

# 一种新的平面传输线传播常数的变分分析

张旭春 甄蜀春

(中国人民解放军空军工程大学导弹学院制导雷达工程系, 陕西, 三原, 713800)

**摘要** 基于严格的电磁场理论, 给出了一种新的分析平面传输线传输特性的空域及谱域的稳定变分公式. 该公式仅以槽口切向电场为未知参量, 适用于各种开放和屏蔽的平面和共面传输线传播常数的计算. 该方法推导简单、计算速度快. 槽线计算结果和谱域法计算结果吻合较好.

**关键词** 平面传输线, 传播常数, 变分公式, 槽线.

## A NOVEL VARIATIONAL ANALYSIS OF PLANAR LINE PROPAGATION CONSTANT

ZHANG Xu-Chun ZHEN Shu-Chun

(Dept. of Guided Radar Engineering of Missile Institute, AFEU., Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

**Abstract** A novel stationary variational formula in spatial domain and in spectral domain respectively for calculation of planar line propagation constant is presented based on the exact theory of electromagnetic field. The formula only involves the electric field in the slot, which is applicable to closed as well as open planar and coplanar line structure. The calculation is simple and fast. The result of slot line agrees well with that of spectral domain method.

**Key words** planar line, propagation constant, variational formula, slotline.

### 引言

平面传输线的传统分析方法主要有横向谐振法、谱域法和谱域导抗法等等, 这些方法数学推导繁杂, 计算量大, 获得一组供工程设计用的特性参量数据, 要花费相当多的 CPU 时间. 为了工程设计方便, 可以通过多次应用横向谐振法和谱域法, 再用数据拟合方法得到平面传输线的色散特性. 如分别应用横向谐振法和谱域法得到了槽线主模的色散特性的计算公式<sup>[1,2]</sup>. 但这些计算公式只适用于几何尺寸和物理参数在一定范围内的平面传输线. 比如槽线宽度不能大于自由空间中的波长等等. 近年来用渐变槽线构成的宽带天线已成为研究的热点, 为了获得有效幅射, 其终端渐变槽线宽度往往接近自由空间一个波长或更宽<sup>[3]</sup>, 而且在高频端相对槽线宽度更宽. 由双面槽线构成的渐变槽线天线的情况也类似. 因此, 找出快速分析平面传输线传播常数的方法是非常必要的.

为了得到快速的分析模型, 文献<sup>[4]</sup>建立了仅以槽中切向电场为未知参量的稳定变分公式, 该公式

是传播常数的二次方程, 方程的各项系数都需要求解  $n$  次 ( $n$  为介质层数) 广义积分.

本文基于严格的电磁场理论, 给出了更为简便的求解平面传输线传输特性的稳定的变分公式. 该公式仅以槽口切向电场为未知参量, 适用于各种开放的和屏蔽的平面传输线的传播常数的求解, 计算速度快. 最后, 用提出的方法计算了槽线主模的传播常数.

### 1 原理

#### 1.1 稳定的变分公式

变分法可用于确定某些特征参量, 通过各种特征参量如谐振频率、阻抗等等所满足的稳定公式来求解这些特征量. 变分法不同于其它近似方法之处在于其所应用的公式对正确解是“稳定的”. 这意味着该公式对正确解的试探场的变动是不太敏感的.

可以证明, 以下公式对传播常数  $\gamma$  而言是一个稳定的变分公式.

$$\oint_C \vec{n} \times \vec{e}^* \cdot [\vec{\mu}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{e} - \gamma \vec{\mu}^{-1} \cdot (\vec{a}_z \times \vec{e})] dc = 0, \quad (1)$$

还可写为

$$\gamma = \frac{\oint_c (\vec{n} \times \vec{e}^*) \cdot (\vec{\mu}^{-1} \nabla \times \vec{e}) dc}{\oint_c (\vec{n} \times \vec{e}^*) \cdot (\vec{\mu}^{-1} \vec{a}_z \times \vec{e}) dc} \quad (2)$$

式(2)中,用  $e^{-\gamma z}$  来表示向  $\vec{a}_z$  轴方向传输的波,场的定义如下:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{e}(x, y) e^{-\gamma z},$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{h}(x, y) \cdot e^{-\gamma z},$$

其中,  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\nabla$  为三维拉普拉斯算子.

