

模糊划分熵的新定义及其在图像分割中的应用

金立左 夏良正

(东南大学自动控制系, 南京, 210096)

TP391.41

摘要 介绍了模糊划分的原理, 提出用条件概率与条件熵定义模糊划分的熵, 并基于最大熵原理设计了一种新的灰度直方图阈值选取算法. 比较可见 KSW 熵法是本文方法的一个特例, 本文方法是 KSW 熵法在模糊集上的推广, 对几例真实目标图像的对比分割实验结果表明本文方法性能优越.

关键词 图像处理, 图像分割, 模糊划分, 熵.

A NEW DEFINITION OF FUZZY PARTITION ENTROPY AND ITS APPLICATION TO IMAGE SEGMENTATION

JIN Li-Zuo XIA Liang-Zheng

(Automatic Control Engineering Department, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract Based upon the maximum fuzzy partition entropy principle, a novel approach for image segmentation was presented. After the concept of fuzzy partition was introduced briefly, a new definition of fuzzy partition entropy was proposed. A threshold selection approach from gray-level histogram through maximizing the entropy of fuzzy partition was put forward. It was demonstrated that KSW entropic thresholding method is just a special case of the approach proposed herein. The experiment was conducted on three real object images. The results show that the proposed approach has better performances than some classical threshold selection methods do.

Key words image processing, image segmentation, fuzzy partition, entropy.

引言

模糊集理论现已成功用于图像分割, 基于模糊熵的方法是其中一类重要方法, 本质上是在定义熵函数后通过搜索最大值来选取阈值. Cheng 等人^[1]近年来提出的将模糊划分与最大熵原理相结合选取阈值的方法引人注目. Cheng 首先假定图像中目标类数已知, 各目标类被看成是图像灰度空间的模糊子集, 它们构成了对灰度空间的模糊划分. 主观给定目标类的隶属函数为含未知参数的升半、降半梯形函数(单阈值选取)和梯形函数(多阈值选取), 通过在解空间上搜索使模糊划分的熵获得最大值的参数来确定隶属函数, 阈值为隶属函数间的交叉点, 计算时仅利用图像的灰度直方图. 本文提出用条件概率与条件熵定义模糊划分的熵, 并基于最大熵原理设计了一种新的图像分割阈值选取算法. 比较可见 KSW 熵法^[2]是本文方法的一个特例, 本文方法是 KSW 熵法在模糊集上的推广. 对几

例真实目标图像作比较分割实验, 结果明显优于 Cheng 等人的方法, 比经典算法^[2,3]有一定程度的提高.

1 图像的模糊概率描述

设 (Ω, E, p) 是概率空间, 其中 Ω 是样本空间, $E \subset P(\Omega)$ (Ω 上全体普通子集构成的集合) 是 σ -代数, $p: E \rightarrow [0, 1]$ 是概率测度. 又设 $\tilde{A} \in F(\Omega)$ (Ω 上全体模糊集构成的集合) 是概率空间 (Ω, E, p) 上的模糊事件, 则 \tilde{A} 的概率为

$$p(\tilde{A}) = \int_{\Omega} \tilde{A}(\omega) dp. \quad (1)$$

若 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ 是可列集, 记 $p_i = p(\{\omega_i\})$, 则 \tilde{A} 的概率为

$$p(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{A}(\omega_i) p_i. \quad (2)$$

若设 \tilde{A}, \tilde{B} 是概率空间 (Ω, E, p) 上的模糊事件, 则给定 \tilde{B} 时 \tilde{A} 的条件概率^[4]为

$$p(\tilde{A}|\tilde{B}) = \frac{p(\tilde{A}\tilde{B})}{p(\tilde{B})} \quad (3)$$

设图像有 L 级灰度 $G = \{0, 1, \dots, L-1\}$, 直方图为 $h_k, k = 0, 1, \dots, L-1$. 令 $\Omega = G, p$ 为灰度出现的概率且 $p(\{k\}) = h_k$, 模糊集 $\tilde{A} = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\mu_{\tilde{A}}(k)}{k}$ 表示图像中的某个目标 \tilde{A} , 隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(k)$ 表明灰度 k 对 \tilde{A} 的隶属程度, 显然 $\tilde{A} \in F(G)$ 是模糊事件, 简单计算可得, 出现 \tilde{A} 的概率 $p(\tilde{A}) = \sum_{k=0}^{L-1} \mu_{\tilde{A}}(k)h_k$, 出现 \tilde{A} 时出现灰度 k 的条件概率 $p(\{k\}|\tilde{A}) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(k)h_k}{p(\tilde{A})}$.

