

## 部分手征介质填充同轴线的反射和透射特性

董建峰

(宁波大学光纤通信与网络技术研究所, 浙江, 宁波, 315211)

徐善驾

(中国科学技术大学电子工程与信息科学系, 安徽, 合肥, 230027)

**摘要** 用多模网络与严格模匹配相结合的方法, 对部分手征介质填充同轴线的反射和透射特性进行了分析和求解. 对横截面采用等效径向传输线, 对纵向采用多模传输线方法, 并且利用结构的对称性使得问题简化. 讨论了不同情形下手征参数和介电常数对反射和透射特性的影响.

**关键词** 手征介质, 同轴线, 多模网络, 模匹配.

## REFLECTION AND TRANSMISSION OF COAXIAL WAVEGUIDE PARTIALLY FILLED WITH CHIRAL MEDIA

DONG Jian-Feng

(Institute of optical fiber communication and network technology, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, China)

XU Shan-Jia

(Department of Electronic Engineering and Information Science, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China)

**Abstract** The reflection and transmission of coaxial waveguide partially filled with chiral media were solved by a method which combined the multimode network theory with a rigorous mode matching procedure. Equivalent radial transmission lines in the transversal cross section and multimode transmission lines in the longitudinal direction were introduced. The symmetrical property of the structure in the longitudinal direction was considered so that the whole analysis could be simplified. Effect of chirality and permittivity on the reflection and transmission was discussed.

**Key words** chiral material, coaxial waveguide, multimode network, mode matching.

### 引言

近十几年来, 人们对手征介质中电磁波的传播、散射和辐射等现象进行了大量的研究. 1989 年, Engheta 和 Pelet<sup>[1]</sup> 首先提出了手征波导 (chirrowaveguide) 的概念. 有关研究表明, 手征波导有新颖独特的性质, 如模式耦合和模式分岔等, 在微波、毫米波和光波领域有广泛的应用前景. 为了实际设计制作新型的手征介质元器件, 必须对手征波导的各种不连续性有透彻的了解. 最近, 已有一些文献对手征波导的不连续性问题进行了研究<sup>[2~8]</sup>. 本文用多模网络与严格模匹配相结合的方法, 对部分手征介质填充同轴线的反射和透射特性进行了分析和求解. 分析中在横截面采用等效径向传输线, 在纵向采用多

模传输线方法, 并且利用结构的对称性使得问题简化. 对各种不同情形下部分手征介质填充同轴线的反射和透射特性进行了数值分析, 讨论了手征参数和介电常数对反射和透射特性的影响.

### 1 理论分析

在理想导体组成的同轴线中, 部分填充两层无耗的手征介质, 如图 1 所示. 为了求出这种不连续结构的反射和透射特性, 首先要求解部分手征介质填充的同轴线中的本征值问题, 然后再计算纵向不连续性的散射特性, 下文分别进行讨论.

#### 1.1 部分手征介质填充同轴线中的本征值问题

对于时谐场  $e^{j\omega t}$ , 手征介质中的本构关系可以表示成<sup>[7]</sup>:

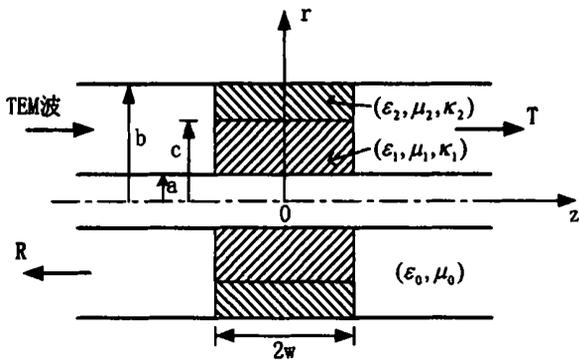


图 1 部分手征介质填充同轴线波导的结构图  
Fig.1 Configuration of the coaxial waveguide partially filled with chiral media

$$D = E - j \mu H, \tag{1}$$

$$B = \mu H + j \mu E.$$

其中  $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\kappa$  分别代表介电常数、磁导率和手征参数. 把式(1)代入麦克斯韦方程,可以得到

$$\nabla \times E = -j \mu H + \kappa E, \tag{2}$$

$$\nabla \times H = j \mu E + \kappa H.$$

设入射波是 TEM 波,由于结构的对称性,它在不连续界面两边都只能激发起圆对称模. 在圆柱坐标系中,对于圆对称模,我们有  $\partial/\partial\phi = 0$ , 设

