

文章编号:1001-9014(2007)02-0141-05

一种基于神经网络算法的频谱分析方法

曾喆昭^{1,2}, 竺炜², 王耀南¹

(1. 湖南大学 电气与信息工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 长沙理工大学 电气与信息工程学院, 湖南 长沙 410076)

摘要:提出了一种基于神经网络算法的频谱分析方法,研究了神经网络算法的收敛性,给出了频谱分析的应用实例. 研究表明,本文提出的频谱分析方法不涉及复数的乘法运算和加法运算,计算精度高,且速度快,便于软件和硬件实现,特别适合于DSP软硬件实现,因而是一种有效的频谱分析方法.

关键词:神经网络;频谱分析;算法;收敛性

中图分类号:TN911.7 **文献标识码:**A

ANALYSIS APPROACH OF SPECTRUM BASED ON NEURAL NETWORK ALGORITHM

ZENG Zhe-Zhao^{1,2}, ZHU Wei², WANG Yao-Nan¹

(1. College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. College of Electrical and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

Abstract: The method of spectrum analysis by using neural network algorithm was presented. The convergence of the neural-network algorithm was studied. Simulation examples of spectrum analysis were given. The results show that the approaches of spectrum analysis presented in this study are not involved in plural multiplication operation and plural addition operation. The high accuracy and fast convergence speed are the features of the method presented in this study. Software and hardware of the approach are easily implemented. It is especially fit for the implementation of software and hardware about DSP. Therefore, the methods of spectrum analysis proposed in this study are effective.

Key words: neural-network; spectrum analysis; algorithm; convergence

引言

众所周知,有限长连续信号和周期信号的频谱分析,普遍采用将连续信号采样变成离散信号,然后将有限长离散信号作快速傅里叶变换(FFT)处理,进而得到有限长连续信号和周期信号的频谱^[1]. 实际上,快速傅里叶变换(FFT)并不是一种新变换,而是离散傅里叶变换(DFT)的一种快速算法而已. 由于在通信、图像传输、雷达、声纳等领域都涉及信号的频谱分析,需要进行DFT的计算,此外,在系统分析、设计和实现中也都会用到DFT计算,因此,DFT的计算在数字信号处理中具有十分重要的作用. 但是,在相当长的时间里,由于DFT的计算量太大,即使采用计算机也很难对问题进行实时处理,因而没有得到真正的应用. 直到1965年库利(J. W.

Cooley)和图基(J. W. Tukey)在《计算数学》(Mathematics of Computation)杂志上发表了著名的“机器计算傅里叶级数的一种算法”的文章,提出了DFT的一种快速算法,后来又有桑德(G. Sabde)和图基的快速算法相继出现后,情况才发生了根本性的改变. 经过人们对算法的改进,发展和完善了一套高速有效的计算方法,使DFT的计算量大大简化,从而使DFT的运算在实际中得到了多学科领域的广泛应用^[2-7]. 然而,DFT或FFT都涉及复数的乘法和加法运算,给计算带来不方便,特别是给硬件实现带来不方便. 文献[8]用外差混频和直接检波方法测量亚毫米波连续波源的频谱,取得了较好的研究成果. 然而,近年来,国内外在用现有的频谱分析理论方法在各领域中的应用报道较多,而有关频谱分析的新理论和新方法报道较少,特别是用神经网络方法分

收稿日期:2006-04-28,修回日期:2006-11-07

基金项目:国家自然科学基金(60375001)资助项目

作者简介:曾喆昭(1963-),男,湖南蓝山人,教授,博士研究生,主要从事智能系统开发、智能信息处理与应用等研究领域.

Received date: 2006-04-28, revised date: 2006-11-07

析信号的频谱以及滤波器优化设计的报道更少,为此,作者提出了一种基于神经网络算法的信号频谱分析方法.下面详细介绍神经网络算法及其在信号频谱分析方面应用实例.

1 频谱分析的算法模型

1.1 周期信号的连续时间傅里叶级数

众所周知,对于周期为 T 的周期信号 $f(t)$,可以表示为连续时间傅里叶级数(CTFS),即

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (1)$$

其中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 为基波角频率, a_0 为直流分量, a_n 、 b_n 为傅里叶级数系数,且为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (2)$$

对于时限非周期信号 $f(t)$, ($0 \leq t \leq T$), 将 $f(t)$ 以周期 T 延拓而成的周期信号记为 $f_p(t)$, 则有

$$f_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t - mT) \quad (3)$$

其中 m 为整数. 很显然, 当时间 t 为 $0 \leq t \leq T$ 时有 $f_p(t) = f(t)$, 因而周期信号 $f_p(t)$ 的连续时间傅里叶级数在主值周期 ($0 \leq t \leq T$) 内同样可表示为式(1)的形式.

