

# 多层媒质中三维平面辐射结构的二维小波分析\*

陈 挺 李 英

(上海大学通信工程系, 上海, 201800)

**摘要** 使用小波函数对多层介质的三维平面金属微带结构(具有水平方向和垂直方向电流)进行分析,即用二维小波函数模拟未知电流密度,根据不同方向金属板尺度的差异,选择不同分辨尺度的二维小波函数,并与传统矩量法比较.

**关键词** 多分辨分析, 尺度和小波函数, 混合势方程(MPIE).

## 2-D WAVELET ANALYSIS OF 3-D PLANAR RADIATING STRUCTURES IN STRATIFIED MEDIA\*

CHEN Ting LI Ying

(Department of Communication Engineering, Shanghai University, Shanghai 201800, China)

**Abstract** The wavelet expansion method was used to analyze three-dimension (3-D) planar problem. The structure is a combination of planar sheets of current oriented along normal and transverse directions in a stratified medium. The surface integral equation was solved through a Galerkin's method with unknown current expanded in terms of two-dimension orthogonal wavelets. The different resolution levels of wavelet were chosen in accordance with the different lengths of the conducting plates. Finally, a comparison was presented between the wavelet expansion method and conventional method of moments to judge their efficiency.

**Key words** multiresolution analysis, scaling function and wavelet, MPIE.

### 引言

通常使用积分方程模拟传统的微带天线,如一般的二维(2-D)平面结构,但实际应用中,垂直电流结构经常出现,象屏蔽微带子阵列天线,垂直金属板(微带)被用于抑制派生的表面波模.要严格分析这种结构必须考虑三维平面金属体(包括垂直金属).这里积分方程当然还有用,但积分比二维情形复杂得多.关于这方向问题,一些文献已做过分析,如用 Spectral Domain Approach(SDA)<sup>[1]</sup>方法分析微带空气桥;用空腔模方法分析带有一个中心圆柱导体的印刷圆板天线<sup>[2]</sup>;时域有限差分法分析有垂直电流的微带结构<sup>[3]</sup>,还有混合势积分方程(MPIE)法等等.但这些方法都使用传统的基函数(Rooftop函数,脉冲函数,三角形函数等等).本文使用二维小波函数作为基函数来模拟三维平面辐射结构的未知电

流密度.小波函数逼近是这些年来最活跃函数逼近方法之一,它广泛应用于多种学科.如信号处理、图像处理、量子场论、地震勘探、天体识别等等.近几年也用于解决电磁场散射问题<sup>[4,5]</sup>,但仅限于一些简单模型,主要原因是小波函数模拟一个未知函数,比传统的基函数的模拟(直接替代未知函数)复杂,要考虑选择什么小波函数及多大的分辨尺度、其正交性如何、有几阶消失矩、是否具有紧支撑等等.然而,由于其变换具有傅里叶变换不具有的优点,即能够提取局部时间的频率信息<sup>[7]</sup>,同时具有紧支撑性、零消失矩等特点,使得通过小波变换后一般得到一个稀疏程度非常高的矩阵,因此,进一步研究小波函数在这领域应用非常必要.

### 1 小波理论

先介绍多分辨分析的概念.空间  $L^2(\mathbb{R})$  中一列

\* 国家自然科学基金(69571014)和东南大学国家毫米波重点实验室基金资助项目

稿件收到日期 2000-01-24, 修改稿收到日期 2000-03-20

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China and State Key Laboratory of Millimeter Waves of Southeast University.

Received 2000-01-24, revised 2000-03-20

闭子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 称为 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨分析或逼近, 如果下面诸条件满足: 单调性、逼近性、伸缩性、平移不变性, 同时是 Riesz 基, 存在  $g \in V_0$  使得 $\{g(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 构成  $V_0$  的 Riesz 基.

