

# 电磁数字模拟中时间衰落的辅助场研究\*

喻志远 林为干

(电子科技大学应用物理所, 四川, 成都, 610054)

**摘要** 将一衰减因子引入麦克斯韦方程式, 得到一随时间逝落的辅助场, 文中讨论了它的特性, 并给出了所满足的方程及其差分离散方程. 给出的计算例子说明这种人工衰减技术在分析含高 Q 谐振电路系统中可得到与常规时域有限差分法相同的精度.

**关键词** 时域有限差分法, 人工衰减, 高-Q 谐振腔, 辅助场.

## STUDY OF AUXILIARY FIELDS OF TIME EVANESCENCE IN ELECTROMAGNETIC NUMERICAL SIMULATIONS\*

YU Zhi-Yuan LIN Wei-Gan

(Institute of Applied Physics, University of Electronic Science Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

**Abstract** By merging an attenuation factor into the Maxwell equations, a time evanescent auxiliary field was obtained. The characteristic of the auxiliary fields and its equations, and difference formulas were presented. The numerical examples show that the technique of artificial attenuation technique is efficient in analysis of high-Q resonant circuits, and the same accuracy of numerical results as the conventional finite difference time domain method can be achieved.

**Key words** finite difference time domain, artificial attenuation, high-Q resonant cavity, auxiliary fields.

### 引言

在用时域有限差分(FDTD)方法分析含有高品质因数谐振电路的微波电路时,常需要较长的时间才能达到稳定状态,这是由于导波中的主模式在高品质因数电路中的谐振行为所引起的.引入广义散射参数<sup>[1]</sup>可将研究中的微波谐振电路分解为单一不连续部件,以避免这种长时间计算才能达到稳定的现象.但未见在 FDTD 方法中引入某种改进来克服这一现象的报道.

本文提出一种辅助场技术:在物理电场和磁场中引入一时间衰减因子得到相应的辅助场,并给出了它所满足的微分方程.由于此辅助场包含一衰减因子,因而在时域计算中很快趋于稳定.此辅助场满足与物理场相同的边界条件和吸收边界条件,而衰减因子的引入,使得相应差分公式的稳定条件较常规 FDTD 方法更为宽松.由于引入的时间衰减常数

为一常数,不会带给辅助场附加的数字色散.

### 1 含有人工衰减因子的辅助场

我们将时间衰减因子引入物理电磁场中,得到一新的辅助场

$$\begin{aligned} E(x, y, z, t) &= E_0(x, y, z, t)A(t), \\ H(x, y, z, t) &= H_0(x, y, z, t)A(t). \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)中  $E_0$  和  $H_0$  为所研究对象中的原物理电磁场;  $A(t)$  为一随时间恒定衰减的函数,有

$$A(t_2)/A(t_1) < 1, \quad (t_1 < t_2, t > 0) \quad (2)$$

并且  $A(t) > 0, \quad (t > 0) \quad (3)$

关于时间衰减辅助函数选择的原则,除了上述的基本要求之外,另一基本的要求是  $A(t)$  不能引入额外的数字色散.假若有某一随时间变化的信号,加入时间衰减辅助函数后,不能改变其原有的相对频谱分布.我们取傅里叶核函数(Fourier kernel Function)

\* 国家自然科学基金资金(批准号 69771027)资助项目  
稿件收到日期 2001-01-12, 修改稿收到日期 2001-07-17

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 69771027)  
Received 2001-01-12, revised 2001-07-17

$$f(t) = A \frac{\sin(\Delta\omega(t-t_0))}{\pi(t-t_0)} \cos(\omega_0(t-t_0)) \quad (4)$$

进行研究<sup>[2]</sup>.如取随时间衰减的指数函数作为辅助函数,则有

$$f_A(t) = A \frac{\sin(\Delta\omega(t-t_0))}{\pi(t-t_0)} \cos(\omega_0(t-t_0)) e^{-\alpha t} \quad (5)$$

在进行傅里叶变换后,我们可以得到式(4)和(5)的频率响应,见图1.图2是  $f(t)$  和  $f_A(t)$  的时间响应曲线.这里  $dt = 1.5 \times 10^{-13} \text{s}$ ,  $\alpha = 1.5 \times 10^{-4}/dt$ ,  $\omega_0 = 33.25 \text{GHz}$ ,  $\Delta\omega = 12.75 \text{GHz}$ ,  $A = 1 \times 10^{-12}$ .从图1和图2中可以看出,选取指数衰减函数作为辅助函数,当衰减系数为常数时,相应的频率响应仅为均匀地频谱幅度减小,频谱曲线仍保持原形状不变,因而可以断定指数衰减函数能够满足我们的要求.由  $E_0$  和  $H_0$  所满足的麦克斯韦方程,可导出  $E$  和  $H$  在无源区所满足的微分方程为

$$\nabla \times E = -\mu \left( \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{A'(t)}{A(t)} H \right) \quad (6)$$

$$\nabla \times H = \mu \left( \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{A'(t)}{A(t)} E \right) \quad (7)$$

