

文章编号: 1001-9014(2004)02-0153-04

## 图像静态超分辨率重建

钟山, 沈振康

(国防科技大学 ATR 实验室, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 给出一种图像重建算法, 从一组静态低分辨率图像中重建高分辨率图像. 算法适合观测条件都相似的情况. 利用场景空间到观测图像的映射关系, 将重建问题描述成一个典型的线性系统求逆问题, 并借助总变分整形约束克服病态情况. 最后实验表明了算法在改善空间分辨率和噪声抑制上的显著效果.

**关键词:** 超分辨率; 总变分; 算法; 图像

**中图分类号:** TP911.73 **文献标识码:** A

## STATIC SUPERRESOLUTION RECONSTRUCTION FOR IMAGES

ZHONG Shan, SHEN Zhen-Kang

(National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** An algorithm of reconstructing a high resolution image from noisy static low resolution was presented. It is suitable for the case where all images are taken from the similar conditions. Using the aliasing relationship between the high resolution image and the observed images, we described the reconstruction as a typical inverse problem of a linear system, constrained the ill conditions by regularization of total variation. The results of experiments demonstrate dramatic improvements both in spatial resolution and noise removal.

**Key words:** superresolution; total variation; algorithm; image

### 引言

计算机技术的飞速发展引起图像恢复理论的广泛关注, 尤其是在商业和军事领域. 就图像恢复本身, 现代的恢复问题涉及更为复杂和大负荷运算的方法. 例如, 序列图像的超分辨率 (Superresolution) 重建问题. 本文研究的是一组静态 (static) 图像的超分辨率重建算法, 并利用总变分方法进行整形. 图像的静态超分辨率重建是序列图像超分辨率重建的基础, 动态序列图像 (例如视频图像) 在此基础上考虑时变因素, 其基本原理是不变的.

图像的超分辨率重建问题 1984 年最早由 Huang 和 Tsai<sup>[1]</sup> 正式提出. 从一组图像中重建超分辨率图像是一个典型的线性系统求逆问题. 如果我们知道真实场景和成像参数, 我们能轻易预测到相

机将会拍摄到的图像 (在允许的精度范围之内). 这可以描述成从场景空间到成像空间的线性映射问题; 现在考虑逆问题, 如果我们已经得到了同一场景下的一组观测图像, 并已知成像参数, 如何估计出真实场景的可能分布形式. 这里的真实场景我们用更高分辨率的栅阵来描述.

如果观测图像之间存在较小的、随机的相对位移, 而且图像足够丰富的话, 我们可以认为这一组图像从整体上记录了更高分辨率图像的信息. 而这些图像之间的信息是冗余的, 又是互补的. 因此, 图像的超分辨率重建本质上也是一种图像数据的融合问题.

### 1 成像过程的描述

从物理角度, 成像过程可分为 3 个阶段: 场景、相机参数 (视角、光学系统等)、感光和量化. 为便于

收稿日期: 2003-02-24, 修回日期: 2003-11-24

作者简介: 钟山 (1971-), 男, 广西玉林人, 国防科技大学电子工程学院博士生, 主要从事目标检测研究.

Received date: 2003-02-24, revised date: 2003-11-24

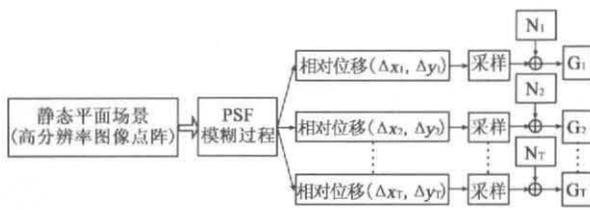


图 1 成像过程的简化形式  
Fig. 1 Simplified form of image process

分析,重新划分成像过程的三个部分:栅阵图像源、模糊降质过程、采样和量化过程。首先,将场景映射到系统的焦平面上,并用更高分辨率的平面栅阵图像来表示。当景深足够深、场景内无明显相对运动、视角及光照条件变化忽略不计时,这种描述在许多应用中被证实是合理的。例如,红外成像、遥感成像、天文成像以及其它深度景深成像。对于模糊降质,我们用点扩散函数(Point Spread Function, PSF)来描述光学系统偏差、相对运动模糊和感光元(感光单元总有有效感光面积和固有感光特性)的共同效应。PSF 是归一化的,具有小的有限的支撑。最后是采样和量化过程,此时,将其看成理想点的采样,并将量化误差归入采样噪声中,同时假定噪声服从独立正态分布。