1.2 证明

用横向场  $\vec{e}, \vec{h}$  表示的麦克斯韦方程组可以写为

$$\nabla \times \vec{e} + j\omega \vec{\mu} \cdot \vec{h} = \gamma \vec{a}_z \times \vec{e}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{h} = j\omega \vec{\epsilon} \cdot \vec{e} + \gamma \vec{a}_z \times \vec{h}, \quad (4)$$

在式(1)中,如果  $\vec{e}, \vec{h}$  为准确场,则式(1)成立. 因为如果在介质分界面上积分,由于  $\vec{e}$  和  $\vec{h}$  的在分界面两侧的切向分量连续,在相邻两个面上的积分相互抵消,积分为零. 如果在导体表面,假设为完纯导体,则  $\vec{n} \times \vec{e} = 0$ . 下面证明,当式(1)中的场为满足一定条件的试探场时,式(1)仍成立.

将式(2)中的准确场  $\vec{e}$  换为试探场  $\vec{e}_t = \vec{e} + p\vec{g}$ , 则有

$$\gamma_p(p) = \frac{\oint_c (\vec{n} \times \vec{e}_t^*) \cdot (\vec{\mu}^{-1} \nabla \times \vec{e}_t) dc}{\oint_c (\vec{n} \times \vec{e}_t^*) \cdot (\vec{\mu}^{-1} \vec{a}_z \times \vec{e}_t) dc} \quad (5)$$

$\gamma_p$  的第一变分  $\frac{\partial \gamma_p}{\partial p}$  在  $p=0$  的值为

$$\left. \frac{\partial \gamma_p}{\partial p} \right|_{p=0} = \left[ \oint_c (\vec{n} \times \vec{g}^*) \cdot (\vec{\mu}^{-1} \nabla \times \vec{e} - \gamma \vec{\mu}^{-1} \vec{a}_z \times \vec{e}) dc + \oint_c (\vec{n} \times \vec{e}^*) \cdot (\vec{\mu}^{-1} \nabla \times \vec{g} - \gamma \vec{\mu}^{-1} \vec{a}_z \times \vec{g}) dc \right] / \oint_c \vec{\mu}^{-1} (\vec{n} \times \vec{e}) \cdot (\vec{a}_z \times \vec{e}) dc, \quad (6)$$

式(6)中分母不等于零,要使分子第一项为零,则围线  $c$  上应有  $\vec{n} \times \vec{g}^* = 0$ , 即试探电场在介质分界面两侧的切向分量连续,若分界面为完纯导体,试探电场在导体表面切向分量等于零;如果试探电磁场满足麦克斯韦方程组,并且试探磁场在介质分界面两侧的切向分量连续,则分子第二项也等于零. 从而  $\gamma_p$  在  $p=0$  处的第一变分为零,证明了式(1)是稳定的变分公式. 这就要求在求解过程中试探电磁场满足麦克斯韦方程组;试探电磁场在介质分界面两侧的切向分量连续;假设导体无耗,并且试探电场在导体表面切向分量等于零. 以上分析中并未对媒质做限制,从而该变

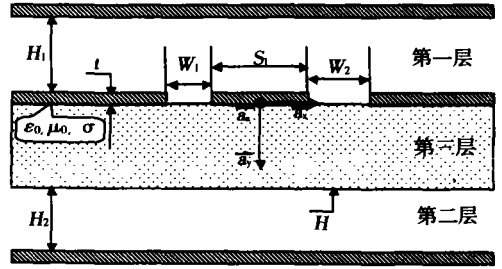


图1 平面传输线结构图  
Fig.1 Geometry of planar line

分公式在各向异性、有耗媒质的情况下仍适用.

