

文章编号:1001-9014(2004)02-0143-05

光学综合孔径像面干涉数学模型与计算机仿真

范伟军¹, 夏良正¹, 周必方²

(1. 东南大学自动控制系, 南京 江苏 210096;

2. 中国科学院国家天文台南京天文光学技术研究所, 南京 江苏 210072)

摘要:从惠更斯-菲涅耳原理出发, 根据光学综合成像像面干涉的实际情况, 建立了符合实际的光学综合孔径像面干涉数学模型; 根据针孔干涉的条件, 把望远镜镜面分成许多子镜面, 并在此基础上对光学综合孔径像面干涉进行了公式推导和计算机仿真; 分析了两望远镜的波面倾斜及光程差对干涉条纹的影响, 并进行了仿真。

关键词:光学综合孔径; 像面干涉; 光束组合器; 仿真

中图分类号: O436.1 **文献标识码:** A

MATHEMATICAL MODEL OF OPTICAL APERTURE SYNTHESIS IMAGE-PLANE INTERFERENCE AND COMPUTER SIMULATION

FAN Wei-Jun¹, XIA Liang-Zhen¹, ZHOU Bi-Fang²

(1. Department of Automatic Control, Southeast University, Nanjing 210096, China;

2. Nanjing Institute of Astronomical Optics and Technology, National Astronomical Observatories, The Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042, China)

Abstract: According to image-plane interference status of optical aperture synthesis (OAS) and Huyges-Fresnel theory, a mathematical method is set up which fits with the true condition. By dividing telescope mirror into many small fragments with pinhole interference conditions, OAS image-plane interference formula is deduced according to fragments interference with each other, and OAS image-plane interference computer simulation is done. The influence of wavefront tilt and optical path difference is analyzed and simulated in the end.

Key words: optical aperture synthesis; image-plane interference; beam combiner; simulation

引言

光学综合孔径成像的干涉模式有二种^[1,2], 一种是瞳面干涉模式, 一种是像面干涉模式. 当采用瞳面干涉模式时, 来自两个孔径平行光束叠加在一个半反半透的光束分裂器上, 两合成输出的光束被聚集在单象素的探测器上, 这种干涉也就是迈克尔逊 (Michelson) 干涉; 当采用像面干涉模式时, 此时的干涉仪如图 1 所示, 来自两望远镜的光束经过倾斜镜、延迟线进行平行性补偿及光程差补偿后由光束组合器在像面 (焦面) 聚焦相干, 该种干涉亦称菲索 (Fizeau) 干涉. 对于光学综合孔径望远镜阵干涉成

像的数学模型及计算机仿真, 国内以前尚未有做过这方面的研究. 本文讨论了光学综合孔径像面干涉的数学模型; 并基于针孔干涉的条件, 有望望远镜镜面分成许多子镜面, 在此基础上对光学综合孔径像面干涉进行了计算机仿真.

1 光学综合孔径像面干涉像面光场分布

设如图 1 所示, 光束组合器焦点 o 的坐标为 $(0, 0, 0)$, 光束组合器的焦距为 f , 望远镜 s_1 、 s_2 中心点的坐标分别为 (x_1, y_1, z_{12}) 、 (x_2, y_2, z_{12}) , 光束中心点 s_3 、 s_4 的坐标分别为 (x_3, y_3, z_{34}) 、 (x_4, y_4, z_{34}) . 设 s_1 到 s_3 的光程为 d_{13} , s_2 到 s_4 的光程为 d_{24} , s_3 到 s_5 的

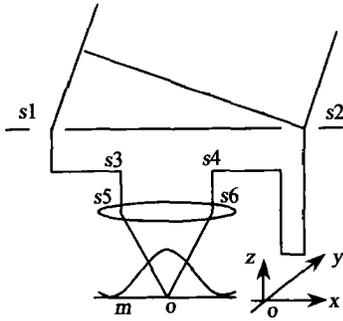


图1 像面式组合器

Fig. 1 The image-plane beam combiner

光程为 d_{35} , s_4 到 s_6 的光程为 d_{46} , s_1 到 s_5 的光程为 d_{15} , s_2 到 s_6 的光程为 d_{26} , 设在 t 时刻望远镜 s_1, s_2 的光扰动解析信号分别为 $\mu_1(x, y, t), \mu_2(x, y, t)$; 像面任一点 $m(x_m, y_m)$ 在 t 时刻光扰动 $\mu_m(x_m, y_m, t)$ 为望远镜 s_1 在像面点 m 产生的光扰动 $\mu_{1m}(x_m, y_m, t)$ 与望远镜 s_2 在像面点 m 产生的光扰动 $\mu_{2m}(x_m, y_m, t)$ 之和。