我们用图 1 的框图描述上述简化形式的成像过程。

设分辨率重建倍率为  $k$ ,如果观测图像是  $M \times N$  点阵,则场景是  $kM \times kN$  点阵( $k$  为整数),它们的矢量表示分别记作  $G_i (i = 1, 2, \dots, T)$  和  $S$ 。当观测图像之间存在相对位移  $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ ,我们按照上面描述的过程建立关系:

$$\begin{cases} G_i = H_i S + N_i & i = 1, 2, \dots, T \\ H_i = H_{(D)} H_{(\Delta x_i, \Delta y_i)} H_{PSF/S} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $H_{PSF/S}$  是 PSF 生成的卷积阵,舍去边界因素,满足:

$$H_{PSF/S} S = \text{Vec}(PSF \otimes \text{UnVec}(S)). \quad (2)$$

$\text{Vec}(\cdot)$  将二维图像点阵表示成一维串接向量形式,  $\text{UnVec}(\cdot)$  反之。

$H_{(\Delta x_i, \Delta y_i)}$  是位移矩阵,满足:

$$H_{(\Delta x_i, \Delta y_i)} S = \text{Vec}(\delta(\Delta x_i, \Delta y_i) \otimes \text{UnVec}(S)). \quad (3)$$

其中  $\delta(\Delta x_i, \Delta y_i)$  是平移单位冲击函数。

$H_{(D)}$  是等间距抽样矩阵,满足:

$$\text{UnVec}(H_{(D)} S)_{i,j} = \text{UnVec}(S)_{(ki, kj)}. \quad (4)$$

$N_i$  是加性白噪声。

$$\text{令 } G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_T \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_T \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_T \end{bmatrix}, \text{联立式(1),我们}$$

得到:

$$G = HS + N. \quad (5)$$

至此,我们已将成像过程描述成从  $S$  的空间到  $G$  的空间的一个线性变换;显然,重建高分辨率图像就等于求解这个线性方程组<sup>[4]</sup>。

## 2 重建算法

求解一个线性方程组表征的线性系统,经典的方法是采用最小二乘方法求解,或者推广到一般的广义逆求解,形如

$$\hat{S} = (H^* \cdot H + \alpha \cdot I)^{-1} H^* \cdot G. \quad (6)$$

其中  $H^*$  是共轭转置阵,  $I$  是单位阵,  $\alpha \cdot I$  用于克服病态效应。该方法相当于重新构造一个线性系统,系统输入是  $G$ ,系统输出是  $\hat{S}$ ,而系统的传输特性可用频域表示为(一般性)

$$R(\omega) = \frac{H^*(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \alpha}. \quad (7)$$

其中  $H(\omega)$  对应的是矩阵  $H$  所描述的线性系统。注意到,  $R(\omega)$  等效于一个窗函数,同时频带范围不会大于  $H(\omega)$  的范围。不失一般性,线性方法求解方程(5)相当于一个窗函数的设计。任何一个有限宽度的窗函数总存在主瓣和旁瓣的矛盾,或者 Gibbs 振荡和分辨率的矛盾;对于图像的超分辨率问题,这个矛盾较为突出,尤其是图像灰度锐变的区域。因此,我们寻求非线性求解方法。

式(6)等效于一个最优化问题的解

$$\min_s [(HS - G)^T (HS - G) + \alpha S^T S]. \quad (8)$$

如果把  $[(HS - G)^T (HS - G)]$  看成系统逼近测度,  $S^T S$  看成能量测度,依据边界条件下的 Lagrange 乘子法,经典的恢复算法等效于给定能量约束条件下最优化系统逼近,或者等效于给定系统逼