2 模糊划分熵的新定义

设 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \subset R^p$ (p 维实空间), $X_k = (X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kp})^T \in R^p$ 为特征矢量, X_{kj} 为观测 X_k 的第 j 个特征, 对 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \subset R^p$ 的模糊划分就是将其分成 c 个模糊子集 \tilde{C}_i , 满足 $\sum_{i=1}^c \mu_{i,k} = 1, \forall X_k \in X, 2 \leq c \leq n$, 其中 $\mu_{i,k} = \mu_i(X_k) \in [0, 1]$ 为 \tilde{C}_i 的隶属函数^[6].

定义 1: 设 $P = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_c\}$ 是对任意 $X \subset R^p$ 的一种模糊划分, \tilde{B} 是概率空间 (X, E, p) 上的模糊事件, 则给定 \tilde{B} 时模糊划分 P 的条件熵^[6]为

$$H(P|\tilde{B}) = - \sum_{i=1}^c p(\tilde{A}_i|\tilde{B}) \log p(\tilde{A}_i|\tilde{B}) = - \sum_{i=1}^c \frac{p(\tilde{A}_i\tilde{B})}{p(\tilde{B})} \log \frac{p(\tilde{A}_i\tilde{B})}{p(\tilde{B})} \quad (4)$$

设有限集 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \subset R^p$, 构造集列 $Q_i = \{X_i\}, i = 1, 2, \dots, n$, 显然 $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ 是对 X 的一种模糊划分, 称 Q 为 X 的自然模糊划分. 由定义 1 得, 给定模糊事件 $\tilde{B} \in F(X)$ 时 X 的自然模糊划分 Q

的条件熵为

$$H(Q|\tilde{B}) = - \sum_{i=1}^n p(Q_i|\tilde{B}) \log p(Q_i|\tilde{B}) = - \sum_{i=1}^n \frac{p(Q_i\tilde{B})}{p(\tilde{B})} \log \frac{p(Q_i\tilde{B})}{p(\tilde{B})} \quad (5)$$

定义 2: 设 $P = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_c\}$ 是对任意有限集 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \subset R^p$ 的一种模糊划分, $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ 是对 X 的自然模糊划分, 则模糊划分 P 的熵为

$$H(P) = \sum_{i=1}^c H(Q|\tilde{A}_i) = - \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n \frac{p(Q_j\tilde{A}_i)}{p(\tilde{A}_i)} \log \frac{p(Q_j\tilde{A}_i)}{p(\tilde{A}_i)} \quad (6)$$

3 本文算法

设图像有 L 级灰度 $G = \{0, 1, \dots, L-1\}$, 直方图为 $h_k, k = 0, 1, \dots, L-1$. 构造集列 $Q_k = \{k\}, k = 0, 1, \dots, L-1$, 显然 $Q = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_{L-1}\}$ 是对 G 的自然模糊划分.

假设图像由目标与背景组成, 目标 \tilde{O} 的隶属函数 $\mu_{\tilde{O}}(k; a, b)$ 为 Z 函数, 背景 \tilde{B} 的隶属函数 $\mu_{\tilde{B}}(k; a, b)$ 为 S 函数, 分别表示灰度 k 对目标 \tilde{O} 、背景 \tilde{B} 的隶属程度, 其中 k 为独立的自由变量, 由参数 (a, b) 控制隶属函数的形状, $\mu_{\tilde{O}}(k; a, b) + \mu_{\tilde{B}}(k; a, b) = 1, \forall k = 0, 1, \dots, L-1, a < b$, 满足 $P = \{\tilde{O}, \tilde{B}\}$ 是对 G 的模糊划分(如图 1 所示).

$$\mu_{\tilde{B}}(k; a, b) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < a \\ 2 \left(\frac{k-a}{b-a} \right)^2, & a \leq k \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2 \left(\frac{k-b}{b-a} \right)^2, & \frac{a+b}{2} < k \leq b \\ 1, & b < k \leq L-1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\mu_{\tilde{O}}(k; a, b) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(k; a, b). \quad (8)$$