式中  $A'(t)$  为函数  $A(t)$  的导数.使用中心差分法,并用  $n+1/2$  和  $n-1/2$  时刻的平均值来代替  $n$  时刻的场值,我们得到

$$H_x^{n+1/2}(i,j,k) = T_h \cdot A_h \cdot H_x^{n-1/2}(i,j,k) - T_h \cdot [(E_y^n(i,j,k) - E_y^n(i,j,k-1))/\Delta x - (E_z^n(i,j,k) - E_z^n(i,j-1,k))/\Delta y], \quad (8)$$

$$E_x^{n+1/2}(i,j,k) = T_e \cdot A_e \cdot E_x^n(i,j,k) + T_e \cdot [(H_y^{n+1/2}(i,j,k) - H_y^{n+1/2}(i,j,k-1))/\Delta x - (H_z^{n+1/2}(i,j,k) - H_z^{n+1/2}(i,j-1,k))/\Delta y]. \quad (9)$$

这里  $T_e = \frac{2}{2\epsilon_0/\Delta t + \epsilon_0\mu}$ ,  $T_h = \frac{2}{2\mu_0/\Delta t + \mu_0\epsilon}$ ,  $A_e = \frac{\epsilon_0}{\Delta t}$

$$- \alpha\epsilon_0/2, A_h = \frac{\mu_0}{\Delta t} - \alpha\mu_0/2.$$

如果设  $A(t) = \exp(-\alpha t)$  则  $\alpha > 0$ , 则要求  $\alpha$  本身不能是时间的函数.这里  $\Delta t$  为时间步长,  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  为真空中的介电常数和磁导率.很明显,如果  $E_0$  和  $H_0$  在对应的差分公式中是数字稳定的,则式(6)和(7)也是数字稳定的.因为当  $t > 0$  时,有

$$\begin{aligned} E(t) &< E_0(t), \\ H(t) &< H_0(t). \end{aligned} \quad (10)$$

因为  $A(t)$  仅是时间的函数,因而与空间坐标和频率无关.所以我们引入的辅助场满足对应的物理场的边界条件和在对应的 FDTD 公式中满足的吸收边界条件,其数字色散与物理场相同.这里我们只给出了  $E_x$  和  $H_x$  所满足的差分公式,其他分量的差分离散公式可用相同的方法得到.

### 2 新方法的验证

为了证实我们提出的新辅助场在计算中的有效性,我们给出了计算矩形腔体的谐振频率的例子.我们取一段 8mm 波导(BJ320:  $a \times b = 7.112 \times 3.556 \text{mm}^2$ ),长度为 20mm,两头用金属封闭,由公式  $\lambda = \frac{2La}{\sqrt{a^2 + L^2}}$  (其中  $a$  为波导的宽边,  $L$  为腔体的长度)可求出腔体有最低振荡频率<sup>[2]</sup>为 22.3761GHz.在计算中我们取衰减常数为  $7.9848 \times 10^{-4}/dt$  ( $dt = 4.436 \times 10^{-13}/\text{s}$ ),计算出的腔体振荡频率如图3所示.其中,上部包络曲线是由新的辅助场方法迭代 4000 次得到,下部多起伏曲线是用常规 FDTD 公式迭代 6000 次求出的腔体谐振频率.此结果表明,用辅助场在条件相同的前提下迭代 4000 次计算出的腔体谐振频率,与常规 FDTD 公式迭代 6000 次得到的结果相同.图3中纵坐标  $A(f)$  表示频谱的相

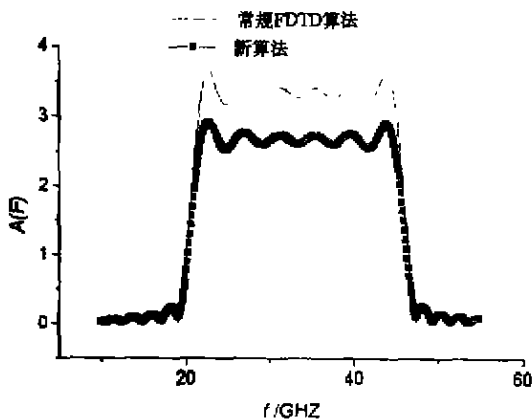


图1 式(4)和(5)的频率响应  
Fig.1 The frequency response of Eqs.(4)and (5)

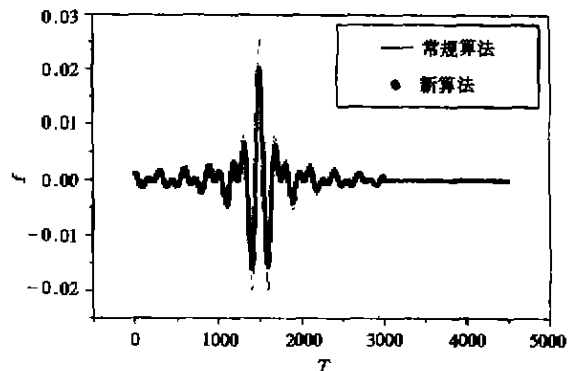


图2 式(4)和(5)随 T 的变化  
Fig.2 The variation of Eqs.(4)and (5)with T  
(T is the time step)