由上面条件知道, 存在尺度函数  $\varphi(x) \in V_0$ , 使 $\{\varphi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 构成  $V_0$  的规范正交基, 它的伸缩和平移是

$$\varphi_{k,j}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad (1)$$

其序列 $\{\varphi_{k,j}(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 构成规范正交系. 利用空间正交分解的技巧, 不难得到  $L^2$  中的小波正交基. 由于

$$V_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1} = V_{m-2} \oplus W_{m-2} = \dots, \quad (2)$$

式(2)中  $W_{m-1}$  是空间  $V_m$  中  $V_{m-1}$  的正交补空间, 也就是小波空间, 因此存在一个函数  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 即小波函数, 它的伸缩和平移.

$$\psi_{m,n} = 2^{m/2} \psi(2^m x - n) \quad (3)$$

构成  $W_m$  空间的一个正交基(小波基)<sup>[7]</sup>. 任何一个函数  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 它的逼近值可通过在  $V_m$  中的算符  $A_m$  获得, 即

$$f(x) \approx A_m f(x) = \sum_n \langle f, \varphi_{m,n} \rangle \varphi_{m,n}(x), \quad (4)$$

式(4)中  $A_m$  是把函数映射在  $V_m$  中的正交算符,  $\langle f, \varphi_{m,n} \rangle$  是  $f(x)$  与  $\varphi_{m,n}(x)$  的内积,  $A_m f(x)$  为函数  $f(x)$  在分辨率  $2^m$  的逼近. 根据式(2)和(4)可得

$$\begin{aligned} f(x) \approx A_m f(x) &= A_m f(x) + \sum_{m=m_1}^{m-1} B_m f(x) \\ &= A_m f(x) + \sum_{m=m_1}^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{m,n} \psi_{m,n}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)中  $m = m_1 - 1$ ,  $b_{m,n}$  是  $f(x)$  与  $\psi_{m,n}$  的内积. 如果  $m_1 = -\infty$ , 式(5)中第一项变成零, 此时  $f(x)$  可认为是纯小波逼近.

值得指出的是, 由于尺度函数和小波函数是定义在实轴上的, 如果用这些函数直接去表示积分函

数中的一个未知函数(如电流密度), 它们可能有部分在积分范围之外, 为解决这个困难, 我们在积分边界上用周期尺度函数和周期小波函数, 即做周期延拓

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{p,k} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{k,p}(x+l), \\ \mathcal{P}_{p,k} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{k,p}(x+l) \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $p$  表示周期性. 关于这些, 文献[6]已作详细的论述.

二维多分辨分析与一维情形相似, 这时  $L^2(\mathbb{R})$  中的一串闭子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 变为张量积空间 $\{V_j^2\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , 而  $V_j^2 = V_j \oplus V_j$  构成  $L^2(\mathbb{R}^2)$  的一个多分辨分析, 当且仅当 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是  $L^2(\mathbb{R})$  的一个多分辨分析. 因此, 二维多分辨分析 $\{V_j^2\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 的尺度函数<sup>[7]</sup>

$$\mathcal{Q}(x, y) = \mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}(y), \quad (7)$$

对每一个  $j \in \mathbb{Z}$ , 函数 $\{\varphi_{k_1, k_2}(x, y) = \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(y) \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ 构成  $V_j^2$  的规范正交基, 其中  $\varphi$  是一维多分辨分析 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 的实值尺度函数. 而小波空间为  $W_j^2$ ,  $V_j^2 = W_{j+1}^2 \oplus W_{j+1}^2$ , 有 3 个基本小波函数  $\psi, \psi^2, \psi^3$ , 即

$$\begin{cases} \psi^1(x, y) = \mathcal{Q}(x) \psi(y) \\ \psi^2(x, y) = \psi(x) \mathcal{Q}(y), \\ \psi^3(x, y) = \psi(x) \psi(y) \end{cases} \quad (8)$$

对任何  $j \in \mathbb{Z}$ , 与一维相似, 式(8)中小波函数的伸缩和平移构成空间  $W_j^2$  规范正交基.

任何一个二维函数, 如电流密度函数  $f(x, y)$ , 可展开成

$$\begin{aligned} f(x, y) &= A J f(x, y) = A_{J_1} f \\ &+ D_{J_1}^1 f + D_{J_1}^2 f + D_{J_1}^3 f, \end{aligned} \quad (9)$$

其中第 1 项是低通滤波部分, 后 3 项是带通滤波部分. 而

$$\begin{aligned} A_{J_1} f &= \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} c_{J_1-1, km} \mathcal{Q}_{J_1-1, km}, \\ D_{J_1}^{\xi} f &= \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} d_{J_1-1, km}^{\xi} \psi_{J_1-1, km}, \end{aligned} \quad (10)$$