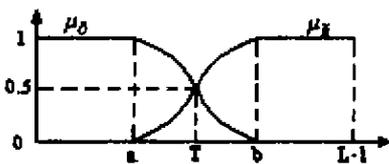


图 1 单阈值选取过程对灰度空间的模糊划分
Fig. 1 Fuzzy partition of gray level dimension for single threshold selection

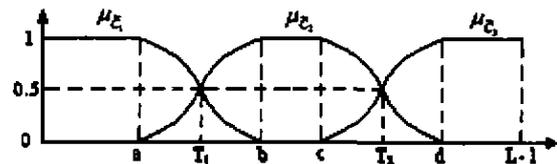


图 2 两阈值选取过程对灰度空间的模糊划分
Fig. 2 Fuzzy partition of gray level dimension for double thresholds selection

由定义 1 与式(5)得到给定目标 \tilde{O} 时自然模糊划分 Q 的条件熵为

$$\begin{aligned} H(Q|\tilde{O}) &= - \sum_{k=0}^{L-1} \frac{p(Q_k|\tilde{O})}{p(\tilde{O})} \log \frac{p(Q_k|\tilde{O})}{p(\tilde{O})} \\ &= - \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\mu_{\tilde{O}}(k)h_k}{p(\tilde{O})} \log \frac{\mu_{\tilde{O}}(k)h_k}{p(\tilde{O})}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{其中 } p(\tilde{O}) = \sum_{k=0}^{L-1} \mu_{\tilde{O}}(k)h_k. \quad (10)$$

给定背景 \tilde{B} 时自然模糊划分 Q 的条件熵为

$$\begin{aligned} H(Q|\tilde{B}) &= - \sum_{k=0}^{L-1} \frac{p(Q_k|\tilde{B})}{p(\tilde{B})} \log \frac{p(Q_k|\tilde{B})}{p(\tilde{B})} \\ &= - \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\mu_{\tilde{B}}(k)h_k}{p(\tilde{B})} \log \frac{\mu_{\tilde{B}}(k)h_k}{p(\tilde{B})}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{其中 } p(\tilde{B}) = \sum_{k=0}^{L-1} \mu_{\tilde{B}}(k)h_k. \quad (12)$$

由定义 2、式(9)、式(11)得模糊划分 P 熵

$$\begin{aligned} H(P) &= H(Q|\tilde{O}) + H(Q|\tilde{B}) \\ &= - \sum_{k=0}^{L-1} \left[\frac{\mu_{\tilde{O}}(k)h_k}{p(\tilde{O})} \log \frac{\mu_{\tilde{O}}(k)h_k}{p(\tilde{O})} + \frac{\mu_{\tilde{B}}(k)h_k}{p(\tilde{B})} \log \frac{\mu_{\tilde{B}}(k)h_k}{p(\tilde{B})} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

实际上,式(9)、和(11)可以看作目标 \tilde{O} 、背景 \tilde{B} 的信息量度量,式(13)则可以看作模糊划分 $P = \{\tilde{O}, \tilde{B}\}$ 下图像总的信息量度量. 一般而言,不同的模糊划分 $P = \{\tilde{O}, \tilde{B}\}$ 下图像具有的信息量存在差异,算法的目的是寻找最大信息量模糊划分,即在参数空间 $G \times G$ 上搜索参数使目标函数式(13)取最大值,一旦确定了模糊划分 $P = \{\tilde{O}, \tilde{B}\}$,就可以根据最大隶属原则对灰度级分类:若 $\mu_{\tilde{O}}(k; a, b) \geq 0.5$,则将灰度 k 划分为目标 \tilde{O} ,否则划分为背景 \tilde{B} ,即取阈值为 $T = \left[\frac{a+b}{2} \right]$ ($[\]$ 表示取整运算). 搜索具有最大信息量的模糊划分的过程属于参数优化问题,可采用穷举法求解,具体算法如下:(1) 设图像有 L 级灰度,计算灰度直方图 $h_k, k=0, 1, \dots, L-1$; (2) 确定图像的最小灰度级 g_{\min} 与最大灰度级 g_{\max} ; (3) 用穷举法搜索具有最大熵的模糊划分 $P = \{\tilde{O}, \tilde{B}\}$,即从 $a = g_{\min}$ 到 $g_{\max} - 1$,从 $b = a + 1$ 到 g_{\max} ,作由式(7)、式(8)计算目标 \tilde{O} 与背景 \tilde{B} 的隶属函数;由式(10)、式(12)计算目标 \tilde{O} 与背景目标的概率;由式(13)计算模糊划分 $P = \{\tilde{O}, \tilde{B}\}$ 的熵 H ;若 $H \geq H_{\max}$,则作赋值 $H_{\max} = H, a_{op} = a, b_{op} = b$; (4) 计算阈