在单色光波场中, 空间任意两点的光传播规律满足惠更斯-菲涅耳原理, 但在像面干涉综合孔径成像中, 光波场不可能是单色光波场, 空间任一点的光扰动随时间作无规则变化。下面来找 $\mu_{1m}(x_m, y_m, t), \mu_{2m}(x_m, y_m, t)$ 分别与 $\mu_1(x, y, t), \mu_2(x, y, t)$ 的关系式。

严格说来, 非单色光的光扰动 $\mu(x, y, t)$ 没有傅里叶变换, 因而需定义一个截断函数^[3]

$$\mu_T(x, y, t) = \begin{cases} \mu(x, y, t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases} \quad (1)$$

如式(1)定义 $\mu_1(x, y, t), \mu_2(x, y, t), \mu_{1m}(x, y, t), \mu_{2m}(x, y, t)$ 的截断函数 $\mu_{1T}(x, y, t), \mu_{2T}(x, y, t), \mu_{1mT}(x_m, y_m, t), \mu_{2mT}(x_m, y_m, t)$, 那么有

$$\mu_{1T}(x, y, t) = \int_0^{\infty} 2\mu_{1T}(x, y, v) \exp(j2\pi vt) dv, \quad (2)$$

$$\mu_{1mT}(x_m, y_m, t) = \int_0^{\infty} 2\mu_{1mT}(x_m, y_m, v) \exp(j2\pi vt) dv, \quad (3)$$

$\mu_{1T}(x, y, v), \mu_{1mT}(x_m, y_m, v)$ 分别为 $\mu_{1T}(x, y, t), \mu_{1mT}(x_m, y_m, t)$ 实部的傅里叶变换。

由式(2)和式(3)可知, 非单色场可以看作许多单色光扰动的线性组合, 非单色场的傅里叶谱的传播规律满足惠更斯-菲涅耳原理, $\mu_{1mT}(x_m, y_m, v), \mu_{2mT}(x_m, y_m, v)$ 分别为望远镜 s_1, s_2 上所有点的傅里叶谱 $u_{1T}(x, y, v), u_{2T}(x, y, v)$ 传播到像面点 m 产生的叠加。设 c 为光速, 根据菲涅耳衍射公式及透镜的

位相调制性质可以得到

$$\mu_{1mT}(x_m, y_m, t) = \iint_{s_1} \frac{-2j}{cf} \int_0^{\infty} v u_{1T}(x, y, v) \exp(j2\pi v(t + t_1)) dv dx dy, \quad (4)$$

$$t_1 = \frac{f + d_{15}}{c} + \frac{x_m(x_1 - x_3) + y_m(y_1 - y_3) - (xx_m + yy_m)}{cf}, \quad (5)$$

当为窄带光时, 即带宽 Δv 极小于它的中心频率 \bar{v} , 令 $\bar{\lambda} = c/\bar{v}$, 则有近似表达式

$$\mu_{1mT}(x_m, y_m, t) = \iint_{s_1} \frac{-j}{\lambda f} \mu_{1T}(x, y, t + t_1) dx dy, \quad (6)$$

让 T 无限增大时, 可得到望远镜 s_1 的光波在像面产生的光扰动的解析信号为

$$\mu_{1m}(x_m, y_m, t) = \iint_{s_1} \frac{-j}{\lambda f} \mu_1(x, y, t + t_1) dx dy, \quad (7)$$

同理有,

$$\mu_{2m}(x_m, y_m, t) \approx \iint_{s_2} \frac{-j}{\lambda f} \mu_2(x, y, t + t_2) dx dy, \quad (8)$$

$$t_2 = \frac{f + d_{26}}{c} + \frac{x_m(x_2 - x_4) + y_m(y_2 - y_4) - (xx_m + yy_m)}{cf} \quad (9)$$

那么, 像面光扰动的解析信号为

$$\mu_m(x_m, y_m, t) = \frac{-j}{\lambda f} \left(\iint_{s_1} \mu_1(x, y, t + t_1) dx dy + \iint_{s_2} \mu_2(x, y, t + t_2) dx dy \right). \quad (10)$$

