

在变换域中用 HMT 图像降噪的研究*

林哲民 张立明 丁佩律

(复旦大学电子工程系智能与图像实验室, 上海, 200433)

摘要 研究了 HMT(隐马尔科夫树)在变换域中进行图像降噪的应用,就不同复杂程度的图像、不同类型噪声、及用不同的变换域与传统方法进行比较,得到结论:变换域中的方法比在非变换域中的传统方法优越,HMT 在小波域和 DCT 域有着近似的效果,在高斯白噪声下 HMT 方法是最有效的,在相关噪声下,降噪效果与图像纹理的复杂度及噪声的强度有关。

关键词 降噪,隐马尔科夫树(HMT),小波变换,余弦变换(DCT)。

IMAGE DENOISING USING HMT METHOD IN TRANSFORM DOMAIN*

LIN Zhe-Min ZHANG Li-Ming DING Pei-Lu

(Department of Electronics and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract The HMT method applied in natural image denoising was thoroughly studied. The HMT method was compared with others under different conditions, such as different complexity of the texture, different-type noise and different transform domain. Some key conclusions were obtained. First, the method in transform domain is better than the traditional one which is not in transform domain. Second, the performance of HMT in the DCT domain is similar to that in the wavelet domain. Third, when the noise is white, result of HMT is excellent. However, when the noise is related to the image itself, the performance is determined by the complexity of the texture, as well as the noise density.

Key words denoising, HMT, wavelet transform, DCT.

引言

由于成像系统的不完善和环境的影响,数字图像总是混有一定的噪声,可以表示为

$$g = s + f(s) \cdot n_1 + n_2 \quad (1)$$

其中 g 表示实际得到的图像, s 表示理想中没有受到噪声污染的图像, $f(s) \cdot n_1$ 是与图像有关的短时噪声, n_1 是具有零均值的高斯分布,而 n_2 表示均值为零的热噪声(白噪声)^[1]。

传统的图像滤波有维纳滤波、中值滤波、加权中值滤波等^[2],但这些方法往往使图像中物体边缘模糊。最近有报导^[3],在小波域利用小波的优秀特性进行有效地降噪,并且能够较好地保持图像的细节。例如,Donoho 等提出的小波阈值或者称之为小波收缩^[4]的方法,其具体算法为

$$\hat{c} = (c - t)_+, \quad (2)$$

其中 c 为小波系数, t 是所选的阈值, $(a)_+ = \max\{0, a\}$ 。

S. G. Chang^[5]提出利用图像小波系数概率分布是广义高斯分布(GGD),选取次优软阈值 σ_x^2/σ_x 进行收缩,其中 σ_x^2 为某一子带小波系数的方差,但是这些方法并没有充分地利用图像小波系数之间的相关特性,在小波域用 HMT 模型来描述图像,这种模型很好地利用了图像小波系数的相关性和其它特性,对图像采用这种模型进行 Bayesia 估计进行去噪可以获得很好的效果^[6,7]。

本文采用 HMT 以及简化的 HMT(uHMT)方法,在小波域和 DCT 域内进行图像降噪,发现 HMT 能够很好地去除白噪声和相关性噪声,并在

* 国家自然科学基金(编号 39870194)资助项目
稿件收到日期 2001-02-26,修改稿收到日期 2001-06-19

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 39870194)