$$E_r = e_r(r) U(z), H_r = h_r(r) U(z),$$

$$E_\phi = e_\phi(r) J(z), H_\phi = h_\phi(r) J(z), \tag{3}$$

$$E_z = e_z(r) J(z), H_z = h_z(r) J(z).$$

根据式(2),经过简单的数学推导,得到

$$dU(z)/dz = -jk_z ZJ(z), \tag{4}$$

$$dJ(z)/dz = -jk_z Y_c U(z),$$

和

$$\begin{pmatrix} e_r \\ h_r \end{pmatrix} = -k_0 K^{-1} \begin{pmatrix} e_\phi \\ h_\phi \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} e_\phi \\ h_\phi \end{pmatrix} + k_z^2 K^{-1} \begin{pmatrix} e_\phi \\ h_\phi \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} r e_\phi \\ r h_\phi \end{pmatrix} = r K \begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix}. \tag{7}$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} \mu & -j\mu \\ j\mu & \mu \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$K^{-1}$ 表示  $K$ 的逆矩阵. 式(4)是纵向的等效传输线方程,其中  $U(z)$ 和  $J(z)$ 是部分手征介质填充同轴线中的本征模的电压和电流幅度,  $k_z$ 是本征模的纵向传播常数,  $Z_c$ 和  $Y_c$ 是特性阻抗的特性导纳,有

$$Z_c = 1/Y_c = -jk_z/k_0. \tag{9}$$

式(5)~(7)中的矩阵  $K$ 和  $K^{-1}$ 可以通过变换矩阵对角化得到,

$$T^{-1}KT = \begin{pmatrix} k_+ & 0 \\ 0 & -k_- \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}K^{-1}T = \begin{pmatrix} 1/k_+ & 0 \\ 0 & -1/k_- \end{pmatrix}. \tag{10}$$

其中

$$k_\pm = \mu(1 \pm \kappa),$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j/\mu & -j/\mu \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & j\mu \end{pmatrix}.$$

如果我们令

$$\begin{pmatrix} e_z(r) \\ h_z(r) \\ r e_\phi(r) \\ r h_\phi(r) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} V_1(r) \\ V_2(r) \\ I_1(r) \\ I_2(r) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

就可以得到两组相互独立的右旋波( $n=1$ )和左旋波( $n=2$ )的径向传输线方程

$$\begin{aligned} dV_n(r)/dr &= -jk_{rn}Z_m(r)I_n(r), \\ dI_n(r)/dr &= -jk_{rn}Y_m(r)V_n(r). \end{aligned} \tag{12}$$

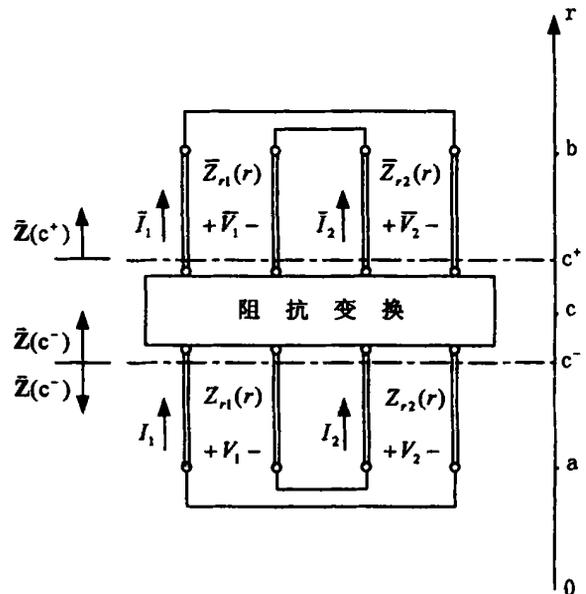


图 2 部分手征介质填充同轴线波导横截面上的等效径向传输线网络

Fig.2 Equivalent radial transmission line network on the cross section of the coaxial waveguide partially filled with chiral media

其中

$$Z_{r1}(r) = 1/Y_{r1}(r) = -jk_{r1}/(k_+ r), k_{r1}^2 = k_+^2 - k_z^2,$$

$$Z_{r2}(r) = 1/Y_{r2}(r) = jk_{r2}/(k_- r), k_{r2}^2 = k_-^2 - k_z^2.$$

横截面上的等效径向传输线网络如图 2 所示,右旋和左旋圆极化波在均匀区域可以独立传输,只在界面发生耦合,这样就对波在手征介质中的传播有一个清晰的物理图象.