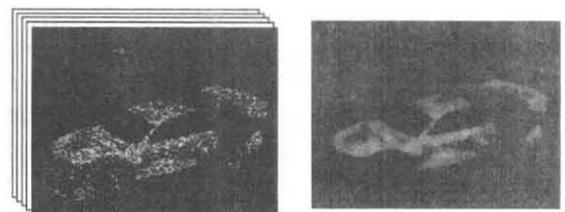


图 2 SNR = 5dB 时的重建结果  
Fig. 2 Reconstruction result when SNR = 5dB

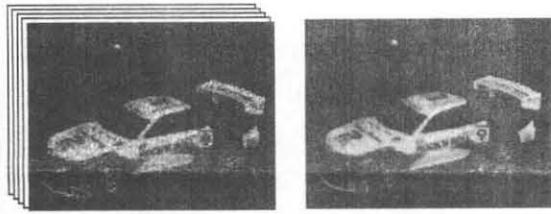


图3 SNR = 20dB 时的重建结果  
Fig. 3 Reconstruction result when SNR = 20dB

近测度条件下最优化能量约束(参数  $\alpha$  的作用是相对的),或者等效于两种测度的最优化融合问题.系统逼近显然是必须的,从式(8)的第二个测度出发,不同的约束条件构造了不同的算法.  $S^T S$  又称为能量整形约束(regularization constrain),是一种二次型约束;同样,  $S$  的任何线性系统变换  $L(S)$  的二次型测度  $L^T(S)L(S)$  也将导致一个线性算法.线性算法的窗函数效应使重建图像在抑制噪声的同时必然平滑边界.考虑到图像超分辨率重建更注重图像细节的重建,我们采用总变分(Total Variation, TV)约束的方法进行整形<sup>[5]</sup>.总变分最小化方法一般用于图像的降噪和恢复,它的重要意义在于:在抑制噪声的同时,并不强加一种平滑作用;它本身是一种非线性算法.

考虑总变分约束,先以连续形式构造最优化问题:

$$\min [ \| H(S) - G \|_2^2 + 2\alpha \iint | \nabla S | dx dy ]. \quad (9)$$

其中,算子  $H(S)$  的离散形式是  $HS$ . 利用变分法,式(9)转化为带 Neumann 边界条件的 Euler-Lagrange 方程:

$$H^*(H(S) - G) - \alpha \nabla \cdot (\nabla S / | \nabla S |) = 0, \quad [x, y]^T \in D_s \quad (10)$$

$$\partial S / \partial n = 0. \quad [x, y]^T \in \partial D_s \quad (11)$$

其中,  $H^*(\cdot)$  是  $H(\cdot)$  的伴随算子,  $D_s$  是  $S$  的支撑域,  $\partial D_s$  是边界边框,  $n$  是法方向,  $[x, y]^T$  是图像坐标.式(10)相当于求梯度;式(11)限制边界条件解的法向梯度是 0,当  $D_s$  有限时,条件自然成立.因

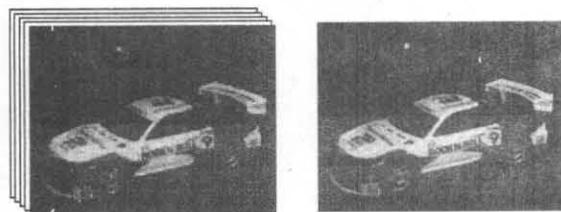


图4 SNR = 40dB 时的重建结果  
Fig. 4 Reconstruction result when SNR = 40dB

此,对图像进行预处理,使边界(边框)以缓慢变化的背景灰度向边界外延伸,边界处的梯度几乎总是 0,重建过程限定在边界内.

式(10)涉及的非线性问题,计算非常困难,虽然已有许多相关研究,但仍是一个待发展的问题.这里,我们采用 Vogel 等人提出的不动点迭代(Fixed Point, FP)方法进行动态线性近似<sup>[6]</sup>,式(10)近似为

$$H^*(H(S_i) - G) - \alpha \nabla \cdot (\nabla S_i / | \nabla S_{i-1} |) = 0, \quad (12)$$

其中,  $S_i$  为当前值,待求解;  $S_{i-1}$  为前次迭代的结果,看成临时常量.离散化形式如下

$$H^T(HS_i - G) - \alpha \sum_{(m,n)} [S_{\nabla_x}(m+1, n) - S_{\nabla_x}(m, n) + S_{\nabla_y}(m, n+1) - S_{\nabla_y}(m, n)] = 0. \quad (13)$$

