基于球坐标的非线性小波变换图像压缩编码算法*

汪胜前[1] 周源华[1] 邹道文[2]
([1]上海交通大学图像通信与信息处理研究所，上海，200030；
[2]江西师范大学物理与通信学院，江西，南昌，330027)

摘要 利用小波变换的3个高频分量之间相关特性，提出了基于球坐标变换的非线性小波变换图像压缩编码的方法. 在小波收缩中，采用双曲线收缩处理球坐标下的径向分量以提高重建图像的质量. 实验结果表明：此算法在压缩比和重建质量方面都取得较好的效果.

关键词 非线性小波变换(小波收缩)，球坐标变换，双曲线收缩，球坐标子带分解.

NONLINEAR WAVELET IMAGE COMPRESSION CODING ALGORITHMS BASED ON SPHERICAL COORDINATES*

WANG Sheng-Qian[1] ZHOU Yuan-Hua[1] ZOU Dao-Wen[2]
([1] Inst. of Image Comm. & Info. Processing, Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030, China;
[2] School of Physical & Comm. Tech., Jiangxi Normal Univ., Nanchang, Jiangxi 330027, China)

Abstract A method of nonlinear wavelet transform image compression coding based on spherical coordinate transform was introduced according to the correlation among the high-frequency sub-bands from wavelet transform. In wavelet shrinkage, the radial part in spherical coordinate was processed by hyperbolic shrinkage. The result of experiment proves a better achievable result on its rate and the quality of the reconstructed image.

Key words nonlinear wavelet transform (wavelet shrinkage), spherical coordinates transform, hyperbolic shrinkage, spherical sub-band (SSB) decomposition.

引言

近几年，把非线性小波变换应用于图像压缩编码、去噪和图像重建成为图像处理技术领域的研究热点. Antonin Chamboll 利用小波收缩(wavelet shrinkage)方法进行图像压缩，取得良好的效果[1]，该方法的基本思想是：在小波变换系数中，认为大的系数含有重要信息而给予保留，认为小的系数含有次要信息而给予消除. 在系数的取舍中，采用小波收缩方法，该方法中收缩因子是关键，它直接影响图像的压缩效果.

在图像变换域压缩算法中，一般分为图像变换、量化(标量或矢量量化)、熵编码(Huffman 编码或算术编码)3个步骤. 本文着重考察图像变换步骤，提出了一种利用非线性小波变换进行图像压缩编码的新方法：首先，对图像进行小波变换，对变换后的小波系数进行球坐标变换；然后，根据球坐标系数的统计特性设定收缩因子；再利用收缩因子对球坐标中系数进行双曲线收缩；最后，量化(标量或矢量量化)球坐标中系数并进行小波零树压缩.

1 小波收缩

我们对二维图像分析，构成一组二维小波函数[1]

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(1)}(x_1,x_2)&=\psi(x_1)\varphi(x_2)\\ \psi^{(2)}(x_1,x_2)&=\varphi(x_1)\psi(x_2)\\ \psi^{(3)}(x_1,x_2)&=\psi(x_1)\psi(x_2)\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

* 江西省自然科学基金(991003)资助项目
稿件收到日期 2000-12-01，修改稿收到日期 2001-03-19

* The project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (No. 991003)
Received 2000-12-01, revised 2001-03-19

令 $\Psi=\{\psi^{(1)},\psi^{(2)},\psi^{(3)}\}$，由 $f=\sum_{j\in Z^2,j\ge K}C^f_{j,k}\Psi_{j,k}-\sum_{j\in Z^2}d_{j,K}\varphi_{j,K}$ 取 K 层小波变换，得

$$C^{(i)}_{j,k}=<f,\psi^{(i)}>,\quad d_{j,k}=<f,\varphi_{j,k}>. \tag{2}$$

设 $C^f_{j,k}=\{C^{(1)}_{j,k},C^{(2)}_{j,k},C^{(3)}_{j,k}\}$，定义一个收缩算法对小波系数进行双曲线收缩处理，得

$$\overline{C}^{(i)}_{j,k}=\begin{cases}\mathrm{sign}\cdot[\sqrt{(C^{(i)}_{j,k})^2-\lambda^2}], & |C^{(i)}_{j,k}|\ge\lambda\\ 0, & |C^{(i)}_{j,k}|<\lambda\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\mathrm{sign}=\begin{cases}1, & C^{(i)}_{j,k}>\lambda\\ -1, & C^{(i)}_{j,k}<-\lambda\end{cases}$