2 两针孔的干涉

当望远镜孔径足够小, t 值确定时, 若式(6)中的 $\mu_{1T}(x, y, t + t_1)$ 在孔径内为一常数值 $\mu_{1T}(x_1, y_1, t + t)$, 则望远镜可看作针孔, 此时望远镜孔径必满足在孔径内点空间位置的变化所引起相位误差 $2\pi((x - x_1)x_m + (y - y_1)y_m)/(\lambda f)$ 足够小, 可以忽略不计, 显然由于可见光波段 $\bar{\lambda}$ 非常小, 此条件非常苛刻, 当满足此条件时则有

$$\mu_{1m}(x_m, y_m, t) = \frac{-j}{\lambda f} \mu_1(x_1, y_1, t + \frac{f + d_{15}}{c} - \frac{x_m x_3 + y_m y_3}{cf}), \quad (11)$$

$$\mu_{2m}(x_m, y_m, t) = \frac{-j}{\lambda f} \mu_2(x_2, y_2, t + \frac{f + d_{26}}{c} - \frac{x_m x_4 + y_m y_4}{cf}), \quad (12)$$

考虑到准单色相干的条件^[4], $\Delta v \tau \ll 1$, 针孔点 s_1, s_2

互相干函数

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= \langle \mu_1(x_1, y_1, t + \tau) \mu_2^*(x_2, y_2, t) \rangle \\ &= \Gamma_{12}(0) \exp(j2\pi\nu\tau), \end{aligned} \quad (13)$$

假定光场是平稳的,其统计特性不随时间改变,则有

$$\begin{aligned} \langle \mu_1(x_1, y_1, t + \frac{f + d_{15}}{c} - \frac{x_m x_3 + y_m y_3}{cf}) \mu_2^*(x_2, y_2, t + \frac{f + d_{26}}{c} - \frac{x_m x_4 + y_m y_4}{cf}) \rangle &= \Gamma_{12}(0) \exp(j2\pi((d_{15} - d_{26})/\lambda + (x_m(x_4 - x_3) + y_m(y_4 - y_3))/(\lambda f))), \end{aligned} \quad (14)$$

设 $r_{12}(0) = \Gamma_{12}(0)/\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)} = |r_{12}(0)| \exp(j\alpha_{12}(0))$, 则像面光强分布为

$$\begin{aligned} I_m(x_m, y_m) &= \langle \mu_m(x_m, y_m, t) \mu_m^*(x_m, y_m, t) \rangle \\ &= I_{1m}(x_m, y_m) + I_{2m}(x_m, y_m) \\ &+ 2\sqrt{I_{1m}(x_m, y_m)I_{2m}(x_m, y_m)} |r_{12}(0)| \\ &\times \cos(\alpha_{12}(0) + 2\pi((d_{15} - d_{26})/\lambda + (x_m(x_4 - x_3) + y_m(y_4 - y_3))/(\lambda f))), \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $I_{im}(x_m, y_m) = \langle \mu_{im}(x_m, y_m, t) \mu_{im}^*(x_m, y_m, t) \rangle$ ($i = 1, 2$).

3 光学综合孔径像面干涉光强分布

3.1 单望远镜在像面的光强分布

遥远的非相干观测源的光到达望远镜前时,望远镜上任意两点 (x, y) 、 (x', y') 互强度为

$$J'_1(x, y; x', y') = I_0 r_{01}(\Delta x, \Delta y), \quad (16)$$

其中, $\Delta x = x - x'$, $\Delta y = y - y'$, $r_{01}(\Delta x, \Delta y)$ 表示望远镜上两点的互相干系数.

令望远镜 s1 平面上所有没有光传到像面的点对 $J'_1(x, y; x', y')$ 为零,在准单色条件下,有

$$\begin{aligned} I_{1m}(x_m, y_m) &= \langle \mu_{1m}(x_m, y_m, t) \mu_{1m}^*(x_m, y_m, t) \rangle \\ &= \frac{I_0}{\lambda^2 f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(\Delta x, \Delta y) r_{01}(\Delta x, \Delta y) \exp(-j2\pi(\Delta x x_m + \Delta y y_m)/(\lambda f)) d\Delta x d\Delta y, \end{aligned} \quad (17)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tau_1(\Delta x, \Delta y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_1(x, y) t_1^*(x - \Delta x, y - \Delta y) dx dy, \\ t_1(x, y) &= \text{circ}(\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}/a), \end{aligned}$$

a 为望远镜孔径的半径

3.2 双望远镜在像面的干涉

同上所示, (x, y) 、 (x', y') 分别为两望远镜平面上任一点,准单色条件下,遥远非相干观测源的光场到达两望远镜前时,令所有没有光传到像面的点对的互强度为零,那么有