其中:

$$S_{\nabla_x}(m, n) = [S_i(m, n) - S_i(m-1, n)] / | \nabla S_{i-1}(m, n) |$$

$$S_{\nabla_y}(m, n) = [S_i(m, n) - S_i(m, n-1)] / | \nabla S_{i-1}(m, n) |$$

式(13)中,有关  $S$  的几种变量都是串接向量,为便于理解,我们仍以二维图像坐标表示其相对应的关系.求解(13)式我们采用共轭梯度法:实验表明,算法对  $S_i$  的迭代收敛很快,一般只需 2~3 次即可满足要求.

### 3 参数选取

设观测图像噪声总能量为  $\sigma^2$ ,我们希望恢复结果满足(或者近似)

$$\begin{cases} \| H(S) - G \|_2^2 = \sigma^2, \\ \iint | \nabla S | dx dy = \min. \end{cases} \quad (14)$$

这等价于求解问题:

$$\min(\iint | \nabla S | dx dy), \quad (15)$$

$$s. t. \| H(S) - G \|_2^2 = \sigma^2, \quad (16)$$

即,求解:

$$\min(\iint | \nabla S | dx dy + \lambda [\| H(S) - G \|_2^2 - \sigma^2]), \quad (17)$$

或:

$$\min(\frac{1}{\lambda} \iint | \nabla S | dx dy + [\| H(S) - G \|_2^2 - \sigma^2]). \quad (18)$$

其中  $\lambda$  为 Lagrang 乘子.

显然,当噪声能量很大时, $\lambda$ 应当很小,以保证图像的整形作用; $\alpha$ 相当于式(18)中的 $1/2\lambda$ .因此,取 $\alpha$ 大致正比于 $\sigma^2$ 是合适的.实际过程中,式(14)一般不能精确满足,但在总体趋势上基本符合上述原则.

#### 4 实验结果

我们取 25 帧低分辨率图像(LR)重建一帧高分辨率图像(SR).LR 按照式(1)的过程产生,采样间隔比例 $k=4$ ,相对位移 $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ 在 LR 采样点中心周围的一个像素区域内均匀分布(我们只需关心非整数的相对位移量),PSF 取 $5 \times 5$ 高斯扩散特性,并包含 97% 能量.信噪比定义为: $SNR = 20\log(\|g\|_2 / \|n\|_2)$ .

图 2、图 3 和图 4 分别是  $SNR = 5\text{dB}$ 、 $SNR = 20\text{dB}$  和  $SNR = 40\text{dB}$  条件下的重建结果.左边小图是其中一帧 LR( $128 \times 96$ )观测图像,右边小图是重建的 SR( $512 \times 384$ )图像,边框补零处理.相应的  $\alpha$  参数分别是  $\alpha = 0.879$ 、 $\alpha = 0.156$  和  $\alpha = 0.015$ .  $H_{(\Delta x_i, \Delta y_i)}$  中的相对位移 $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ 在重建时仅取 1/2 倍 SR 像素精度.

比较每组实验的两类图像,我们可以看到重建后的图像在细节方面提升了许多,边界相对清晰,噪声得到明显抑制,效果非常显著.进一步还可看到,在图像灰度锐变区域,灰度变化陡峭却未发生 Gibbs 振荡.因此,算法是有效的和成功的.

#### REFERENCES

- [1] Huang T S, Tsai R Y. *Multiple Frame Image Restoration and Registration* [M]. IN ADVANCES IN COMPUTER VISION AND IMAGE PROCESSING, Greenwich, CT, London England: JAI Press, 1984, 1: 317—319
- [2] Cheeseman P, Kanefsky B, Richard Kraft, et al. Super-resolved surface reconstruction from multiple images [R]. Technical Report FIA-94-12
- [3] Kim S P, Bose N K, Valenzuela H M. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframe [J]. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38: 1013—1027
- [4] Elad M, Feuer A. Restoration of a single super-resolution image from several blurred, noisy and under-sampled measured images [J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 1997, 6: 1646—1658
- [5] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D*, 1992, 60: 259—268
- [6] Vogel C, Oman M. Iterative methods for total variation denoising [J]. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1996, 17: 227—238