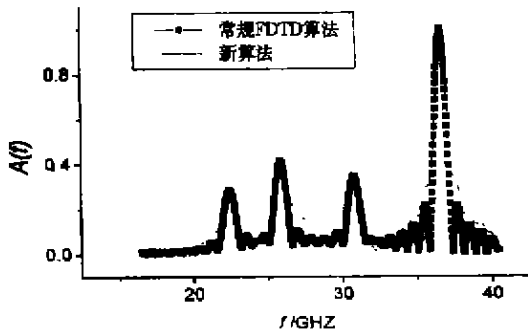


图3 矩形腔体的谐振频率

Fig. 3 The resonant frequency of the rectangular cavity (The upper contour curve is calculated by the artificial attenuation technique and the lower one is calculated by the conventional FDTD method)

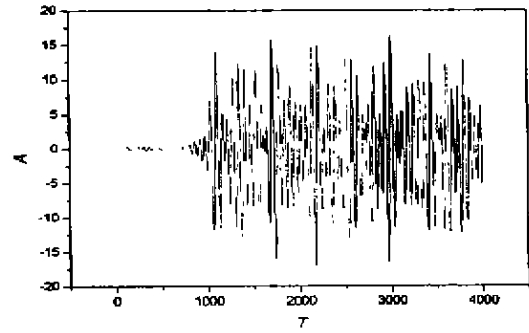


图5 常规时域有限差分法计算时主模式幅度A随时间步T的变化

Fig 5 The variation of the amplitude A of the main mode with T under the conventional FDTD, T is the time step

对大小,可以看出它们吻合得很好,与理论值的相对误差都为0.017876% (2.3801GHz).由此可以看出我们给出的辅助场计算方法的计算精度不低于常规方法.图4给出了腔体内最低模式随时间的变化,其中纵坐标A为模式的幅度.

由图4看到由于衰减因子的作用,此时间记录明显呈现出随时间衰减的特性.计算时间为4000次迭代,计算结果仍保持原有精度,这表明我们引入的人工衰减技术是有效的,作为与图4的对比,图5给出由常规时域有限差分法计算时主模式幅度随时间的变化.计算中我们采用文献[2]和[4]中所给出的带通源技术.

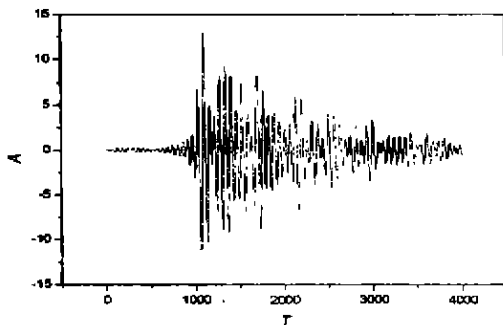


图4 当衰减因子为 $\alpha = 7.9848 \times 10^{-4}$ /时间步时,用新方法计算的最低谐振模式的幅度A随T的变化

Fig 4 The variation of the amplitude A of the lowest resonant modes with T under the new technique when the attenuation factor is  $7.9848 \times 10^{-4}/dt$  and  $dt = 4.4364 \times 10^{-13}$ s, T is the time step

### 3 结论

本文提出一种辅助场技术:在物理电场和磁场中引入一时间衰减因子得到相应的辅助场,并给出了它所满足的微分方程.由于此辅助场包含一时间衰减因子,因而在时域计算中很快趋于稳定.此辅助场满足与物理场相同的边界条件和吸收边界条件,而引入衰减因子使得相应差分公式的稳定条件较常规时域有限差分法(FDTD)更为宽松.由于引入的时间衰减常数为一常数,不会带给辅助场附加的数字色散.适当地选用衰减因子,计算结果仍保持常规FDTD计算的精度是可能的.实际计算表明我们引入的人工衰减技术是有效的.这种技术如应用于带有谐振电路的微波传输系统的数字模拟,将大大提高数字计算的效率,这是我们下一步的工作.

### REFERENCES

- [1] Tsugumichi shibata, Tatsuo Itoh. Generalized-scattering-matrix modeling of waveguide circuits using FDTD field simulation. *IEEE Trans. on MTT*, 1998, 46(11): 1742—1751
- [2] Zhiyuan Yu. A source bandpass technique for the FDTD analysis of waveguide discontinuity. *Microwave and Optical Technology Letters*, 1997, 16(3): 162—163
- [3] Simon Ramo, John R. Whinnery, *Fields and Waves in Modern Radio* (second edition). New York: John Wiley & Sons, 1965, 489
- [4] Zhiyuan Yu. A part time terminated bandpass source scheme in FDTD. In: *Proc. International Conference on Computational Electromagnetics and Its Applications*. Beijing: Publishing House of Electronic Industry, 1999, 60—62