对于频带有限信号 $f(t)$ ($0 \leq \omega \leq N\omega_0$), 式(1)可改写为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (4)$$

或

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (5)$$

其中: $A_0 = a_0$ (为直流分量); $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (为 n 次谐波分量的振幅); $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$ (为 n 次谐波分量的相位). 只要获得 a_n 和 b_n , 就得到了信号 $f(t)$ 的幅度谱特性 A_n 和相位谱特性 φ_n .

当 $f(t)$ 是复杂信号或未知信号时, 由式(2)求 a_n 和 b_n 是困难的, 为此, 将式(4)离散化为下列形式

$$f(k) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega_0 kT_s) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\omega_0 kT_s) \quad (6)$$

其中 T_s 为采样周期, 且为 $T_s \leq \frac{\pi}{N\omega_0} = \frac{T}{2N}, k=0, 1, 2, \dots, M, M \geq 2N + 1$.

设 $\mathbf{F} = [f(0), f(1), \dots, f(M)]^T, \mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T, \mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T,$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cos(\omega_0 T_s) & \cos(2\omega_0 T_s) & \dots & \cos(M\omega_0 T_s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \cos(N\omega_0 T_s) & \cos(2N\omega_0 T_s) & \dots & \cos(MN\omega_0 T_s) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (M+1)} \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega_0 T_s) & \dots & \sin(M\omega_0 T_s) \\ 0 & \sin(2\omega_0 T_s) & \dots & \sin(2M\omega_0 T_s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \sin(N\omega_0 T_s) & \dots & \sin(MN\omega_0 T_s) \end{bmatrix}_{N \times (M+1)} \quad (8)$$

则式(6)可写为下列矩阵形式

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} + \mathbf{S}^T \mathbf{B} \quad (9)$$

1.2 基于傅里叶基函数的算法模型

由式(7)可知, 若以 \mathbf{F} 为神经网络训练样本向量, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为神经网络训练权向量, \mathbf{C}^T 和 \mathbf{S}^T 为神经网络激励矩阵, 则有图 1 所示的傅里叶基函数神经网络模型.

神经网络算法如下

(1) 神经网络输出向量

$$\mathbf{F}_{nn}^q = \mathbf{C}^T \mathbf{A} + \mathbf{S}^T \mathbf{B} \quad (10)$$

(2) 误差向量

$$\mathbf{E}^q = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{nn}^q \quad (11)$$

(3) 性能指标

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^q\|^2 \quad (12)$$

(4) 权向量调整(采用梯度下降法)

权向量调整量为

$$\Delta \mathbf{A}^q = -\eta \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}^q} = \eta \mathbf{C} \mathbf{E}^q \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{B}^q = -\eta \frac{\partial J}{\partial \mathbf{B}^q} = \eta \mathbf{S} \mathbf{E}^q \quad (14)$$

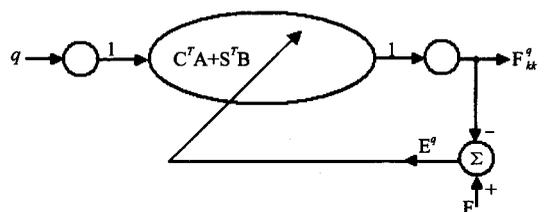


图 1 傅里叶基函数神经网络模型
Fig. 1 The model of the neural network with Fourier basis functions

权向量调整如下

$$\mathbf{A}^{q+1} = \mathbf{A}^q + \eta \mathbf{C}\mathbf{E}^q, \quad (15)$$

$$\mathbf{B}^{q+1} = \mathbf{B}^q + \eta \mathbf{S}\mathbf{E}^q, \quad (16)$$

其中 η 为学习率,且 $0 < \eta < 1$, q 表示神经网络并行训练次数.

1.3 神经网络算法收敛性讨论

众所周知,学习率 η 的大小对神经网络收敛性有重要影响,太小会使神经网络收敛很慢,增加了计算量;太大又会使神经网络出现振荡现象而无法收敛.为了保证神经网络算法绝对收敛,下面给出了神经网络算法的收敛性定理.

