

(8)

# 具有高斯横向分布的环形染料腔中带模型下的光学双稳性

田淑芬

(山东师范大学传播学院, 现代教育技术研究所, 山东, 济南, 250014)

樊锡君

(亚利桑那州立大学化学系和固态科学中心, 美国亚利桑那州, 坦佩市, 85287)

TN241

**摘要** 利用带模型理论研究了环形腔染料激光器中的光学双稳性, 使用了真实的高斯横模腔场分布, 并将所得到的结果分别与使用平面波近似下的带模型结果以及单横模近似下的二能级模型结果进行了比较.

**关键词** 染料激光器, 环形腔, 带模型, 光学双稳.

激光

## 引言

人们对可以较宽的频率范围内调谐的染料激光器一直具有明显的实验<sup>[1,2]</sup>和理论<sup>[3,4,5]</sup>兴趣. 通常, 人们对染料激光器的解释都是建立在半经典的均匀展宽的二能级系统理论的基础上. 最近 Fu 和 Haken<sup>[3]</sup>提出了一种考虑到染料分子带结构的半经典染料激光器理论. 这个带模型对于最近由 Hillman<sup>[1]</sup>所作的实验给出了一个可接受的定性解释.

利用带模型理论, Gong<sup>[6]</sup>等人从理论上研究了在单向环形腔染料激光器中的光学双稳性. 然而, 他们使用了平面波近似(PWA), 并假定所有的量只是在一维  $z$  空间变化. 事实上, 电场(激光场)通常具有一个高斯 TEM<sub>00</sub> 模结构, 极化和反转都在三维空间中发生变化<sup>[7-12]</sup>. 本文借助带模型并同时考虑到激光场的横向分布, 研究了单向环形腔染料激光器中的光学双稳性.

## 1 带模型中的 MAXWELL-BLOCH 方程组

含有一个电子的分子在一个电场  $\vec{E}(t)$  中的 Schrödinger 方程是:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = [H_0 + e\vec{r} \cdot \vec{E}(t)] |\psi\rangle, \quad (1)$$

式(1)中  $|\psi\rangle$  是这个分子的波函数,  $e$  是电子电荷的绝对值,  $\vec{r}$  是这个电子相对于分子中心的位置. 令  $|\tilde{\psi}\rangle$  表示未微扰激发单态的本征函数,  $\{|\psi_0\rangle\}$  表示电子基态的本征函数,  $\sigma$  是连续变量中的一个值, 用来指明带结构中一个特别的振动亚态. 于是我们得到:

$$H_0 |\tilde{\psi}\rangle = \tilde{W} |\tilde{\psi}\rangle, \quad (2)$$

$$H_0|\psi_0\rangle = W_\sigma|\psi_0\rangle; \quad (3)$$

$\{|\psi\rangle, |\psi_\sigma\rangle\}$  形成一个正交完全基矢集. 我们把  $\sigma$  当作一个连续变量, 其结果可以直接应用于分离变量的情况, 只要将积分用相应的求和来代替即可. 在这个基础上, 波函数  $|\psi\rangle$  可以展开为:

$$|\psi\rangle = \tilde{C}(t)e^{-i\tilde{W}t/\hbar}|\tilde{\psi}\rangle + \int_B d\sigma \rho_\sigma C_\sigma(t)e^{-i\omega_\sigma t/\hbar}|\psi_\sigma\rangle, \quad (4)$$

式(4)中  $\rho_\sigma$  是连续带的态密度, 展开系数  $\{\tilde{C}(t), C_\sigma(t)\}$  满足正交归一化条件, 把式(3)代入 Schrödinger 方程得到:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{C}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_B d\sigma \rho_\sigma C_\sigma(t)e^{i\omega_\sigma t}\bar{\theta}_\sigma \cdot \vec{E}(t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}C_\sigma(t) = -\frac{1}{\hbar}\tilde{C}(t)e^{-i\omega_\sigma t}\bar{\theta}_\sigma^* \cdot \vec{E}(t), \quad (6)$$