Received 2001-02-26, revised 2001-06-19

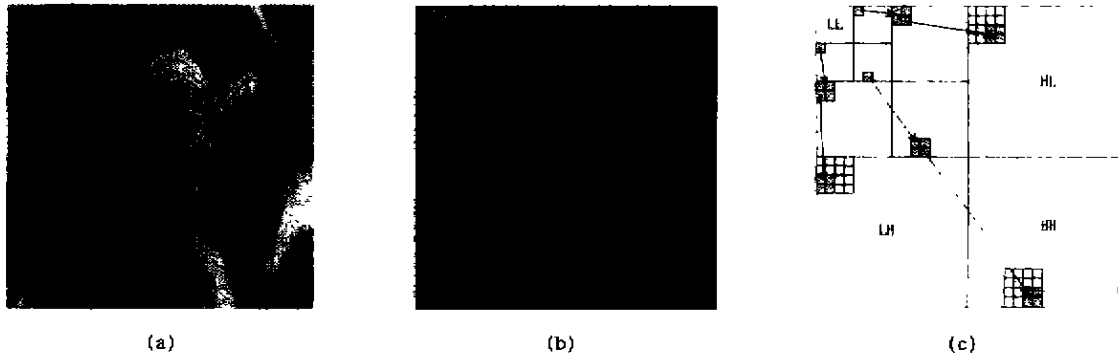


图 1 小波变换二叉树
Fig. 1 The quadtree in wavelet domain

DCT 域中有同样的优良效果。

1 小波变换和 DCT 域内的二叉树

1.1 小波变换^[8]

二进小波函数被定义为在空间上的母小波函数 $\psi(x)$ 的二进伸缩与平移, 即小波基函数是 $\psi_{j,k} = \psi(2^{-j}x - k)$, j 是尺度, k 是平移。图像的小波变换就是将图像投影到不同尺度和不同位移的小波基上, 对小波基的投影可以化为不同尺度上的高通和低通滤波。

小波分解的快速算法可以用塔形算法实现, 二维小波变换可以分别对行和列进行一维小波变换得到。图 1(b)所示是 Lena 图像(图 1(a))进行 $j=3$ 分辨率上的小波变换, (c)表示各种不同子带小波系数的排列, L、H 分别表示低通、高通滤波。除了最大尺度和最小尺度, 在这种组织下, 每个小波系数有 4 个子节点, 有一个父节点, 如图 1(c)中阴影和箭头指向阴影部分所示。

1.2 DCT 变换及二叉树结构

DCT 变换因为其变换矩阵的基向量很近似于 Toplits 矩阵的特征向量, 而 Toplits 矩阵体现了人类语言及图像信号的相关特性。因此, DCT 变换通常被认为对语音和图像信号进行变换的准最佳变换, 其变换特性接近于 KLT^[9]。在静态、动态图像压缩标准中都采用了 DCT 变换, 块大小为 8×8 。可以看到 8×8 的 DCT 变换可以看成图像在 64 个子带上的分解, 并且可以将 8×8 的 DCT 开看成深度为 3 的二叉树, 如图 2(a)所示。将每个块的系数重新组合, 可以形成图 1(c)的二叉树结构^[10]。图 2(b)是 Lena 图像 DCT 系数排列成深度为 3 的二叉树的结构。如果要得到更深的二叉树, 可以对整幅图像的 LL 部分再进行 DCT 变换, 然后再将系数重组, 这

样就可以得到更深的树结构。可看到图 1(b)与图 2(b)类似, 其理由很简单: 图像经过分块, 作 DCT 变换时, 实际上就是一种加窗的频率变换, 并且每个系数对应的基是正交的, 系数重新排列类似于多分辨率结构。

为了便于分析, 后文中使用的 HMT 模型以小波二叉树为例, DCT 二叉树情况与小波二叉树情况类似。

2 HMT 模型及其计算^[6~7]

2.1 HMT 模型

由于图像小波系数的分布式满足广义高斯分布 (GGD), 因此用一个高斯函数近似不能够较好地反映这一特性, 而用多个高斯函数混合可以较好地逼近这个分布。本文在用 HMT 降噪时选取 2 个高斯分布的模型混合而成, 它们都有 0 均值, 其方差分别是 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ 。在二叉树结构中, 由于存在一定的相似性, 幅度大(小)的小波系数其子节点的小波系数为大(小)的可能性较大。采用隐状态来表示该系数是大还是小, 并且认为这些状态从父节点变化到子节点不是独立的, 它满足 Markov 过程。