$$\text{值 } T = \left[\frac{a_{op} + b_{op}}{2} \right].$$

本文算法很容易推广到图像的多阈值分割. 例如两阈值选取的情形:假设图像由目标 \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 与背景 \tilde{C}_3 组成,目标 \tilde{O}_1 的隶属函数 $\mu_{\tilde{C}_1}(k; a, b)$ 为 Z 函数,目标 \tilde{C}_2 的隶属函数 $\mu_{\tilde{C}_2}(k; a, b, c, d)$ 为 π 函数,背景 \tilde{C}_3 的隶属函数 $\mu_{\tilde{C}_3}(k; c, d)$ 为 S 函数,分别表示灰度 k 对目标 \tilde{C}_1 、目标 \tilde{C}_2 与背景 \tilde{C}_3 的隶属程度,其中 k 为独立的自由变量,由参数 (a, b, c, d) 控制隶属函数的形状, $\mu_{\tilde{C}_1}(k; a, b) + \mu_{\tilde{C}_2}(k; a, b, c, d) + \mu_{\tilde{C}_3}(k; c, d) = 1, \forall k=0, 1, \dots, L-1, a < b \leq c < d$, 满足 $P = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3\}$ 是对 G 的模糊划分(如图 2 所示). 在参数空间 $G \times G \times G \times G$ 上搜索具有最大信息量的模糊划分 $P = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3\}$,并根据最大隶属原则对灰度 k 进行分类:若 $\mu_{\tilde{C}_1}(k; a, b) \geq 0.5$ 则划分为目标 \tilde{C}_1 ,若 $\mu_{\tilde{C}_3}(k; c, d) > 0.5$ 则划分为背景 \tilde{C}_3 ,否则划分为目标 \tilde{C}_2 ,即取阈值为 $T_1 = \left[\frac{a+b}{2} \right], T_2 = \left[\frac{c+d}{2} \right]$.

4 与 KSW 熵法的比较

KSW 熵法是 Kapur 等人于 1985 年提出的,它利用条件概率描述图像中目标与背景的灰度分布,并据此定义目标与背景的熵,这种熵实际上是对目标与背景的信息量度量,根据分割后图像应具有最大信息量的原则在灰度空间上搜索阈值.

设图像有 L 级灰度 $G = \{0, 1, \dots, L-1\}$,其直方图为 $h_k, k=0, 1, \dots, L-1$,由此可导出两个灰度分布,其中一个描述 $\{0, 1, \dots, t\}$ 的灰度分布,另一个描述 $\{t+1, t+2, \dots, L-1\}$ 的灰度分布,分别为 $A: \frac{h_0}{P_t}, \frac{h_1}{P_t}, \dots, \frac{h_t}{P_t}$ 与 $B: \frac{h_{t+1}}{1-P_t}, \frac{h_{t+2}}{1-P_t}, \dots, \frac{h_{L-1}}{1-P_t}$,其中 $P_t = \sum_{k=0}^t h_k$,与这两个分布有关的熵分别为

$$H_A(t) = - \sum_{k=0}^t \frac{h_k}{P_t} \log \frac{h_k}{P_t}, \quad (14)$$

$$H_B(t) = - \sum_{k=t+1}^{L-1} \frac{h_k}{1-P_t} \log \frac{h_k}{1-P_t}, \quad (15)$$