适用于如图 1 所示(无上下接地板的开放式)的平面传输线,假设槽口电场为  $\vec{e}_t$ , 试探电磁场满足以上边界条件. 由边界条件可以得到由槽口切向电场表示的试探电磁场. 由以上推导可知,除非  $\vec{e}_t$  与准确场一致,否则槽口上下表面的磁场不连续,从而变分式(1)可写为

$$\int_{slot} (\vec{n} \times \vec{e}_t^*) \cdot \vec{h} dx = 0, \quad (7)$$

$$\text{也即} \int_{slot} \{ e_{zt}^* (h_{z1} - h_{z3}) + e_{zt}^* (h_{z3} - h_{z1}) \} dx = 0.$$

$$(8)$$

1.3 试探场及变分式的谱域表示式

对各种开放的或屏蔽的平面传输线,在包含槽缝的分界面上,由于存在沿  $\vec{a}_z$  轴方向的不连续性,不宜在空域计算由槽口切向电场表示的试探场. 为此,转换到谱域. 图示的平面传输线(开放式或屏蔽式)一般传输的是混合模. 各层中的电场和磁场可以用谱域电位函数  $\Phi_E$  产生的 TM 波和谱域磁位函数  $\Phi_H$  产生的 TE 波的迭加表示.  $\Phi_E, \Phi_H$  的表示式中有 8 个未知系数.

对于屏蔽平面传输线来说

$$\Phi_H^i(k_{zn}, y) = A_H^i(k_{zn}) \cosh[s0_i(a_i + H_i)], \quad (9)$$

$$\Phi_E^i(k_{zn}, y) = A_E^i(k_{zn}) \sinh[s0_i(a_i + H_i)], \quad (10)$$

$$\Phi_{E,H}^3(k_{zn}, y) = B_{E,H}^3(k_{zn}) \sinh(s0_3 y) + C_{E,H}^3(k_{zn}) \cdot \cosh(s0_3 y), \quad (11)$$

式中,  $i=1, 2, k_{zn} = n\pi/Wg$ ,  $Wg$  为截面宽度.

对开放的平面传输线来说

$$\Phi_{E,H}^i(k_z, y) = A_{E,H}^i(k_z) e^{s0_i(a_i + H_i)}, \quad i=1, 2 \quad (12)$$

$$\Phi_{E,H}^3(k_z, y) = B_{E,H}^3(k_z) \sinh(s0_3 y) + C_{E,H}^3(k_z) \cdot \cosh(s0_3 y). \quad (13)$$

在上述表达式中

$$k_i^2 = \omega^2 \mu_i \epsilon_i, s0_i = \sqrt{k_x^2 - \gamma^2 - k_i^2}, a_1 = y, a_2 = -(y - H).$$

设图中槽口的电场分布为  $\tilde{e}_z$ , 其谱域形式为  $\tilde{e}_z$ , 由谱域中电磁场的边界条件确定八个定解方程, 解出八个未知系数, 从而各区域中的场就可用槽口切向电场表示出来.

定义傅里叶变换为

$$\tilde{e}_n(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_n(x) e^{ik_x x} dx, \quad n = 1, 2 \quad (14)$$

由 Parseval 定理, 对开放平面传输线结构, 可以写出谱域中的稳定的变分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{e}_{z1}(k_x, 0) \cdot (\tilde{h}_{z1}(k_x, 0) - \tilde{h}_{z3}(k_x, 0)) + \tilde{e}_{z2}(k_x, 0) \cdot (\tilde{h}_{z3}(k_x, 0) - \tilde{h}_{z1}(k_x, 0))] dk_x = 0. \quad (15)$$

$\tilde{e}_{z1}, \tilde{e}_{z2}$  可通过选取适当的基函数展开. 从理论上讲, 如果该基函数是完备的话, 用这种方法也可以得到传播常数的精确解. 对屏蔽的平面传输线结构, 以上无穷积分应改为离散的级数和.