假设每个小波系数 c_i 都有一个无法观察到的

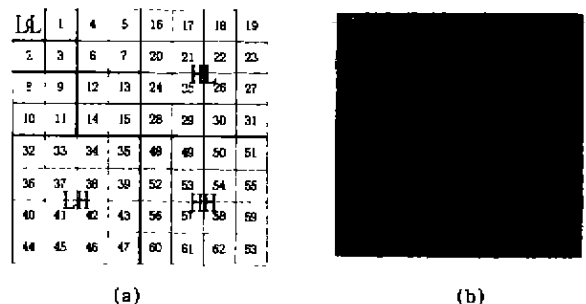


图 2 DCT 域二叉树
Fig. 2 The quadtree in DCT domain

状态 $S_i = \{S, L\}$, S_i 表示两个高斯混合源中是那个高斯源产生 c_i , 其中 S 表示方差为 σ_s^2 的高斯源, 而 L 表示方差为 σ_l^2 的高斯源. 小波系数的概率密度函数可表示为

$$f(c_i) = P_i^S g(c_i; 0, \sigma_s^2) + P_i^L g(c_i; 0, \sigma_l^2), \quad (3)$$

其中 $g(x; \mu, \sigma^2)$ 表示均值为 μ , 方差为 σ^2 的高斯分布, P_i^S 和 P_i^L 分别表示 c_i 属于 S 和 L 的概率, 并且满足 $P_i^S + P_i^L = 1$.

在四叉树结构中, 小波系数是大或小的可能性同父节点有较大的关系, HMT 通过系数中隐状态之间的相关性而获取了系数之间的相关性, 假设父节点 i 到子节点的状态跳转可以用状态变换矩阵 A_i 表示为

$$A_i = \begin{bmatrix} P_i^{S \rightarrow S} & P_i^{S \rightarrow L} \\ P_i^{L \rightarrow S} & P_i^{L \rightarrow L} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 $P_i^{S \rightarrow S} + P_i^{S \rightarrow L} = 1$, $P_i^{L \rightarrow S} + P_i^{L \rightarrow L} = 1$. 可以看到, HMT 模型中在每个节点 i 上有这些参数: 混合高斯概率密度函数中的两个方差 σ_s^2 和 σ_l^2 , 状态传输矩阵 A_i . 在每一棵四叉树的根节点上还有参数 P_i^S 来指明节点是大状态的概率. 一般地说, 在每个节点上的参数可能是不一样的, 但此时模型的参数的个数将大大地超过小波系数的个数, 从而使得参数无法估计. 因此, 要对这些节点进行捆绑, 即对每个子带中的节点进行分类. 一个简单的方法是认为同一个子带中的各个节点上的参数是相同的, 将所有的参数合起来用 Θ 表示, 而对图像的所有小波系数用 W 表示, 图像小波系数的联合概率密度函数用 $f(W|\Theta)$ 表示.

2.2 HMT 参数估计

HMT 实际上是一个树状结构的隐 Markov 模型, 所以对于隐 Markov 模型的 3 种标准算法(似然函数计算、状态路径的估计和模型训练)对 HMT 模型同样适用. 在一般情况下, 并不知道图像 HMT 模型中的具体参数, 因此首先要根据观察到的小波系数 W , 训练出模型的参数. 但是, 由于观察到的数据是不全面的, 即只得到小波系数值而并没有得到各节点的状态(这些状态是隐性的), 所以直接用最大似然法进行参数估计是很困难的. 而对于这类观察数据不全的问题, EM 算法是十分有效的. 其主要步骤为: (1) 选择一个合理的初始化参数值 Θ^0 ; (2) 也就是 E 步骤, 使用 upward-downward 快速算法计算 HMT 树的隐状态的联合后验概率密度 $p(S|W, \Theta^j)$, 计算 $E\{\ln f(W, S|\Theta^j)|W, \Theta^j\}$; (3) 即 M 步

骤, 求出 $\Theta^{j+1} = \arg \max_{\Theta} E\{\ln f(W, S|\Theta)|W, \Theta^j\}$;

(4) 如果 Θ^j 和 Θ^{j+1} 满足收敛条件, 迭代结束, 否则重复步骤(2)、(3). 详细计算可以参阅参考文献[7]和[11].