定理 1 只有当学习率为 $0 < \eta < \frac{2}{\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\|}$ 时,神经网络算法是收敛的,其中 η 是学习率, \mathbf{C} 和 \mathbf{S} 是分别由式(7)和式(8)构造的矩阵.

证明:取 Lyapunov 函数为: $V^q = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^q\|^2$, 则有:

$$\Delta V^q = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^{q+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^q\|^2, \quad (17)$$

$$\Theta \mathbf{E}^{q+1} = \mathbf{E}^q + \Delta \mathbf{E}^q = \mathbf{E}^q + \frac{\partial \mathbf{E}^q}{\partial \mathbf{A}^q} \Delta \mathbf{A}^q + \frac{\partial \mathbf{E}^q}{\partial \mathbf{B}^q} \Delta \mathbf{B}^q, \text{ 且}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}^q}{\partial \mathbf{A}^q} = -\mathbf{C}^T, \frac{\partial \mathbf{E}^q}{\partial \mathbf{B}^q} = -\mathbf{S}^T, \text{ 根据式(13)和式(14)则有}$$

$$\mathbf{E}^{q+1} = \mathbf{E}^q - \eta(\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S})\mathbf{E}^q = [\mathbf{I} - \eta(\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S})]\mathbf{E}^q, \text{ 从而得}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}^{q+1}\|^2 &= \|\mathbf{I} - \eta(\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S})\mathbf{E}^q\|^2 \\ &= \|\mathbf{I} - \eta(\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S})\|^2 \cdot \|\mathbf{E}^q\|^2, \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)代入式(17)得

$$\Delta V^q = \frac{1}{2} [\|\mathbf{I} - \eta(\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S})\|^2 - 1] \cdot \|\mathbf{E}^q\|^2, \quad (19)$$

其中 $\|\bullet\|$ 是 Euclid 范数的平方, \mathbf{I} 为单位矩阵. 又因为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I} - \eta(\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S})\|^2 &\leq (\|\mathbf{I}\| - \eta\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\|)^2 \\ &= (1 - \eta\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\|)^2 \\ &= 1 - 2\eta\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\| + \eta^2\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\|^2, \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)代入式(19)有

$$\begin{aligned} \Delta V^q &\leq \frac{1}{2} \eta \|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\| (-2 + \eta\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} \\ &\quad + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\|) \cdot \|\mathbf{E}^q\|^2, \end{aligned} \quad (21)$$

又因为 $\frac{1}{2} \eta \|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\| \cdot \|\mathbf{E}^q\|^2 > 0$, 由式(21)

可知,要使神经网络算法绝对收敛(即 $\Delta V^q < 0$), 则必有下式成立

$$-2 + \eta \|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\| < 0, \quad (22)$$

即: $0 < \eta < \frac{2}{\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\|}$. 很显然,当学习率 η 满

足条件 $0 < \eta < \frac{2}{\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\|}$ 时, $\Delta V^q < 0$, 因而本

文讨论的神经网络算法是收敛的,证毕.

推论:如果周期信号 $f(t)$ 关于纵轴偶对称,则其傅里叶展开式只有余弦级数部分,学习率为 $0 < \eta < \frac{2}{\|\mathbf{C}^T\mathbf{C}\|}$.

1.4 神经网络训练步骤

Step1. 以采用周期 $T_s \leq \frac{T}{2N}$ 对信号 $f(t)$ 采样获取

训练样本向量 $\mathbf{F} = [f(0), f(1), \dots, f(M)]^T$; 随机产生权向量 $\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$ 和 $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T$, 给定任意小正实数 Tol, 由定理 1 确定学习率

$$0 < \eta < \frac{2}{\|\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\|}, \text{ 令 } J = 0;$$

Step2. 由式(10)计算神经网络输出向量: $\mathbf{F}_m^q = \mathbf{C}^T\mathbf{A} + \mathbf{S}^T\mathbf{B}$;

Step3. 由式(11)和(12)分别计算误差向量与性能指标: $\mathbf{E}^q = \mathbf{F} - \mathbf{F}_m^q, J = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^q\|^2$;

Step4. 由式(15)和式(16)进行权向量调整: $\mathbf{A}^{q+1} = \mathbf{A} + \eta \mathbf{C}\mathbf{E}^q, \mathbf{B}^{q+1} = \mathbf{B} + \eta \mathbf{S}\mathbf{E}^q$;

Step5. 判断性能指标是否满足 $J < \text{Tol}$?, 若满足,结束训练,否则返回 Step2 重复上述训练过程.