其中

$$\omega_\sigma = (\tilde{W} - W_\sigma)/\hbar, \bar{\theta}_\sigma \equiv \langle \tilde{\psi} | e\vec{r} | \psi_\sigma \rangle. \quad (7)$$

$\bar{\theta}_\sigma$  是从基态的第  $\sigma$  个亚能级到激发态的跃迁距,  $\bar{\theta}_\sigma^*$  是  $\bar{\theta}_\sigma$  的复数共轭. 我们定义极化  $\vec{P}(t)$  和反转  $d(t)$  如下:

$$\vec{P}(t) = \langle \psi | (-e\vec{r}) | \psi \rangle \equiv \int_B d\sigma \rho_\sigma \vec{P}_\sigma(t) + C.C. \quad (8)$$

$$d(t) = |\tilde{C}(t)|^2, \quad (9)$$

其中

$$\vec{P}_\sigma(t) \equiv -\tilde{C}(t)C_\sigma^*(t)e^{-i\omega_\sigma t}\bar{\theta}_\sigma^*.$$

从式(5)和式(6)我们得到:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}_\sigma = -i\omega_\sigma\vec{P}_\sigma - \frac{1}{\hbar}d\bar{\theta}_\sigma^*(\bar{\theta}_\sigma \cdot \vec{E}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}d = \frac{1}{\hbar}\int_B d\sigma \rho_\sigma (\vec{P}_\sigma^* - \vec{P}_\sigma) \cdot \vec{E}. \quad (11)$$

假设所有的偶极矩阵元  $\{\bar{\theta}_\sigma\}$  平行于电场  $\vec{E}(t)$ , 这样  $\vec{E}(t)$ ,  $\{\vec{P}_\sigma(t)\}$  和  $\{\bar{\theta}_\sigma\}$  能够作为标量处理. 我们引进  $P_\sigma(r, z, t)$  和  $D(r, z, t)$ , 它们分别是  $P_\sigma$  和  $d$  的宏观对应量. 再增加电场的 Maxwell 方程, 我们得到关于带模型的 Maxwell-Bloch 方程组如下:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \frac{4\pi}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \int_B d\sigma \rho_\sigma P_\sigma + C.C. \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_\sigma = -(\gamma_{p,\sigma} + i\omega_\sigma) P_\sigma - i(\theta^2/\hbar) E f_\sigma D, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D = \gamma_d [D_0 - D] + \frac{i}{\hbar} E \int_B d\sigma \rho_\sigma [P_\sigma^* - P_\sigma], \quad (14)$$

其中,  $\gamma_{p,\sigma}, \gamma_d$  分别是  $\vec{P}_\sigma(r, z, t)$  和  $D(r, z, t)$  的弛豫速率. 量  $E, P_\sigma$  和  $D$  具有柱对称性.  $D_0$  是

外部泵浦参量,在本文中被假设为常数.

$$\text{令: } \theta_n \theta_n^* \equiv f_n \theta^2, \quad (15)$$

其中  $\theta$  为正数,表示偶极矩阵元的振幅;  $f_n$  为分布函数,并被假设具有关于能带中心的对称性.为简单起见,假设弛豫速率等于同一个常数  $\gamma_p$ ,并使用分离指标  $\{n\}$  而不是连续参量  $\{\sigma\}$  去标记振动亚能级,于是可以将式(12)~(14)写成以下形式:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \sum_n P_n + \text{C. C.} \right], \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_n = -(\gamma_p + i\omega_n) P_n - i(\theta^2/\hbar) E f_n D, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D = \gamma_d [D_0 - D] + \frac{i}{\hbar} E \sum_n (P_n^* - P_n). \quad (18)$$