2.3 HMT 模型中参数的简化

首先, 将系数进行捆绑, 认为同一层里所有子带中各个节点的参数相同. 因为图像的小波系数随着尺度越精细, 小波系数的幅度将按照指数的方式进行衰减并且一致性增加, 文献[6]提出一种简化的 HMT 模型(uHMT). 对于自然图像, 如果将它们归一到 0~1 后, 它们的 HMT 模型的参数差别不大. 因此可以采用同样的参数值, 其相应的模型称为 uHMT. 在后文可以看到, 采用简化后的统一模型, 在图像降噪方面仍然能够得到很好的效果.

2.4 应用 HMT 模型进行 Bayesian 估计

用 HMT 模型对图像系数进行 Bayesian 估计, 首先要得到模型的参数, 可以通过对当前受到噪声污染的图像进行训练, 或者用 uHMT 中的统一参数, 或者采用同种类型图像的参数. 其次, 假设图像受到的噪声是高斯白噪声(尽管这个假设过于苛刻, 但是由此得到的结论对于相关噪声也是十分有效), 由于经过正交变换后, 这些系数受到噪声干扰是互不相关、同分布、方差等于噪声方差的高斯噪声, 受到噪声干扰的小波系数可写为

$$y_i = c_i + n_i. \quad (5)$$

用 Bayesian 估计方法对真实图像小波系数进行估计可使用式(6):

$$\hat{c}_i = \sum_{q \in \{S, L\}} p(S_i = q|Y, \Theta) \frac{\sigma_{q,i}^2}{\sigma_n^2 + \sigma_{q,i}^2} y_i, \quad (6)$$

其中噪声方差的估计采用 $\sigma_n = MAD/0.6745$, MAD 是最高频率子带 HH 子带小波系数幅度的中值^[4]. 后验概率 $p(S_i = q|Y, \Theta)$ 可以用 upward-downward 快速算法计算^[7].

在 HMT 模型中, 小波系数看成是多个高斯源混合而成, 因此受到高斯白噪声污染图像的参数中只是高斯源的方差加上噪声的方差, 而其它参数不变. 即, 用受到噪声污染图像训练得到的高斯源的方差 $r_{q,i}^2$ 满足

$$r_{q,i}^2 = \sigma_n^2 + \sigma_{q,i}^2, \quad (7)$$

所以 $\sigma_{q,i}^2 = (r_{q,i}^2 - \sigma_n^2)_+$.

3 模拟仿真

用计算机进行模拟时, 对两种噪声进行模拟, 第

一种是0均值、方差 σ 的高斯白噪声,第二种是相关性噪声,受污染图像 $f=s+s^*n_1$,其中 n_1 是0均值、方差 σ 的高斯白噪声。

对LENA(纹理简单)和APE(纹理复杂)图像分别采用维纳滤波器(winer)、中值滤波器(med)、加权中值滤波器(cwm)、阈值方法(shrink)、自适应阈值方法(ashrink)、HMT和uHMT方法进行降噪。其中winer用的窗口大小是5,med用的窗口是5,cwm窗口为5、中心加权为7。通过分析表1和2中的数值,可以得到以下结论:(1)在变换域(小波域、DCT域)内进行图像降噪要比传统的方法有着更好的性能,这是因为经过变换,图像在变换域中系数是稀疏的,图像的能量主要集中在少数系数上,而噪声在变换域中的能量分布在较广的范围,因此采用变换域进行降噪要比不用变换域的降噪方法性能

好。(2)小波域中的二叉树和DCT域中的二叉树有着类似的性能,因此在小波域中的降噪方法可以移植到DCT域中,并且有相近的性能。(3)由于HMT充分利用了图像系数二叉树中的自相似性,因此当图像受到白噪声污染时,HMT方法的效果是最好的。当图像受到与图像本身相关的噪声污染时,采用HMT方法,由于这种噪声使得训练出来的模型参数与真实的有些偏差,这种偏差与图像纹理的复杂程度有关,纹理越复杂偏差也就越大,HMT方法的性能下降的就越多;并且当相关噪声的强度愈大时,这种偏差也就愈大,可能超过uHMT与真实模型间偏差,所以可以从表1和2看到,当相关性噪声大到一定程度时uHMT要比HMT好,表中PSNRO是没有滤波时的信噪比,粗体字表示最佳信噪比。