1.5 信号的频谱特性分析

上述神经网络训练结束后,已获得了神经网络

权向量 $\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$ 和 $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T$,

即式(4)中的傅里叶级数系数,因此信号的幅频特

性为: $A_0 = a_0, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (n = 1, 2, \dots, N)$; 相频特

性为: $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} (n = 1, 2, \dots, N)$.

2 仿真实例

为了检验本文方法的有效性,给出了 2 个频谱分析实例.

例 1. 周期信号的频谱分析^[9]

设周期信号为

$$\begin{aligned} f(t) &= 37.66\sin(\omega_0 t) + 0.933\sin(2\omega_0 t + 10^\circ) \\ &\quad + 1.813\sin(3\omega_0 t + 20^\circ) + 0.885\sin(4\omega_0 t + 30^\circ) \\ &\quad + 1.943\sin(5\omega_0 t + 40^\circ) + 0.97\sin(6\omega_0 t + 45^\circ), \end{aligned}$$

其中基波角频率为 $\omega_0 = 2\pi f_0 = 100\pi$, 很显然,最高

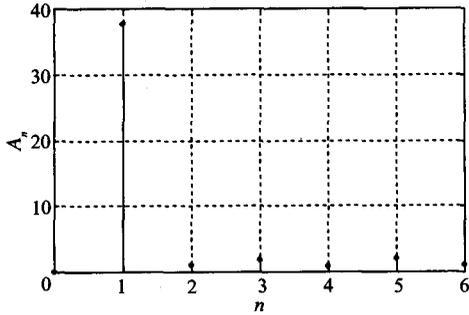


图3 例1幅频特性图
Fig.3 Amplitude-frequency characteristic of the example 1

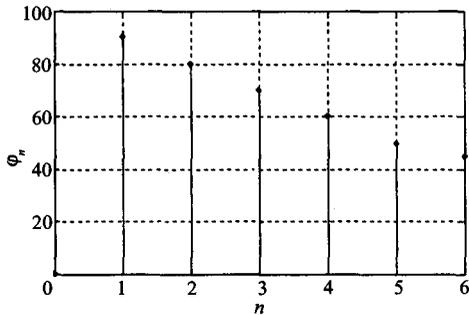


图4 例1相频特性图
Fig.4 Phase-frequency characteristic of the example 1

谐波次数为6次,因此取 $N=6$,采样周期取为 $T_s = \frac{T}{4N}$,构造激励矩阵 C 和 S ;给定 $Tol = 10^{-7}$;计算学

$$\text{习率: } \eta = \frac{1.98}{\|C^T C + S^T S\|} \approx 0.0768276, \text{ 经过5次神经网络并行训练,得性能指标为: } J = 5.369452128732994 \times 10^{-17},$$

幅频特性如图3所示,相频特性如图4所示,其中权向量训练结果如下:

$$A = [0.000000000000225, 0.000000000000039, 0.16201374976362, 0.62008251984981, 0.442500000000037, 1.24893632562132, 0.68589357775132]^T,$$

$$B = [37.66000000000005, 0.91882563356038, 1.70366272148485, 0.76643248234922, 1.48842435298017, 0.68589357775095]^T,$$

由权向量 A, B 可得各次谐波的幅度向量: $A_n = \text{sqrt}(A, B)$,经计算可得各次谐波的幅度为

$$A_n = [37.66000, 0.93297, 1.81299, 0.88499, 1.94299, 0.96999],$$

由计算结果和给定的谐波信号可知,计算精度达 10^{-5} .

例2.已知某非周期信号为

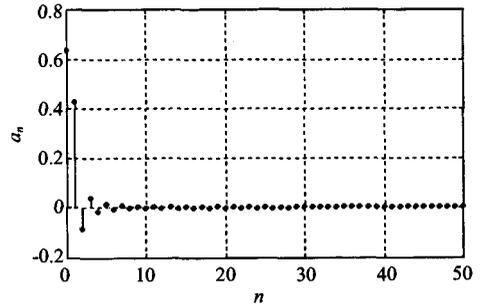


图5 例2傅里叶系数分析结果
Fig.5 The analysis results of the Fourier coefficients of the example 2

$$f(t) = |\cos(100\pi t)|, \quad 0 \leq t \leq 0.01s$$

将 $f(t)$ 以周期 $T=0.01s$ 进行周期重复可得偶对称的周期信号,由傅里叶级数分析方法易知, $a_0 = \frac{2}{\pi}$,

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}, b_n = 0, n=1, 2, \dots, \text{显然信号} f(t) \text{ 含有高次谐波.}$$