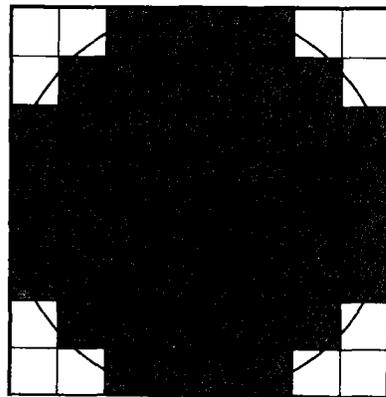


图2 小镜面组成望远镜镜面

Fig. 2 Telescope mirror and pinhole fragments

$$\begin{aligned} I_{12m}(x_m, y_m) &= \langle \mu_{1m}(x_m, y_m, t) \mu_{2m}^*(x_m, y_m, t) \rangle \\ &= \frac{I_0}{\lambda^2 f^2} \exp \end{aligned}$$

$$\left(j2\pi \left(\frac{(d_{15} - d_{26})}{\lambda} + \frac{x_m(x_1 - x_2 + x_4 - x_3)}{\lambda f} + \frac{y_m(y_1 - y_2 + y_4 - y_3)}{\lambda f} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{12}(\Delta x, \Delta y) r_{012}(\Delta x, \Delta y) \exp \\ &(-j2\pi(\Delta x x_m + \Delta y y_m)/(\lambda f)) d\Delta x d\Delta y, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $(\Delta x, \Delta y)$ 为点 (x, y) 与点 (x', y') 的矢量

差; $\tau_{12}(\Delta x, \Delta y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_1(x, y) t_2^*(x - \Delta x, y - \Delta y) dx dy$; $t_i(x, y) = \text{circ}(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}/a)$; $i = 1, 2$; a 为望远镜孔径的半径.

根据式(17)和式(18),像面光强度分布为

$$I_m(x_m, y_m) = 2I_{1m}(x_m, y_m) + I_{12m}(x_m, y_m) + I_{12m}^*(x_m, y_m).$$

4 光学综合孔径像面干涉计算机仿真

望远镜孔径不可能满足为针孔的条件,因此仿真时应把望远镜镜面看成是许多小镜面组成,而小镜面尺寸满足针孔的条件.如图2,设镜面由 n 块四方小镜面组成(如图中深色所示),设镜面的长宽都为 a ,则要使小镜面能为针孔, $\alpha\pi(x_m + y_m)/\lambda f$ 必须足够小可忽略不计.设第 i 个小镜面的中心位置为 (x_i, y_i) ,在焦面产生的光强为 $\Delta I(x_m, y_m)$,设 $|r'_{ij}(0)|$ 、 $\alpha'_{ij}(0)$ 分别为第 i, j 个小镜面互相干系数的幅度和相位,那么该望远镜在焦面产生的光强为

$$I'(x_m, y_m) = n\Delta I(x_m, y_m) + 2\Delta I(x_m, y_m)$$

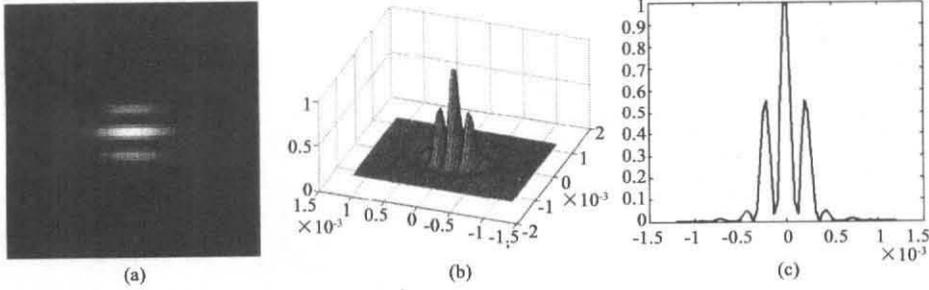


图3 无波面倾斜、无光程差像面干涉条纹(a)二维图像(b)三维图像(c)一维图像

Fig.3 Interferogram fringes without wavefront tilt and optical path difference(a)2-dimension image(b)3-dimension image(c)1-dimension image