由式(12)可以解出

$$V_n(r) = A_n J_0(k_{rn}r) + B_n N_0(k_{rn}r),$$

$$I_n(r) = -j Y_{rn}(r) [A_n J_1(k_{rn}r) + B_n N_1(k_{rn}r)]. \quad (13)$$

根据径向传输线理论和  $r = a$  处切向电场为零的边界条件,可以推出<sup>[7]</sup>

$$\begin{pmatrix} V_1(c^-) \\ V_2(c^-) \end{pmatrix} = -Z(c^-) \begin{pmatrix} I_1(c^-) \\ I_2(c^-) \end{pmatrix} \quad (14)$$

$Z(c^-)$  是  $r = c^-$  处向下看的输入阻抗矩阵,有  $Z(c^-) =$

$$\begin{pmatrix} Cs(k_{r1}c, k_{r1}a) & -jZ_1(a)sn(k_{r1}c, k_{r1}a) \\ -Cs(k_{r2}c, k_{r2}a) & -jZ_2(a)sn(k_{r2}c, k_{r2}a) \\ \frac{jSn(k_{r1}c, k_{r1}a)}{Z_1(c)} & \frac{Z_{r1}(a)cs(k_{r1}c, k_{r1}a)}{Z_{r1}(c)} \\ \frac{jSn(k_{r2}c, k_{r2}a)}{Z_2(c)} & \frac{Z_{r2}(a)cs(k_{r2}c, k_{r2}a)}{Z_{r2}(c)} \end{pmatrix}^{-1} \quad (15)$$

其中函数  $Cs(x, y)$ 、 $Sn(x, y)$ 、 $cs(x, y)$ 、 $sn(x, y)$  分别定义为

$$Cs(x, y) = y[J_1(y)N_0(x) - N_1(y)J_0(x)]/2,$$

$$Sn(x, y) = y[J_1(y)N_1(x) - N_1(y)J_1(x)]/2,$$

$$cs(x, y) = y[N_0(y)J_1(x) - J_0(y)N_1(x)]/2,$$

$$sn(x, y) = y[J_0(y)N_0(x) - N_0(y)J_0(x)]/2.$$

式(14)中的负号反映了径向传输线中电流的方向沿径向向外,而输入阻抗矩阵是沿径向向里看的.类似地,可以得到外层手征介质中的方程

$$\begin{pmatrix} V_1(c^+) \\ V_2(c^+) \end{pmatrix} = Z(c^+) \begin{pmatrix} \bar{I}_1(c^+) \\ \bar{I}_2(c^+) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$Z(c^+)$  为  $r = c^+$  处向上看的输入阻抗矩阵,有

$$\begin{pmatrix} Cs(k_{r1}c, k_{r1}b) & -jZ_1(b)Sn(k_{r1}c, k_{r1}b) \\ -Cs(k_{r2}c, k_{r2}b) & jZ_2(b)Sn(k_{r2}c, k_{r1}b) \\ \frac{jSn(k_{r1}c, k_{r1}b)}{Z_{r1}(c)} & \frac{Z_{r1}(b)Cs(k_{r1}c, k_{r1}b)}{Z_{r1}(c)} \\ \frac{jSn(k_{r2}c, k_{r2}b)}{Z_{r2}(c)} & \frac{Z_{r2}(b)Cs(k_{r2}c, k_{r2}b)}{Z_{r2}(c)} \end{pmatrix}^{-1} \quad (17)$$

式(16)、(17)中带横杠的表示外层手征介质中的量.