图像的总熵为

$$H(t) = H_A(t) + H_B(t). \quad (16)$$

比较式(14)与(9)、式(15)与(11)可见,式(14)和(15)分别是式(9)和(11)在参数 $b = a + 1$ 时隶属函数为式(17)、(18)的特殊情形,即

$$\mu_{\bar{b}}(k; a, b) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq a \\ 1, & b < k \leq L - 1 \end{cases} \quad (17)$$

$$\mu_{\bar{0}}(k; a, b) = 1 - \mu_{\bar{b}}(k; a, b). \quad (18)$$

此时式(13)演变式为式(16)。因此说 KSW 熵法是本文方法的一个特例,本文方法是 KSW 熵法在模糊集上的推广。

5 实验结果与结论

选 3 幅真实目标图像作比较分割实验来验证本文方法的单阈值选取过程,如图 3~5,图中(a)为原始图像,256 级灰度; (b) 为归一化灰度直方图; (c) (d) (e) (f) 分别为用本文方法、Cheng 法^[1]、KSW 熵法^[2]

以及 Otsu^[3]的分割结果。

对比实验 I 如图 3,图像大小为 128×128; (c) 为阈值 153,隶属函数参数(a,b)=(76,231); (d) 为阈值 213,隶属函数参数(a,b)=(186,240); (e) 为阈值 200; (f) 为阈值 172。可见:(c)、(f) 分割出目标主体且无虚假干扰,结果很好; (e) 分割出目标主体但有部分虚假干扰,结果较好; (d) 分割出目标主体但虚假干扰很多,结果很差。

对比实验 II 如图 4,图像大小为 206×153; (c) 为阈值 105,隶属函数参数(a,b)=(3,207); (d) 阈值 155,隶属函数参数(a,b)=(78,233); (e) 阈值 132; (f) 阈值 117。可见:(c)、(f) 分割出目标主体且无虚