$i=1,2,3$. 式(3)中，收缩因子 λ 的取值取决于压缩比和重建后图像的质量. 根据系数 $\overline{C}^f_{j,k}$ 重建图像

$$\overline{f}_m=\sum_{\substack{k\in Z^m\\ i\in Z^n}}\overline{C}^f_{j,k}\Psi_{i,k}+\sum_{i\in Z^n}d_{i,k}\varphi_{i,k}. \tag{4}$$

2 球坐标的小波收缩

由于在线性小波变换后，3 个高频(水平分量、垂直分量和对角分量)之间还存在一定的相关性，把它们变换到球坐标后，在球坐标中可进一步消除相关性. J. Skowronki 曾把球坐标变换引入线性小波变换并用于子带编码，提出了球坐标子带(SSB)分解方法，进一步提高了压缩比[2]. J. Skowronki 在文中虽然也指出球坐标变换后，当 r 分量很小时，对 r、θ、ψ 分量进行量化是不必要的. 但他并没有对 r 分量的取舍提出具体的判定标准.

本文把 Antonin Chamboll 等人的小波收缩的思想引入到 J. Skowronki 的球坐标变换中，对 J. Skowronki 基于球坐标的小波变换提出具体的收缩判据. 并且用较优的双曲线收缩方法取代软阈值或硬阈值收缩方法.

算法如下：令小波变换后的高频分量为 X、Y、Z，在球坐标变换下为

$$\begin{cases}r=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\\ \theta=tg^{-1}(Y/X),\\ \varphi=\cos^{-1}(Z/\sqrt{X^2+Y^2-Z^2}).\end{cases} \tag{5}$$

在球坐标系中，对 r 分量进行小波收缩，其收缩因子 λ_r. 对于不同的尺度 k，选择收缩因子 λ_r 应不同. 因为低频部分的小波系数所含的噪声相对信号来说要少些，收缩因子 λ_r 应选小些. 在这里，不同的尺度中乘上一比例因子 $1/\sqrt{K-k+1}$，设小波分解为 K 层. 如三层分解时，从低频尺度到高频尺度比例为：$1/\sqrt{3}:1/\sqrt{2}:1$，此时双曲线收缩处理为

$$\overline{r}_{j,k}=\begin{cases}\sqrt{(r_{j,k})^2-\lambda_r^2}, & r_{j,k}\ge\lambda_r\\ 0, & r_{j,k}<\lambda_r\end{cases} \tag{6}$$

这里，径向分量 $r_{j,k}>0$，所以不必考虑符号. 收缩只需对幅度进行. 因为在球坐标变换中，小的角度并不对应小的信号. 此时，r 分量为零时对应的 θ 和 ψ 两分量也设为 0. 在球坐标变换小波收缩后，对球坐标下的系数矩阵 $\begin{Bmatrix}LL & \theta\\ \psi & r\end{Bmatrix}$ 用嵌入式零树小波(EZT)法进行图像压缩编码.

从上述原理可知：(1) 如果 r 的值较小时，对 θ 和 ψ 系数的进行编码就不必要，可把 θ 和 ψ 系数变成零. (2) 如果 r 的值较大时，r、θ 和 ψ 系数不是相互独立的，必须同时量化和编码.

3 实验分析

采用本文的算法对 512×512 的 Lena 图像进行压缩，用重建图像与原图像的失真率和图像的压缩

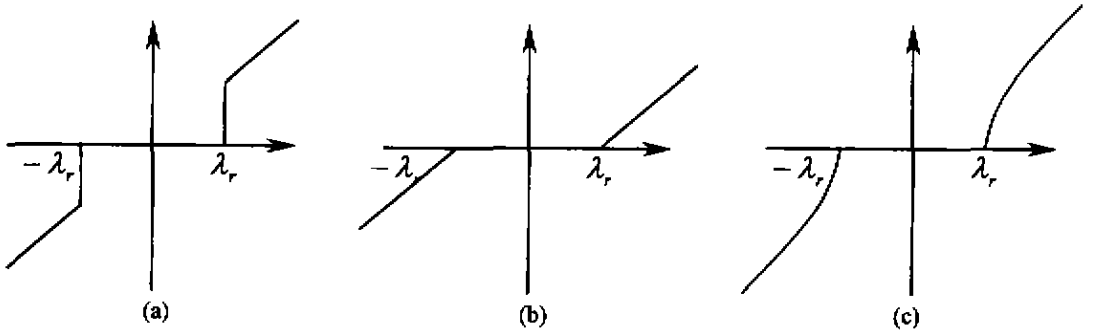

图 1 输出小波系数与输入小波系数关系
(a) 硬阈值，(b) 软阈值，(c) 双曲线收缩
Fig. 1 The relation between the output and input coefficients
(a) hard-thresholding, (b) soft-thresholding, (c) hyperbolic shrinkage

比来评价本算法的效果.