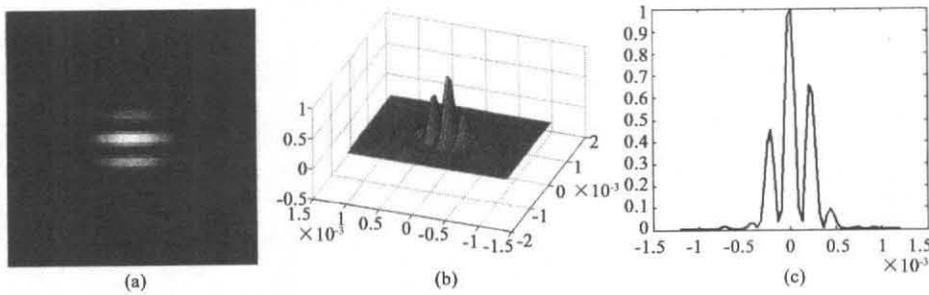


图4 有波面倾斜的干涉条纹(a)二维图像(b)三维图像(c)一维图像

Fig.4 Interferogram fringes with wavefront tilt (a)2-dimension image (b)3-dimension image (c)1-dimension image

$$\times \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n |r'_{ij}(0)| \cos(\alpha'_{ij}(0) + 2\pi(x_m(x_j - x_i) + y_m(y_j - y_i))/(\lambda f)), \tag{19}$$

同理,两个望远镜在焦面产生的光强为

$$I(x_m, y_m) = 2I'(x_m, y_m) + 2\Delta I(x_m, y_m) \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r_{ij}(0)| \cdot \cos\left(\alpha_{ij}(0) + 2\pi\left(\frac{d_{15} - d_{26}}{\lambda} + \frac{x_m(x_j - x_i) + y_m(y_j - y_i)}{\lambda f}\right)\right), \tag{20}$$

其中, $|r_{ij}(0)|$ 、 $\alpha_{ij}(0)$ 分别表示第一个望远镜中第 i 个小镜面与第二个望远镜中第 j 个小镜面互相干系数的幅度和相位。

当光束到达两望远镜不平行,两波面有微小的夹角时,设夹角为 θ ,两波面的交线与 y 轴方向的夹角为 δ 时,则两望远镜的小镜面之间将引入一个随 θ, δ 变化的误差^[5]。令 (x_i, y_i) 为第一个望远镜第 i 个小镜面中心点的坐标,则有

$$I(x_m, y_m) = 2I'(x_m, y_m) + 2\Delta I(x_m, y_m) \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r_{ij}(0)|$$

$$\cos\left(\alpha_{ij}(0) + 2\pi\left(\frac{d_{15} - d_{26}}{\lambda} + \frac{x_i \cos\delta + y_i \sin\delta}{\lambda} \sin\theta + \frac{x_m(x_j - x_i) + y_m(y_j - y_i)}{\lambda f}\right)\right).$$

4.1 双望远镜像面干涉光强分布

(1) 无波面倾斜、无光程差像面干涉仿真

参数: 波长 $\lambda = 0.633\mu\text{m}$; 光束组合器焦距 $f = 15\text{m}$; 望远镜孔径 $D_{fej} = 2\text{cm}$; 观测目标的距离 $d = 4000\text{km}$; 波面倾斜 $tilt - x = tilt - y = 0\mu\text{rad}$; 目标的半径 $r = 20\text{cm}$; 两望远镜到焦面的光程差 $OPD = 0$ 。仿真图像如图 3 所示。

(2) 波面倾斜对干涉条纹影响的仿真

参数: $\lambda = 0.633\mu\text{m}$; $f = 15\text{m}$; $D_{fej} = 2\text{cm}$; $d = 4000\text{km}$; 波面倾斜 $tilt - x = 5\mu\text{rad}$, $tilt - y = 0\mu\text{rad}$; $r = 20\text{cm}$; 两望远镜到焦面的 $OPD = 0$; 仿真图像如图 4 所示。

(3) 光程差对干涉条纹影响的仿真

参数: $\lambda = 0.633\mu\text{m}$; $f = 15\text{m}$; $D_{fej} = 2\text{cm}$; $d = 4000\text{km}$; 波面倾斜 $tilt - x = tilt - y = 0\mu\text{rad}$; $r = 20\text{cm}$; $OPD = \lambda/2$ 。仿真图像如图 5 所示。