根据  $r = c$  处电磁场切向分量连续的边界条件,可以推出  $r = c^-$  处向上看的输入阻抗矩阵为<sup>[7]</sup>

$$Z(c^-) = QZ(c^+)Q^{-1}, \quad (18)$$

其中

$$Q = T^{-1}T. \quad (19)$$

由横向谐振技术,得到特征方程

$$\det(Z(c^-) + Z(c^+)) = 0. \quad (20)$$

这是超越方程,求解可以得到部分手征介质填充同轴线中圆对称模的本征值  $k_{zn}$ ,进而得到本征函数,本征函数的系数由下式归一化<sup>[7]</sup>

$$\int_a^b (e_{\theta\theta}h_{\theta\theta} + e_{\phi\phi}h_{\phi\phi}) r dr = 1. \quad (21)$$

### 1.2 纵向不连续性问题分析

纵向有两个不连续界面,由于结构的对称性,导模的散射特性可以用对称和反对称激发方法来分析,对称激发相应于等效传输线的开路,反对称激发相应于等效传输线的短路,这样,我们可以只分析一个不连续性,如图 3 所示. 必须注意,这里的短路(开路)是指在  $z = 0$  处等效传输线是  $U(0) = 0$  ( $J(0) =$

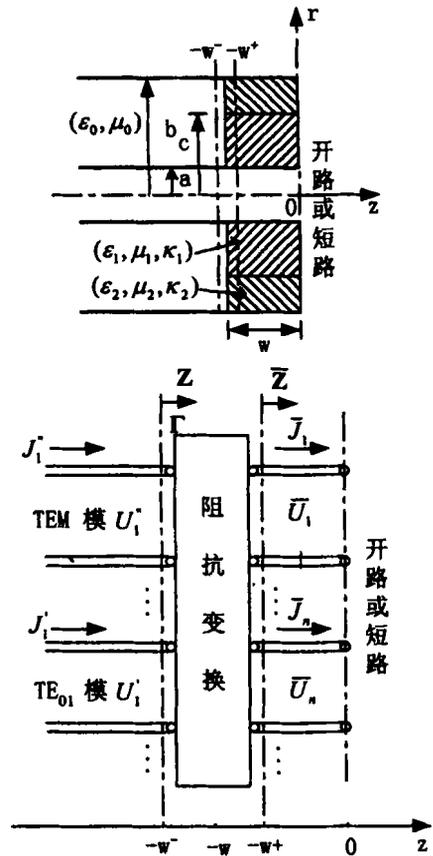


图 3 纵向不连续结构的等效网络  
Fig. 3 Equivalent network of the discontinuity structure in the longitudinal direction

0), 即  $E_r = 0, H_r = 0 (E_\phi = 0, H_\phi = 0)$ .

显然,在  $z = -w^+$  处向右看去的输入阻抗矩阵可以由下式确定(下列各式中带横杠的表示不连续性右边手征介质中的量)

$$\begin{aligned} (Z_o)_{ij} &= -jZ_{ci} \text{ctg}(k_{zi}w)_{ij}, & \text{开路} \\ (Z_s)_{ij} &= jZ_{ci} \text{tg}(k_{zi}w)_{ij}. & \text{短路} \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $Z_{ci}$  是由式(9)确定的特性阻抗.

根据  $z = -w$  处电磁场切向分量连续的边界条件,利用空气同轴线中 TM 模和 TE 模的正交关系,经过推导,可得到

$$U = MU, \quad J = NJ. \quad (23)$$

其中  $U, J$  为列向量,有

$$U = \begin{pmatrix} U \\ U \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J \\ J \end{pmatrix}.$$

而

$$M = \begin{pmatrix} L \\ G \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

其中元素为

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \int_a^b h_{\phi j} r dr, & G_{ij} &= \int_a^b h_{\phi j} e_{\phi i} r dr, \\ A_{ij} &= \int_a^b h_{\phi j} e_{\phi i} r dr, & B_{ij} &= \int_a^b e_{\phi j} h_{\phi i} r dr. \end{aligned}$$

上列各式中带两撇和一撇的量表示空气同轴线中的 TM 模和 TE 模(TM 模看成是第一个 TM 模,因为 TEM 模和 TM 模都只有横向场分量  $E_r, H_\phi$ ).