如果取谐波次数为 $N=50$,采样周期为 $T_s = \frac{T}{2N} = 0.1ms$,构造激励矩阵 C ,给定 $Tol = 10^{-8}$,

$$\text{计算学习率: } \eta = \frac{1.5}{\|C^T C\|} \approx 0.0135731, \text{ 则经过12}$$

次神经网络并行训练,得性能指标为: $J = 2.475457443853612 \times 10^{-9}$,计算精度达 10^{-5} ,其傅里叶系数如图5所示.由于傅里叶系数个数较多,此处略去了计算结果的罗列.

3 结语

本文提出的基于神经网络算法的信号频谱分析方法和 FIR 线性相位数字滤波器的优化设计方法,两种方法都不涉及复数的乘法运算和复数的加法运算,因而简化了软硬件实现,特别适合于 DSP 芯片的软、硬件实现.与文献[9]相比,仿真实例1的计算精度提高了4个数量级;仿真实例2也验证了本文算法的有效性.当然,本文提出的信号频谱分析方法,其计算量比 DFT 稍大,更不用说比 FFT 方法了.但是,随着计算机的速度越来越高,特别是近年来高速 DSP 的出现,不仅运行速度达到 100MIPs 以上,而且其 CPU 采用了改进型的哈佛结构,使得乘与累加计算变得轻而易举,因而其实时性已不是最关心的问题了.该研究成果已成功应用在长沙科瑞特电子科技发展公司的虚拟仪器项目研发中,因而是一种有效的频谱分析方法.

REFERENCES

- [1] CHEN Sheng-Tan, GUO Bao-Long. *Signal and System* [M]. Xian: Xidian University Press, second edition (陈生潭, 郭宝龙. 信号与系统. 西安: 西安电子科技大学出版社, 第2版), 2001, 262—277.
- [2] CHENG Pei-Qing. *Digital Signal Processing* [M]. Beijing: Beijing Qinghua University Press, second edition (程佩青. 数字信号处理教程. 北京: 清华大学出版社, 第2版), 2001, 138—171.
- [3] QI Guo-Qing, JIA Xin-Le. High-accuracy frequency and phase estimation of single-tone based on phase of DFT [J]. *ACTA Electronica Sinica* (齐国清, 贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相位的高精度估计方法. 电子学报), 2001, 29(9): 1164—1167.
- [4] ZHAO Zheng-Min, WU Le-Nan. Recursive DFT with poly-cosine window [J]. *Journal of China Institute of Communications* (赵正敏, 吴乐南. 余弦窗 DFT 递推算法. 通信学报), 2001, 22(11): 124—127.
- [5] ZHU Wei-Jie, SUN Jin-Cai. Design of broadband array with frequency invariant beam pattern by using DFT interpolation method [J]. *Journal of China Institute of Communications* (朱维杰, 孙进才. 基于 DFT 插值的宽带波束形成器设计. 通信学报), 2002, 23(8): 59—66.
- [6] HOU Zheng-Xin, WANG Zhao-Hua, YANG Xi. Design and implementation of all phase DFT digital filter [J]. *ACTA Electronica Sinica* (侯正信, 王兆华, 杨希. 全相位 DFT 数字滤波器的设计与实现. 电子学报), 2003, 31(4): 539—543.
- [7] WANG Nan, LV Fang-Cheng. Digital measurement of dielectric loss based on high accuracy DFT algorithm [J]. *High Voltage Engineering* (王楠, 律方成. 基于高精度 DFT 的介损数字测量方法. 高电压技术), 2003, 29(4): 3—8.
- [8] SHEN Xiao-Fang, YAO Qi-Jun, LIN Zhen-Hui, et al. Measurement of the frequency spectrum of a submillimeter CW source by heterodyne mixing and direct detection [J]. *J. Infrared Millim. Waves* (申小芳, 姚骑均, 林镇辉, 等. 用外差混频和直接检波方法测量亚毫米波连续波源的频谱. 红外与毫米波学报), 2005, 24(5): 321—523.
- [9] CHAI Xu-Zheng, WEN Xi-Shan, GUAN Gen-Zhi, et al. An algorithm with high accuracy for analysis of power system harmonics [J]. *Proceedings of the CSEE* (柴旭峥, 文习山, 关根治, 等. 一种高精度的电力系统谐波分析算法. 中国电机工程学报), 2003, 23(9): 67—70.