4.2 三望远镜像面干涉光强分布

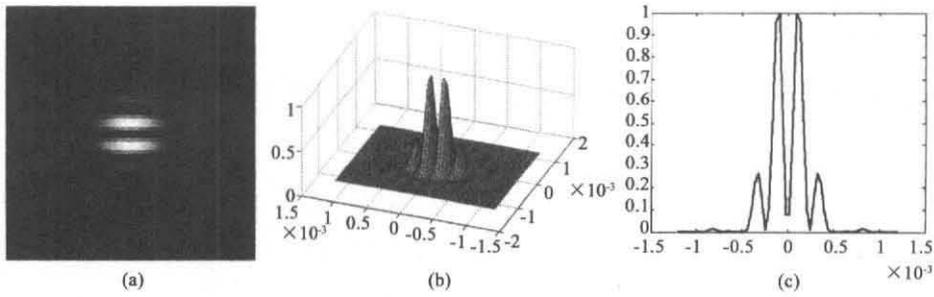


图5 有光程差的干涉条纹(a)二维图像(b)三维图像(c)一维图像

Fig. 5 Interferogram fringes with optical path difference (a)2-dimension image(b)3-dimension image (c)1-dimension image

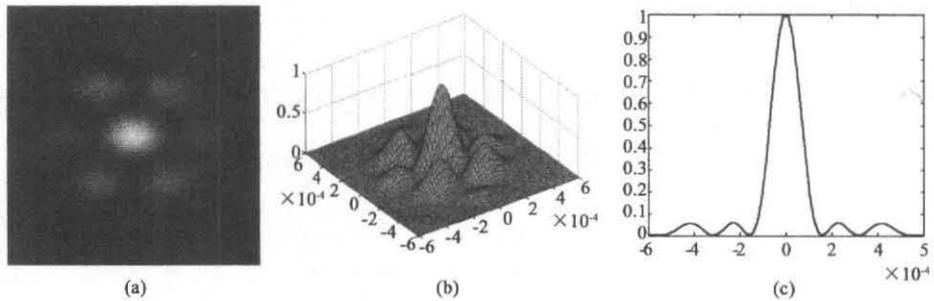


图6 三望远镜像面干涉条纹(a)二维图像(b)三维图像(c)一维图像

Fig. 6 Three telescopes' interferogram fringes (a)2-dimension image (b)3-dimension image (c)1-dimension image

参数: $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$; $f = 15\text{m}$; $D_{\text{fei}} = 2\text{cm}$; $\text{tilt} - x = \text{tilt} - y = 0 \mu\text{rad}$; $d = 4000\text{km}$; $r = 20\text{cm}$; 三望远镜到焦面的 OPD = 0; 三望远镜的位置: $x_1 = 0\text{m}$, $y_1 = 0.0115\text{m}$; $x_2 = -0.02\text{m}$, $y_2 = -0.0115\text{m}$; $x_3 = 0.02\text{m}$, $y_3 = -0.0115\text{m}$; 仿真图像如图6所示。

5 结语

本文根据惠更斯—菲涅耳原理,建立了符合实际情况的OAS像面干涉的数学模型,根据针孔干涉的条件,把望远镜镜面分成许多小镜面,并在此基础上对OAS像面干涉进行了仿真,跟据仿真效果及参考文献[6,7],所建立的数学模型正确。这些为继续进行条纹信息提取及图像重构等后续工作奠定了基础。

REFERENCES

- [1] WANG Hai-Tao, ZHOU Bi-Fang. Beam combiner in optical aperture synthesis telescope array[J]. *Acta Optica Sinica*

(王海涛,周必方. 光学综合孔径望远镜阵的光束组合器. *光学学报*), 2002, **22**(9): 1109—1115

[2] Schoeller M. Fizeau beam combination with optical interferometers—some ideas for second generation VLTI instrumentation[J]. *SPIE*, 2000, **4006**: 116—123

[3] LI Ji-Tao. *Statistical Optics*[M]. Chengdu: Sichuan University Press (李继陶. *统计光学基础*. 四川: 四川大学出版社), 1988: 143—145, 243

[4] WANG Hai-Tao, ZHOU Bi-Fang. Optical synthesis aperture interference image technology[J]. *Optics and Precision Engineer* (王海涛,周必方. 光学综合孔径干涉成像技术. *光学精密工程*), 2002, **10**(5): 434—442

[5] WANG Zheng-Ming. *Astronomy Interferometry*[M]. Beijing: Science Press (王正明. *天文光干涉测量*. 北京: 科学出版社), 1996: 165—173

[6] Hege E K, Agel J R P, Cheslka M. et al. Simulation of aperture synthesis with the large binocular telescope [J]. *SPIE*, 1995, **2566**: 144—155

[7] Crockett G A, Strange D A. Computer model for evaluating synthetic aperture propagation[J]. *SPIE*, 1983, **440**: 77—84