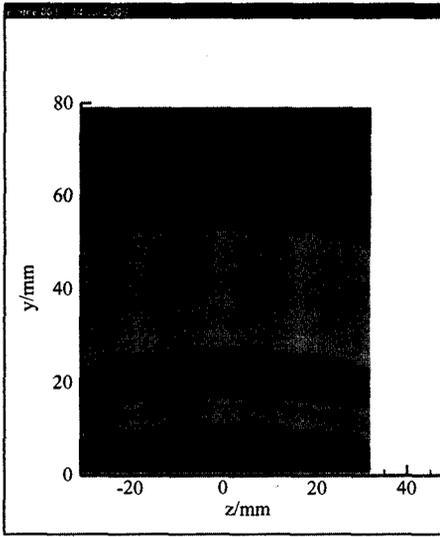


图2 $x = 78\text{mm}$ 处的 ZY 截面折射率场
Fig.2 Refractive index field of ZY plane at $x = 78\text{mm}$

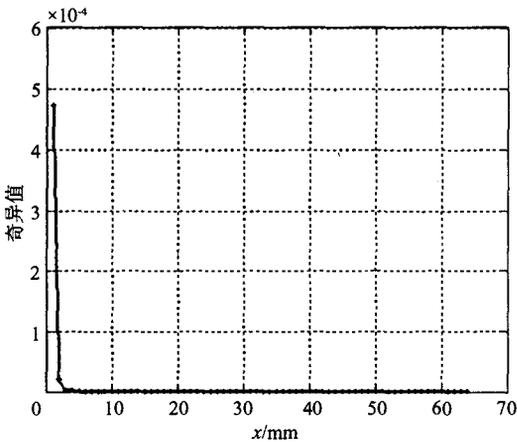


图3 $x = 78\text{mm}$ 处的 ZY 截面折射率场的奇异值
Fig.3 The singular value of ZY plane at $x = 78\text{mm}$

由图 3 可见,该折射率场的奇异值急剧下降,取

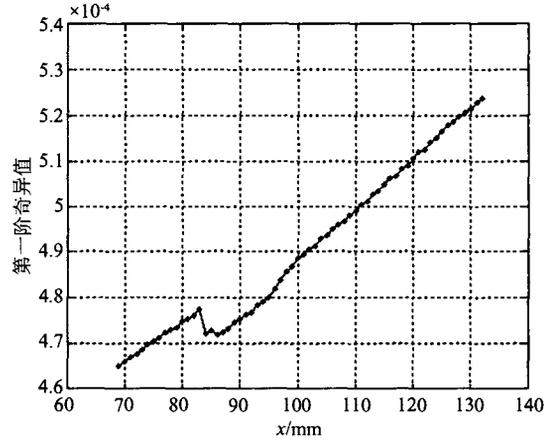


图4 ZY 截面折射率场第一阶奇异值随 x 变化曲线
Fig.4 The first order singular value of ZY plane

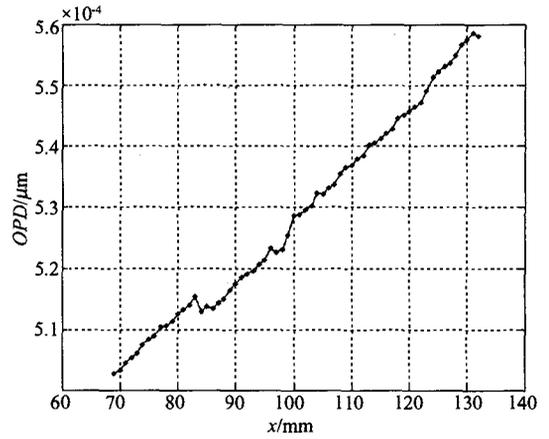


图5 $z = -30\text{mm}$ 处的光程差随 x 变化曲线
Fig.5 Optical path difference at $z = -30\text{mm}$

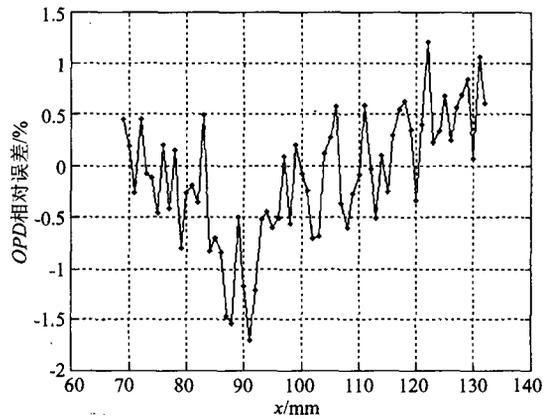


图6 $z = -30\text{mm}$ 处光程差的相对误差
Fig.6 The relative error of optical path difference at $z = -30\text{mm}$

第一阶奇异值及对应特征向量作最优正交基重构原折射率,由式(22)可得其重构元素和的相对误差只有 0.184% . 第一阶奇异值及其对应特征向量即能

反映湍流流场的主要特性。

第一阶奇异值随 x 方向的变化曲线如图 4 所示。设光线沿 y 方向传输,由式(3)和式(4)计算通过该区域的光程差,任取 $z = -30\text{mm}$ 处 x 方向的光程差如图 5 所示。