再利用部分手征介质填充的同轴线中的圆对称模的正交关系式(21),可以推出

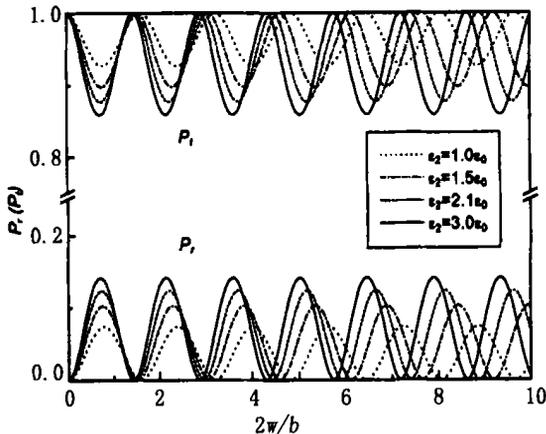


图4 TEM 模的反射和透射的归一化功率  $P_r (P_t)$  和归一化长度  $2w/b$  之间的变化关系  
( $a = 3.04\text{mm}, b = 7.00\text{mm}, c = 6.00\text{mm}, \epsilon_1 = 2.1\epsilon_0, \epsilon_2 = 1.0\epsilon_0, \epsilon_3 = 0.1\epsilon_0, \epsilon_4 = 0$ )

Fig. 4 Normalized power  $P_r (P_t)$  of the reflected and transmitted of TEM mode versus normalized length  $2w/b$   
( $a = 3.04\text{mm}, b = 7.00\text{mm}, c = 6.00\text{mm}, \epsilon_1 = 2.1\epsilon_0, \epsilon_2 = 1.0\epsilon_0, \epsilon_3 = 0.1\epsilon_0, \epsilon_4 = 0$ )

$$N^T U = U, \quad M^T J = J. \quad (24)$$

由式(23)和(24)可以证明

$$M^T N = N^T M = 1.$$

由多模网络的阻抗定义

$$U = ZJ \text{ 和 } U = ZJ \quad (25)$$

可以得到阻抗变换公式

$$Z = M Z M^T. \quad (26)$$

从  $z = -w^-$  处向右看去的反射系数矩阵为

$$R = [Z + Z_c]^{-1} [Z - Z_c], \quad (27)$$

其中  $Z_c$  为空气同轴线中的特性阻抗矩阵,即

$$Z_c = \begin{pmatrix} Z_c & 0 \\ 0 & Z_c \end{pmatrix}. \quad (28)$$

其中元素  $(Z_c)_{ij} = Z_{ci} \delta_{ij}, (Z_c)_{ij} = Z_{ci} \delta_{ij}$ .

求出对称面 ( $z = 0$ ) 为开路和短路的反射系数矩阵  $r_o$  和  $r_s$  后,整个结构的反射系数和透射系数矩阵分别为

$$R = (r_o + r_s)/2, \quad T = (r_o - r_s)/2. \quad (29)$$

## 2 数值结果

下述计算中,取同轴线的内外半径为  $a = 3.04\text{mm}, b = 7.00\text{mm}, \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ,入射波的频率取  $10\text{GHz}$ ,这样,在空气同轴线中,只有 TEM 模是传输模,在模匹配中,两边都取 11 个模.

我们计算了内层部分手征介质填充,外层部分非手征介质填充的同轴线中 TEM 模的反射和透射的归一化功率  $P_r$  和  $P_t$ . 当  $\epsilon_1 = 2.1\epsilon_0, \epsilon_2 = \epsilon_0, \epsilon_3 =$

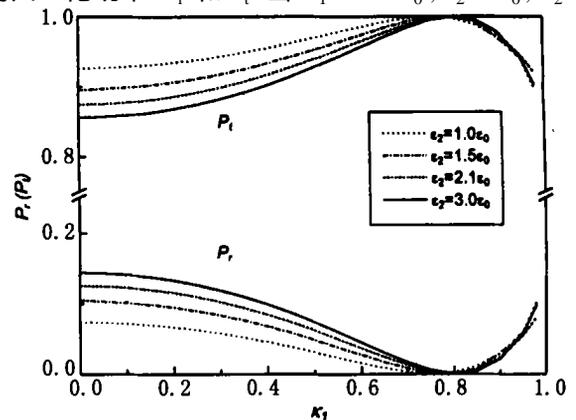


图5 TEM 模的反射和透射的归一化功率  $P_r (P_t)$  和手征参数  $\kappa_1$  之间的变化关系

( $a = 3.04\text{mm}, b = 7.00\text{mm}, c = 6.00\text{mm}, 2w = 5.00, \epsilon_1 = 2.1\epsilon_0, \epsilon_2 = \epsilon_0$ )

Fig. 5 Normalized power  $P_r (P_t)$  of the reflected and transmitted of TEM mode versus chirality parameter  $\kappa_1$

( $a = 3.04\text{mm}, b = 7.00\text{mm}, c = 6.00\text{mm}, 2w = 5.00\text{mm}, \epsilon_1 = 2.1\epsilon_0, \epsilon_2 = \epsilon_0$ )