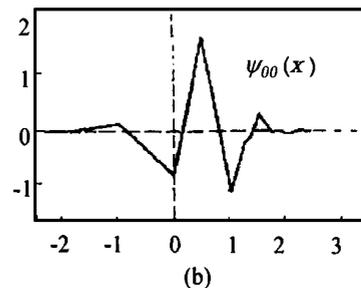
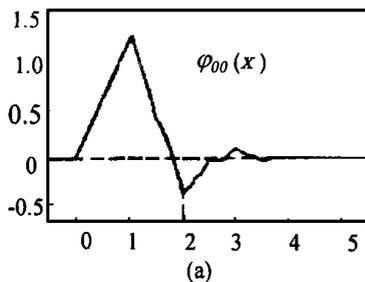


图 1 Daubechies 尺度函数和小波函数  
(a) 尺度函数, (b) 小波函数

Fig. 1 Daubechies wavelet ( $N=3$ ) and its scaling function

式中  $\xi = 1, 2, 3$ , 对式(9)继续展开直至  $J_1 - J_2$ , 有

$$f(x, y) = A J f(x, y) + \sum_{j=J_2}^{J_1-1} D_j^\xi f(x, y) \quad (11)$$

如果基函数是正交和紧支撑的, 则 Galerkin 方法是零残留方法, 因此在 Galerkin 方法中选用正交基函数计算结果将更精确、收敛更快。Daubechies 是被研究较成熟的小波之一, 也是有限的支集紧的正交小波, 这里取它作为函数来表示未知的电流密度。选  $N = 3$ , 其尺度函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t) = & 0.470467078\mathcal{Q}(2t) + 1.141116916\mathcal{Q}(2t-1) + \\ & 0.6503650006\mathcal{Q}(2t-2) - 0.1909344156\mathcal{Q}(2t-3) - \\ & 0.1208322081\mathcal{Q}(2t-4) + 0.04981749976\mathcal{Q}(2t-5) \end{aligned} \quad (12)$$

其支撑  $\text{Supp}\mathcal{Q} = [0, 2, N-1]$ , 而  $\text{Supp}\psi = [-(N-1), N]$ , Daubechies 小波随  $N$  的增加, 光滑度增加, 但支集长度变长。一般根据不同实例选取不同  $N$  的 Daubechies 小波, 不足之处是它没有具体的显性形式, 图 1 显示实例( $N = 3$ )。

## 1 混合势积分方程(MPIE)

良导体表面  $S$  上的电场边界条件是

$$-n \times E^{sc}(r) = n \times E^{inc}(r), \quad (13)$$

式(13)中  $n$  是垂直导体表面的单位矢量,  $E^{inc}$  和  $E^{sc}$  分别是外加电场和散射电场。MPIE 为

$$-E^{sc}(r) = j\omega A(r) + \nabla \mathcal{Q}(r), \quad (14)$$

式(14)中  $A(r) = \int_S G^A(r, r') \cdot J(r') ds$ ,  $\mathcal{Q}(r) = \int_S G^\varphi(r, r') q(r') ds$ ,  $G^A$  和  $G^\varphi$  分别是对应于矢量势  $A$  和标量  $\varphi$  的矢量和标量格林函数, 具体形式见文献[8]。表面电流和电荷的关系是

$$\nabla \cdot J(r) = -j\omega q(r) \quad (15)$$

根据式(13)、(14)和(15)可得到

$$\begin{aligned} n \times \left[ j\omega \int_S G^A(r, r') \cdot J(r') ds - \right. \\ \left. \nabla \int_S G^\varphi(r, r') \frac{1}{j\omega} \nabla \cdot J(r') ds \right] = n \times E^{inc}, \end{aligned} \quad (16)$$