表1 测试图像为512×512的LENA图片
Table 1 The tested image is LENA of 512×512

Method	高斯白噪声 σ			相关性噪声 σ		
	0.05	0.1	0.2	0.1	0.2	0.4
PSNRO	26.022	20.001	15.981	25.876	19.856	13.835
方法传统	winer	31.196	28.260	24.081	30.896	20.411
	med	28.962	27.162	23.795	28.957	23.550
	cwm	29.641	24.859	19.432	29.741	19.344
	shrink	31.614	28.247	25.285	29.530	23.981
小波域	ashrink	30.328	27.350	24.657	31.007	24.910
	HMT	32.062	28.645	25.666	29.621	23.645
	uHMT	31.149	27.798	24.888	30.796	24.794
DCT域	shrink	31.683	28.331	25.056	29.992	18.735
	ashrink	30.630	27.252	24.165	31.023	24.533
	HMT	32.328	28.868	25.485	29.778	23.954
	uHMT	31.402	27.636	24.335	30.977	24.474

表2 测试图像为512×512的APE图片
Table 2 The tested image is APE of 512×512

Method	高斯白噪声 σ			相关性噪声 σ		
	0.05	0.1	0.2	0.1	0.2	0.4
PSNRC	26.021	20.001	13.980	24.442	18.421	12.400
方法传统	winer	25.119	23.883	21.672	24.839	19.449
	med	22.731	22.232	20.873	22.638	20.197
	cwm	26.659	22.287	18.876	26.015	17.630
	shrink	28.130	24.606	21.694	27.145	18.835
小波域	ashrink	26.763	23.635	20.903	26.214	20.723
	HMT	29.756	25.907	22.517	28.139	18.531
	uHMT	28.062	24.009	21.211	27.377	20.921
DCT域	shrink	30.044	25.968	22.234	28.421	19.608
	ashrink	29.180	25.465	20.471	28.471	24.575
	HMT	30.363	26.346	22.801	28.722	24.057
	uHMT	28.712	24.160	21.080	27.298	20.710

4 结论与展望

根据 HMT 算法实现和具体实验数据的分析,可以得出结论:HMT 能够较好的去除图像的噪声,不管是用小波域还是用在 DCT 域,且不仅仅在图像降噪方面,用 HMT 对纹理图像进行分割,也能得到好结果.

REFERENCES

- [1]Boie Robert A, Cox Ingemar J. An analysis of camera noise. *IEEE Pat. Anal. Mach. Intell.*, 1992, **14**(6): 671—674
- [2]Tekalp A Murat. *Digital Video Processing*. Upper Saddle River NT:Prentice Hall Inc., 1996.
- [3]Chipman H A, Nowak E D, McCulloch R E. Adaptive Bayesian wavelet shrinkage. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 1997, **92**: 1413—1421
- [4]Donoho D L. Denoising by soft-thresholding. *IEEE Trans. IT.*, 1995, **41**(3): 613—627
- [5]Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. *IEEE Trans. IP.*, 2000, **9**(9): 1532—1546
- [6]Romberg J K, Richard H C, Baranuik G. Bayesian tree-structured image modeling using wavelet-domain hidden Markov models. <http://www.dsp.rice.edu/publications/19>.
- [7]Crouse M S, Nowak R D, Baranuik R G. Wavelet based statistical signal processing using hidden Markov models. <http://www.dsp.rice.edu/publications/>
- [8]Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Pat. Anal. Mach. Intell.*, 1989, **11**: 674—693
- [9]Wu Yue Nang. *The Theory and Application for Data Compression*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry(吴乐楠. *数据压缩原理与应用*. 北京:电子工业出版社), 1995
- [10]Xiong Z, Ramchandram K, Orchard M T, et al. A comparative study of DCT-and wavelet based image coding. *IEEE Trans. CAS for Video Technology*, 1999, **9**(5): 692—695
- [11]Laferte Jean-Marc, Perez Patrick, Heitz Fabrice. Discrete Markov image modeling and inference on the quadtree. *IEEE Trans. IP.*, 2000, **9**(3): 390—404