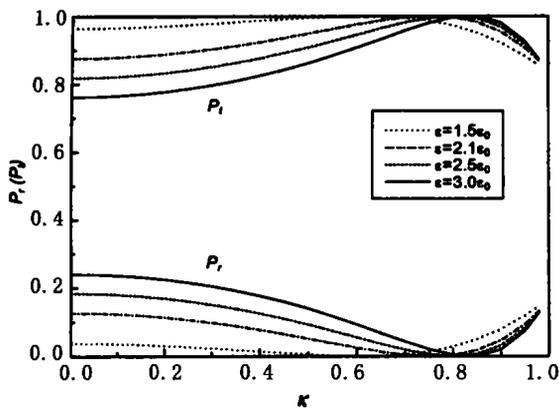


图 6 TEM 模的反射和透射的归一化功率  $P_r$  ( $P_t$ ) 和手征参数  $\kappa$  之间的变化关系 ( $a=3.04\text{mm}$ ,  $b=7.00\text{mm}$ ,  $2w=5.00\text{mm}$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_0$ )

Fig. 6 Normalized power  $P_r$  ( $P_t$ ) of the reflected and transmitted of TEM mode versus chirality parameter  $\kappa$  ( $a=3.04\text{mm}$ ,  $b=7.00\text{mm}$ ,  $2w=5.00\text{mm}$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_0$ )

0,  $c=6.00\text{mm}$  时,即外层为空气时,则与文献[7]的结构相同,计算结果与文献[7]完全一致,如图4和图5的点线所示.图4给出了内层为手征介质( $\epsilon_1=2.1\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1=0.1$ )、外层为不同介电常数的非手征介质填充时,TEM模的反射和透射的归一化功率随归一化长度  $2w/b$  的变化关系,从图可以看出,当外层的介电常数增大时,最大反射功率增大,最小透射功率减小,而且曲线向左边移动,说明外层介质的介电常数可以改变反射透射的最大和最小值的位置.

图5是外层介质的介电常数不同时,TEM模的反射和透射的归一化功率随内层手征介质的手征参数  $\epsilon_1$  的变化关系.当手征参数较小时,随着外层介质的介电常数增大,反射功率增大,相应的透射功率减少.但当  $\epsilon_1 > 0.8$  时,反射和透射功率基本不随外层介质的介电常数变化.这是因为,当内层的手征参数较大时,内层手征介质起主要作用,外层介质的作用比较小.

最后我们给出了内外层都为相同的手征介质时

( $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_0$ ),TEM模的反射和透射的归一化功率随手征参数  $\kappa$  的变化关系,如图6所示.和图5类似,随着介电常数增大,反射功率增大,透射功率减少,但幅度较大.

### 3 结论

本文用多模网络与严格模匹配相结合的方法,从理论上研究了部分手征介质填充的同轴线的不连续性问题,得到了TEM模的反射和透射公式,并且对不同的情形进行了数值计算,讨论了手征参数和介电常数对反射和透射特性的影响.研究结果对部分手征介质填充的同轴线元件的研究有实际的参考意义.

### REFERENCES

- [1] Pelet P, Engheta N. The theory of chirowaveguides. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1990,38:90—98
- [2] Mariotte F, Engheta N. Reflection and transmission of guided electromagnetic waves at an air-chiral interface and at a chiral slab in a parallel plate waveguide. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1993,41:1895—1906
- [3] Mariotte F, Engheta N. Reflection from a lossy chiral slab (with and without metallic backing) in a parallel plate waveguide. Radio Science, 1995,30:827—834
- [4] Busse G, Jacob A F. Lossy chiral slabs in circular waveguides. IEE Pro. Microw. Antennas Propag., 1996,143:51—56
- [5] Xu S, Du K. Network representation and transverse resonance for layered chirowaveguides. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1996,44:1496—1499
- [6] Wu X, Jaggard D L. Discontinuities in planar chirowaveguides. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1997,45:640—647
- [7] Wu X, Mariotte F. Analysis of coaxial waveguide partially filled with chiral media. Inter. J. Infrared and Millim. Waves, 1997,18:2411—2435
- [8] Shen Z, MacPhie R H. Scattering at a nonchiral-chiral interface in a coaxial waveguide. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1998,46:997—1001