格林函数谱域形式变换成空域形式是奇点的积分, 我们使用文献[9]的方法选择积分路径, 在奇点使用留数定理处理。

## 3 矩阵方程

把式(10)、(11)代入方程(16), 并利用 Galerkin 方法, 方程两边分别乘以  $\Phi_{2, n_1, n_2}$  和  $\Psi_{j, k_1, k_2}^\xi$  得以以下两个等式

$$\begin{aligned} \sum_{km} c_{j, 2, km} \left\{ j\omega \int_S \Phi_{2, n_1, n_2}(r) \mathbf{u} \cdot A_{km} ds - \right. \\ \left. \frac{1}{j\omega} \int_S \nabla \cdot [\Phi_{2, n_1, n_2}(r) \mathbf{u}] B_{km} ds \right\} + \\ \sum_{J_2}^{J_1-1} \sum_{\xi=1}^3 \sum_{km} d_{j, km}^\xi \left\{ j\omega \int_S \Phi_{2, n_1, n_2}(r) \mathbf{u} \cdot A_{km} ds - \right. \\ \left. \frac{1}{j\omega} \int_S \nabla \cdot [\Phi_{2, n_1, n_2}(r) \mathbf{u}] B_{km} ds \right\} \\ = \int_S \Phi_{2, n_1, n_2}(r) \mathbf{u} \cdot E^{inc}(r) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{km} c_{j, 2, km} \left\{ j\omega \int_S \Psi_{j, k_1, k_2}^\xi(r) \mathbf{u} \cdot A_{km} ds - \right. \\ \left. \frac{1}{j\omega} \int_S \nabla \cdot [\Psi_{j, k_1, k_2}^\xi(r) \mathbf{u}] B_{km} ds \right\} + \\ \sum_{J_2}^{J_1-1} \sum_{\xi=1}^3 \sum_{km} d_{j, km}^\xi \left\{ j\omega \int_S \Psi_{j, k_1, k_2}^\xi(r) \mathbf{u} \cdot A_{km} ds - \right. \\ \left. \frac{1}{j\omega} \int_S \nabla \cdot [\Psi_{j, k_1, k_2}^\xi(r) \mathbf{u}] B_{km} ds \right\} \\ = \int_S \Psi_{j, k_1, k_2}^\xi(r) \mathbf{u} \cdot E^{inc}(r) ds, \quad (18) \end{aligned}$$

式(18)中  $A_{km} = \int_S G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \Psi_{j, km}(\mathbf{r}') \mathbf{u} ds$ ,

$$A_{km} = \int_S G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \Psi_{j, km}(\mathbf{r}') \mathbf{u} ds$$

$$B_{km} = \int_S G^\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \cdot [\Psi_{j, km}(\mathbf{r}') \mathbf{u}] ds,$$

$$B_{km} = \int_S G^\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \cdot [\Psi_{j, km}(\mathbf{r}') \mathbf{u}] ds$$

$\mathbf{u}$  为电流方向(水平方向电流取  $x$  轴方向, 垂直方向电流取  $z$  轴方向),  $S$  是电流面积, 等式(17)和(18)右边为电压矩阵元, 左边大括号里的积分为阻抗矩阵元。

## 4 计算结果

例(1): 为检验本文方法的正确性, 计算如图 2 的简单结构。长方形导体长  $L = 150\text{mm}$ , 宽  $W = 75\text{mm}$ , 基片高  $h = 3.175\text{mm}$ ,  $\epsilon = 2.56$ ,  $\text{tg}\delta = 0.0015$ 。用传统矩量计算在共振点附近的输入阻抗并标在 Smith 圆上, Rooftop 函数作为基函数表示未知电路密度, 导体被分割成  $20 \times 15$  个网格, 计算结果如图 3 所示, 再使用本文所述的方法计算, 即用小波函数作为基函数来表示未知的电流密度。选择具有紧支撑的规范正交的 Daubechies 小波函数( $N = 3$ )为基函数, 它的支撑是  $\text{Supp}\mathcal{Q} = [0, 5]$ ,