对比图 4 和图 5 可见,ZY 截面上的第一阶奇异值随 x 方向的变化趋势很好得吻合于任意 z 位置上的光程差随 x 方向的变化趋势,反映了湍流的相干结构是气动光学传输效应的主要成因。因此可仅采用第一阶奇异值模拟 z 位置上 x 方向的光程差,即第一阶奇异值乘以比例系数 k 后叠加上小尺度涡产生光程差的统计分布,该比例系数 k 与 CFD 网格的物理间隔有关。本文中 CFD 计算网格的物理间隔为 1mm ,即取 $k = 10^{-3}$ 。设 x 方向上的第一阶奇异值向量为

$$\Theta = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{64}] \quad (23)$$

则高速流场中相干结构产生的任意 z 位置上 x 方向的 OPD 表示为

$$\text{OPD}_C = k \cdot \Theta \quad (24)$$

假设小尺度涡产生的光程差高斯分布,叠加上式,得到光程差的相对误差不超过 $\pm 2\%$,如图 6 所示。

4 结语

本文从理论推导和数值仿真研究了 SVD 在红外目标气动光学传输中的应用,分析了湍流相干结构和气动光学畸变间的关系。提出的采用低阶奇异值直接仿真光程差的方法,可描述畸变波前的特征,仿真光程差的相对误差不超过 $\pm 2\%$ 。从理论和数值分析得出小尺度涡产生光程差的统计分布特性将是下步的研究内容。

REFERENCES

- [1] NIU Zhao-Dong, CHEN Zeng-Ping, WANG Wei-Hua. Research on the operating range of staring IR imaging system in sea-sky background[J]. *J. Infrared Millim. Waves*(王卫华,牛照东,陈曾平.海空背景凝视红外成像系统作用距离研究. *红外与毫米波学报*),2006,25(2):150—152.
- [2] HONG Han-Yu, ZHANG Tian-Xu, YU Guo-Lian. Regularized restoration algorithm of astronautical turbulence-degraded images using maximum-likelihood estimation[J]. *J. Infrared Millim. Waves*(洪汉玉,张天序,余国亮.航天湍流退化图像的极大似然估计规整化复原算法. *红外与毫米波学报*),2005,24(2):130—134.
- [3] Truman C R, Lee M J. Effects of organized turbulence structures on the phase distortions in a coherent optical beam propagating through a turbulent shear flow[J]. *Phys. Fluids A*,1990,2:851—857.
- [4] Wissler J B, Roshko A. Transmission of thin light beams through turbulent mixing layers[C]. AIAA 30th Aerospace Science Meeting, Reno, NV,1992, AIAA92—0658.
- [5] Cicchiello J M. Low order representation of dynamic aerodynamic distortions[D]. Ph. D. Dissertation. University of Notre Dame,2001.
- [6] Cicchiello J M, Jumper E J. Addressing the oblique-viewing aero-optic problem with reduced order methods[C]. 32nd AIAA plasmadynamics and lasers conference, Anaheim CA, 2001, AIAA 2001—2799.
- [7] Utrukar Y, Zhang B, Reduced-Order W S. Description of fluid flow with moving boundaries by proper orthogonal decomposition[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2005,26:276—288.
- [8] Wolf W, Zizzis, G J. *The Infrared Handbook*[M]. Michigan:Environmental Research Institute of Michigan, 1978, 16—24.
- [9] Jumper E J, Fitzgerald E, J. Recent advances in Aero-Optics[J]. *Prog. Aerospace Sci.*,2001,37:299—339.
- [10] Jones M J, Bender E E. CFD-Based computer simulation of optical turbulence through aircraft flowfields and wakes [C]. AIAA 32nd Plasmadynamics and Lasers Conference, Anaheim, CA, 2001, AIAA 2001—2798.
- [11] Arunajatesan S, Sinha N. Analysis of line of sight effects in distortions of laser beams propagating through a turbulent turret flow field[C]. AIAA 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, 2005, AIAA 2005—1081.
- [12] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*[M]. Cambridge: Cambridge university press,1998,75.
- [13] Braud C, Heitz D, Arroyo G. Low-dimensional analysis, using POD, for two mixing layer-wake interactions[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*,2004,25:351—363.
- [14] Liang Y C, Lee H P, Lim S P, et al. Proper Orthogonal Decomposition and its applications-Part I: Theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*,2002,252(3):527—544.
- [15] CHENG Jun-Sheng, YU De-Jie, YANG Yu. Fault diagnosis approach based on intrinsic mode singular value decomposition and support vector machines[J]. *Acta Automatica Sinica*(程军圣,于德介,杨宇.基于内禀模态奇异值分解和支持向量机的故障诊断方法. *自动化学报*), 2006,32(3):475—480.
- [16] Horn R A, Johnson C R. Translated by YANG Qi. *Matrix Analysis*[M]. Beijing: China Machine Press (in China) (Horn R A, Johnson C R. 杨奇译. *矩阵分析*.北京:机械工业出版社), 2005,72.