## 2 实例验证

式(15)适用于如图 1 所示的各种平面传输线结构的分析, 下面对开放的槽线用上述方法进行验证. 槽口切向电场的基函数可用传统的谱域法基函数[2]展开, 由于传播常数满足稳定的变分式, 只选取基函数的第一项就可得到较精确的解, 即选取槽口切向电场为

$$\tilde{e}_{z1}(k_x) = 2\pi J_0(k_x W/2), \quad J_0 \text{ 为零阶第一类贝赛尔函数, } \tilde{e}_{z2}(k_x) = 0$$

在选取以上槽口电场并求得试探电场后可以得到槽线传播常数的表达式为

$$\gamma^2 = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (k_1^2 A_H^1 - k_3^2 C_H^3) J_0(k_x W/2) dk_x}{\int_{-\infty}^{+\infty} (A_H^1 - C_H^3) J_0(k_x W/2) dk_x}. \quad (16)$$

选取  $\gamma_0 = \sqrt{(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2} k_0$  为传播常数初值, 再用迭代法用上式求解. 可见, 用本文方法每次迭代只需求解两个无穷积分. 表 1 给出了本文结果与用文献[2]方法计算的结果, 可以看出, 两者吻合较好. 表 1 中带“\*”号的两个数据是由 MICROWAVE OFFICE 2002 中的 TXLINE 软件计算所得. 表 1 中  $\epsilon_r = 2.22$  的结果比  $\epsilon_r = 9.7$  的结果好, 这是由于所选槽口切向电场其实就是无介质槽线槽口切向电场的实际分布<sup>[3]</sup>, 作为介质存在时的近似场, 低介电

常数时的近似度当然高于高介电常数时的情形, 但除了个别点, 相对误差都小于 1%. 另外, 用谱域法计算传播常数时发现, 传播常数对基函数的阶数并不敏感<sup>[2]</sup>, 其实式(16)就相当于文献[2]中谱域法的一阶近似. 本文从变分法的角度证明了这一结论. 得到传播常数后, 特性阻抗就可用与谱域法相似的方法求出.

表 1 槽线传播常数本文计算结果与文献[2]结果比较  
Table 1 Comparison of propagation constant of slot line from the paper and the references

$W/\lambda_0$	$\epsilon_r = 2.22 \quad (H = 1\text{mm})$			$\epsilon_r = 9.7 \quad (H = 1\text{mm})$		
	本文	文献[2]	相对误差 (%)	本文	文献[2]	相对误差 (%)
0.001	124.29			215.84		
0.005	121.27	121.80	0.436	204.25	204.08	-0.084
0.02	117.33	117.71	0.326	184.32	182.70	-0.887
0.04	114.50	114.83	0.287	169.87	168.35	-0.904
0.06	112.71	113.17	0.408	160.62	159.08	-0.966
0.2	109.07	108.73	-0.308	141.81	140.17	-1.17
0.4	107.79	107.50	-0.272	135.97	135.69	-0.203
0.6	107.58	106.90	-0.628	132.86	134.70	1.348
1	106.85	106.29	-0.526	131.51	135.58	3.002
1.2	106.73	106.18*	-0.520	129.51		
1.4	106.52	106.04*	-0.450	130.33		

## 3 结论

本文给出并证明了各种开放的和屏蔽的平面传输线传播常数所满足的空域及谱域的稳定的变分公式, 该公式仅以槽口切向电场为未知参量, 给出适当的槽口切向电场试探值, 即可算出传播常数, 且计算速度快. 最后, 对槽线进行了计算, 可以看出, 槽线传播常数所满足的变分式非常简单, 计算结果与文献结果吻合较好.

## REFERENCES

- [1] Garg R, Gupta K C. Expressions for wavelength and impedance of a slot line. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1976, **24**: 24—532
- [2] Janaswamy R, Schaubert D H. Characteristics impedance of a wide slotline on low-permittivity substrates. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1986, **34**: 900—902
- [3] Janaswamy R, Schaubert D H. Analysis of the tapered slot antenna. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1987, **35**: 1058—1065
- [4] Huynen I, Vanhoenacker-Janvier D, Vander Vorst A. Spectral domain form of new variational expression for very fast calculation of multilayered lossy planar line parameters. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, 1994, **42**: 2099—2106