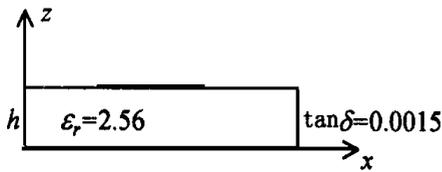


图 2 长方形导体板结构

Fig. 2 Rectangle conducting plate structure

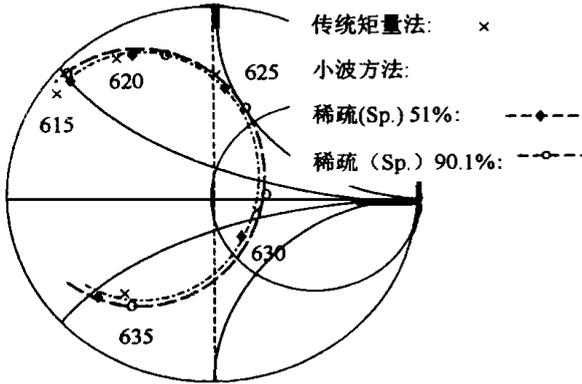


图 3 长方形导体板结构的输入阻抗

Fig. 3 The input impedance of rectangle conducting plate structure

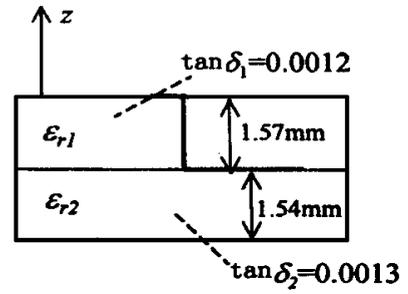


图 4 两层短微带天线

Fig. 4 The two-layer microstrip antenna

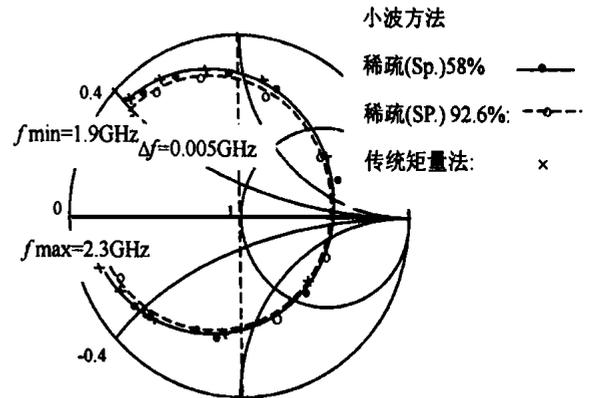


图 5 两层短微带天线输入阻抗

Fig. 5 The input impedance of the two-layer microstrip antenna

$\text{Supp}\psi_{00} = [-2, 3]$ ; 考虑的频率在 625MHz 左右, 长方形导体长的一边, 即  $J_1 = 5, J_2 = 5$ ; 矩的一边取  $J_1 = 5, J_2 = 3$ ; 分辨尺度则取为<sup>[4]</sup>  $450/2^5$  (mm)  $< \lambda/2^5$ . 此时未知小波尺度函数的数目分别为  $3 \times (23 \times 13)$ 、 $6 \times 6$ , 未知的电流密度系数数目是 933, 计算结果与传统矩量法相比吻合得很好, 共振点频率测量值为 628MHz.

例(2): 研究如图 4 所示的两层短微带天线结构. 有两个水平金属板分别在两个不同的介质层面上, 它们之间通过一个垂直金属壁连接. 水平金属板尺寸为  $30 \times 40 \text{mm}^2$ , 垂直金属板为  $1.57 \times 40 \text{mm}^2$ , 其介电常数及各层厚度如图 4 所示. 首先使用传统矩量法计算此结构的输入阻抗. 用 Rooftop 函数作为基函数来表示电流密度, 两个水平金属板被分割成  $18 \times 22$  个格, 垂直金属板被分割成  $7 \times 22$  个网格. 把算得的输入阻抗 (频率 1.9GHz ~ 2.3GHz) 标在 Smith 圆上, 图 5 显示所得结果.

使用与例(1)相同的小波函数来表示未知电路密度. 对两个水平金属板取  $J_1 = 5, J_2 = 2$ , 分辨尺度达到  $\lambda/2^5$ . 由于考虑的频率范围是 1.9GHz ~ 2.3

GHz, 波长最短约 130mm. 为方便计算, 选取分辨率为  $125/2^5$  (mm)  $< \lambda/2^5$ , 每个水平金属板小波数目为  $3 \times 23 \times 24$  (分别对应于  $x$  方向和  $y$  方向), 而每个水平金属板的未知电流密度系数的数目为 1705. 考虑垂直金属板, 由于  $z$  轴方向金属板尺度很小 ( $0 \sim 1.57$  mm), 如果选取与水平金属板  $x$  方向或  $y$  方向相同的小波分辨尺度, 则显得较大. 为更好地计算, 我们取  $J_1 = 8, J_2 = 7$ . 而垂直金属板的  $v$  变量小波所选取分辨尺度则与水平金属板  $y$  方向一致. 这样, 垂直金属板的小波数目是  $3 \times (7 \times 24)$ , 未知电流密度的展开函数的系数为 553 个.