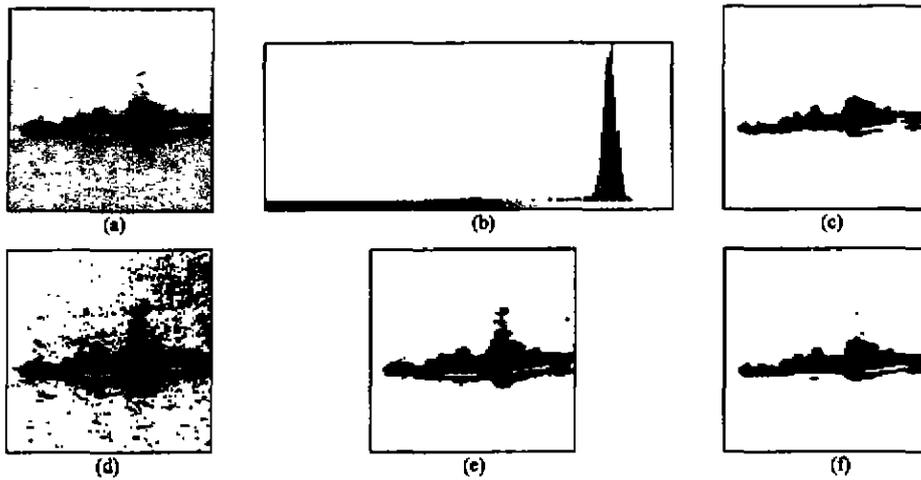


图 3 对比实验 I
Fig. 3 Comparison case I

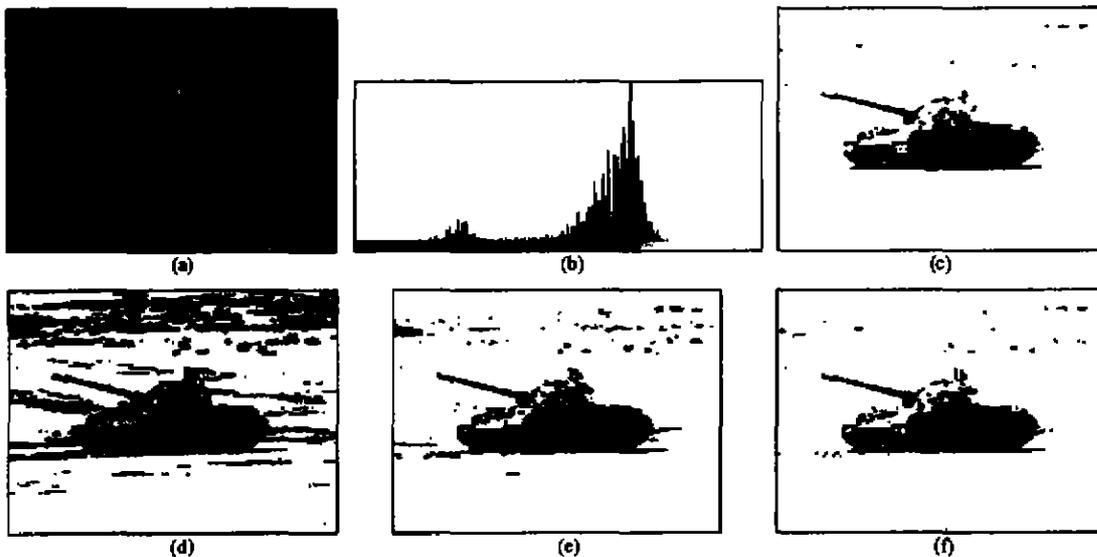


图 4 对比实验 II
Fig. 4 Comparison case II

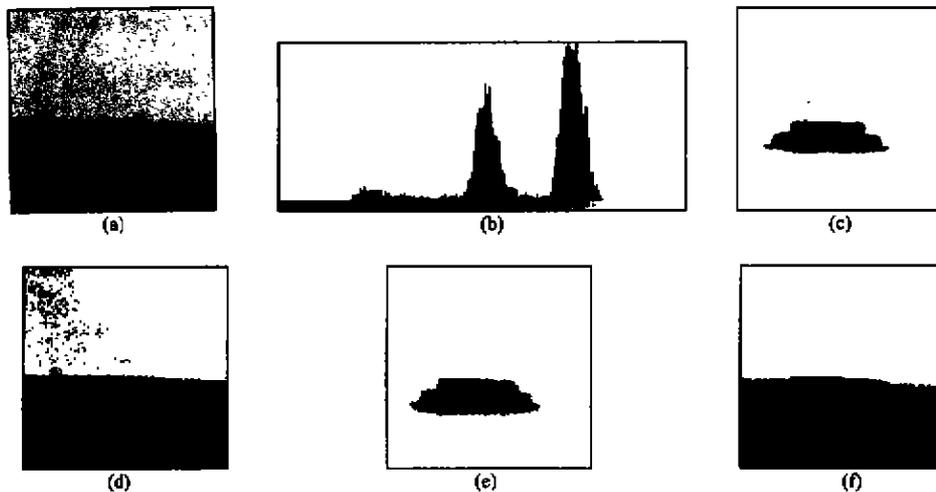


图 5 对比实验 III
Fig. 5 Comparison case III

假干扰, 结果很好; (e) 分割出目标主体但有部分虚假干扰, 结果较好; (d) 分割出目标主体但虚假干扰很多, 结果很差.

对比实验 III 如图 5, 图像大小为 128×128 ; (c) 为阈值 99, 隶属函数参数 $(a, b) = (44, 155)$; (d) 为阈值 175, 隶属函数参数 $(a, b) = (171, 180)$; (e) 为阈值 177; (f) 为阈值 151. 可见: (c)、(e) 分割出目标主体且无虚假干扰, 结果很好; (d)(f) 未能分割出目标主体, 结果极差.

从上述 3 组比较分割实验可以看出, 本文方法明显优于 Cheng 法, 实验同时反映了本文方法比 KSW 熵法、Otsu 法在性能上也有一定程度的提高. 任何分割方法都与图像特性(如噪声、对比度、光照条件等因素)有关, 本文方法在大多数情况下分割结果都比较理想.

REFERENCES

- [1] Cheng H D, Chen J R, Li J. Threshold selection based on fuzzy c-partition entropy approach, *Pattern Recognition*, 1998, **31**(7): 857—870
- [2] Kapur J N, Sahoo P K, Wong A K C. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram, *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1985, **29**: 273—285
- [3] Otsu N. A threshold selection method from gray-level histogram, *IEEE Trans. SMC*, 1978, **SMC-8**: 62—66
- [4] Zadeh L D. Probability measures of fuzzy events, *J. Math. Anal. Appl.*, 1968, **23**: 421—427
- [5] Ruspini E H. A new approach to clustering, *Inform. Control*, 1969, **15**: 22—32
- [6] Dumitrescu D. Fuzzy measures and the entropy of fuzzy partition, *J. Math. Appl.*, 1993, **176**: 359—373