实验中，用 Daubechies 正交小波对 512×512 的 Lena 图像进行小波分解. 根据 JPEG 标准，我们用球坐标子带(SSB)分解和嵌入式零树小波(EZT)法及本文介绍的基于球坐标的小波收缩压缩编码 3 种方法分别对 Lena 图像进行编码，比较 3 种方法压缩后恢复图像峰值信噪比和比特率来衡量图像的质量(参见图 2 和表 1).

实验结果表明：用本文的基于球坐标的小波收缩图像压缩编码算法比 JPEG 标准和球坐标子带(SSB)分解在压缩比方面都有明显的改善，恢复图像质量优于 JPEG 标准，与球坐标子带(SSB)分解相当. 同时，实验中还用本文算法与直接用小波收缩图像压缩算法作了比较，表明本文的算法可获得比较好的效果(参见表 2).

在小波系数的收缩中，使用双曲线收缩的效果比软阈值或硬阈值都好. 输出小波系数与输入小波系数关系如图 1 所示，在硬阈值处理中，图像中会出现一些人为的"噪声点". 而软阈值的连续性较好，数据处理容易，但会损失一些有用的高频信息[5]，参见图 3.

表 1　用 JPEG 和 SSB 及球坐标的小波收缩图像压缩编码后的 PSNR 和压缩比

Table 1 Lena's PSNR and rate after compression using JPEG, SSB and the proposed method

	PSNR(dB)	Rate (b/p)
JPEG	28.19	0.23
SSB	30.28	0.22
球坐标的小波收缩	30.36	0.20

表 2　用本文的算法和直接用小波收缩图像压缩编码后的 PSNR 和压缩比

Table 2 Lena's PSNR and rate after compression using the proposed method and wavelet shrinkage image compression method

	PSNR(dB)	Rate(b/p)
小波收缩	29.53	0.22
球坐标的小波收缩	30.26	0.20

(a)　(b)　(c)

图 2　压缩后 Lena 图像质量比较

(a) JPEG，(b)SSB 编码，(c)球坐标非线性小波收缩编码

Fig. 2　Comparison of the quality of the compressed Lena image

(a) JPEG, (b) SSB coding, (c) the nonlinear wavelet shrinkage coding scheme based on spherical coodinates

(a)　(b)　(c)

图 3　用不同的小波收缩方法的 Lena 图像

(a)硬阈值，(b)软阈值，(c)双曲线收缩

Fig. 3　Lena image after various wavelet shrinkage

(a) hard-thresholding, (b) soft-thresholding, (c) hyperbolic shrinkage

因此,我们在本文中采用了双曲线收缩这种折衷方案,其结果是既保留较大的小波系数,又能使输出小波系数与输入小波系数关系进行平滑的转换.在实验中,我们对利用双曲线收缩方法分别与基于球坐标变换的小波收缩图像压缩编码算法和直接用小波收缩图像压缩编码算法作了比较.

由于球坐标变换过程,减小了同层小波系数之间的相关性,可以提高图像的压缩比.同时,采用了较优的小波收缩方法,提高了重建图像的信噪比.

4 结论

本文介绍的基于球坐标变换的小波收缩图像压缩编码算法是利用了同层小波系数之间的相关性,进一步压缩图像数据.结果表明:本算法取得了较好的效果.进一步选择较优的小波收缩函数,可以得到更好的效果.

REFERENCES

[1]Antonin Chambolle, Ronald A D, Nam-yong Lee, *et al*. Nonlinear wavelet image processing: variatioal problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage. *IEEE Trans. Image Processing*, 1998, **7**(3): 319—335

[2]Skowronski J. A nonlinear transform for image coding. *Signal Processing*, 1999, **77**: 289—307

[3]Swaszek P F. Uniform spherical coordinate quantization of spherically symmetric source. *IEEE Trans. Commun.*, 1985, **6**(33): 518—521

[4]Donoho D, Johnstone I M, Kerkyacharian G, *et al*. Wavelet shrinkage: asymptopia. *J. R. Stat. Soc. B*, 1995, **57**: 301—369

[5]Dong Wei, Burrus C S. Optimal wavelet thresholding for various coding schemes. In: *Proceeding of IEEE International Conference on Image Processing, Washington, DC, Oct.*, 1995: 610—613