图 5 显示传统矩量法与小波函数展开后的计算结果, 两种方向的结果几乎一致. 可是, 从式(17)和式(18)可以看出小波处理后的阻抗矩阵比传统矩量法所得的阻抗矩阵大很多. 然而, 它是一个稀疏矩阵. 稀疏程度由于小波函数的紧支撑性、消失矩性质所决定的, 不少文献已对此作过详细论述<sup>[4]</sup>.

表 1 列出选取不同的阈值时阻抗矩阵的稀疏程度. 虽然经小波变换后, 阻抗矩阵变得很大, 但其稀疏程度也大大增加. 从表 1 可见, 对于例(1), 阈值达

到  $10^{-5}$  量级时, 阻抗矩阵的稀疏程度为 78%; 阈值为  $1.2 \times 10^{-4}$  量级时, 阻抗矩阵的稀疏程度约是 90%, 总的计算量已比传统的矩量法少. 而在例 2 中, 阈值达到  $7.1 \times 10^{-4}$  时, 稀疏程度约是 87%; 阈值达到  $1.1 \times 10^{-3}$  时, 稀疏程度约 92.6%. 即使这样计算量还大于传统矩量法的计算量, 这是由于电流密度数目增加(3 个), 使得未知二维小波函数的系数增加, 从而总未知系数数目平方增加, 不过还可以接受. 图 3 和图 5 绘出稀疏程度为 90.1% [例(1)] 和 92.6% [例(2)] 时的结果, 它与传统矩量法比较误差分别是 1.8% 和 2.3%.

表 1 阈值和阻抗矩阵稀疏程度

Table 1 Threshold and sparsity of impedance matrix

例 1		例 2	
稀疏(%)	阈值	稀疏(%)	阈值
51	$4.6 \times 10^{-6}$	58	$6.6 \times 10^{-6}$
78	$3.3 \times 10^{-5}$	76	$1.7 \times 10^{-5}$
86	$9.3 \times 10^{-4}$	87	$7.1 \times 10^{-4}$
90.1	$1.2 \times 10^{-4}$	92.6	$1.1 \times 10^{-3}$

## 5 结语

本文尝试用二维小波函数去代替模拟未知电流密度的传统基函数, 由于小波函数独有的特性, 使得阻抗矩阵的稀疏程度较大, 对本文考虑的结构(图 2) 在足够精度下其计算量小于传统矩量法的计算量. 见例(1). 在例(2) 中, 因未知电流密度数目增加,

使得小波系数平方增加, 从而计算量较传统矩量法稍大. 当然, 选取不同种类的小波, 其支撑不同、消失矩不同, 矩阵的稀疏程度也不同. 在具体计算过程中, 取什么样的小波, 精度最好, 计算量最少, 还有待进一步的研究.

## REFERENCES

- [1] John A, Jansen R H. A simple new technique for the implementation of vertical current into the SDA, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, 1994, **7**(9): 389—392
- [2] Massa G Di, Mazzarella G. Shorted annular patch antenna, *Microwave and Opt. Technol. Lett.*, 1995, **8**: 222—226
- [3] Delaveaud C, Leveque P, Jecko B. New kind of micro-strip antenna: the mono-polar wire-patch antenna, *Electron. Lett.*, 1994, **30**(1): 1—2
- [4] Steinberg B Z, Leviatan Y. On the use of wavelet expansions in the method of moments, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 1993, **41**(5): 610—619
- [5] Kim Hyeongdong, Ling Hao. Wavelet analysis of radar echo from finite-size targets, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 1993, **41**(2): 200—207
- [6] Steinberg B Z, Leviatan Y. Periodic wavelet expansions for analysis of scattering from metallic cylinders, In: *IEEE Antennas Propagat. Soc. Symp.*, 1994, 20—23
- [7] Chui C K. *An Introduction to Wavelet*. New York: Academic, 1991, 116—262
- [8] Fang D G, Yang J J, Delisle G Y. Discrete image theory for horizontal electric dipoles in a multi-layered medium, *IEEE Proceedings Pt. H.*, 1988, **135**(5): 297—303
- [9] Mosig J R, Gardiol F E. A dynamical radiation model for micro-strip structures, *Advances in Electronics and Electron Physics*, 1982, **59**: 139—237