$$\text{令: } E(r, z, t) = \frac{\hbar}{2\theta} (\gamma_d \gamma_p)^{1/2} \bar{E}(r, z, t) \exp[-i(\omega t - kz)] + \text{C. C.}, \quad (19)$$

$$P_n(r, z, t) = \frac{i\theta N}{2} (\gamma_d/\gamma_p)^{1/2} \bar{P}_n(r, z, t) \exp[-i(\omega t - kz)], \quad (20)$$

$$D = \frac{N}{2} \bar{D}, \quad D_0 = \frac{N}{2} \bar{D}_0. \quad (21)$$

$N$  是分子的数密度.把式(19)~(21)代入方程组(16)~(18),并使用旋波和慢变振幅近似,我们得到:

$$\frac{1}{2ik} \nabla_{\perp}^2 \bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} = -\alpha \sum_n \bar{P}_n, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_n}{\partial t} = -\gamma_p \{ [1 - i(\beta_n - \beta)] \bar{P}_n + \frac{1}{2} f_n \bar{E} \bar{D} \}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \gamma_d \{ \bar{D}_0 - \bar{D} + \frac{1}{2} \sum_n [\bar{P}_n^* \bar{E} + \bar{P}_n \bar{E}^*] \}, \quad (24)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{2\pi\theta^2 KN}{\hbar \gamma_p}, \quad \beta_n = \frac{\omega_0 - \omega_n}{\gamma_p}, \quad \beta = \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma_p}, \quad (25)$$

$\alpha$  是吸收系数,  $\beta_n$  是第  $n$  个亚能级与中心亚能级的失谐,  $\beta$  是场载频率  $\omega$  相对于  $\omega_0$  的失谐.

## 2 单横模近似

我们假设入射场和腔内场对应于腔的 TEM<sub>00</sub> 模,并定义

$$\bar{E}(r, z, t) = F_0(z, t) \cdot A(r, z), \quad (26)$$

$$\bar{F}_0(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{W_0} F_0(z, t), \quad (27)$$

$$A(r, z) = [1 + Z/Z_0^2]^{-1/2} \exp[-r^2/W^2(Z)], \quad (28)$$

$$\bar{P}_n(r, z, t) = \exp[i\phi_0(r, z)] \tilde{P}_n(r, z, t). \quad (29)$$

从式(22)、(23)和式(24)得到以下对于单横模的完全方程组

$$\frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial t} = -a \sum_n \int_0^\infty dr \frac{4r}{\omega_0^2} \tilde{P}_n A, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}_n}{\partial x} = -\gamma_n \{ [1 - i(\beta_n - \beta)] \tilde{P}_n + \frac{1}{2} f_n \tilde{F}_0 \bar{D} A \}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial x} = -\gamma_d \{ [\bar{D}_0 - \bar{D}] + \frac{1}{2} \sum_n [\tilde{P}_n^* \tilde{F}_0 + \tilde{P}_n \tilde{F}_0^*] A \}; \quad (32)$$

式(31)的边界条件是

$$\tilde{F}_0(-\frac{L}{2}, t) = T_y + (1 - T) \exp(-i\delta_0) F_0(\frac{L}{2}, t - \frac{\mathcal{L} - L}{C}), \quad (33)$$

其中  $y = \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \tilde{F}_0(-\frac{L}{2})$ ,  $\delta_0$  是腔失调参量,  $\mathcal{L}$  是腔的总长度. 在定态 ( $\frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{P}_n}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{D}}{\partial x} = 0$ ) 下有:

$$\frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial x} = -\frac{a\bar{D}_0}{2|\tilde{F}_0|^2 g_1} \sum_n \frac{f_n \tilde{F}_0}{[1 - i(\beta_n - \beta)]} \ln[1 + |\tilde{F}_0|^2 g_1], \quad (34)$$

其中

$$g_1 \equiv g_1(\beta_n, \beta) = \sum_n \frac{f_n}{1 + (\beta_n - \beta)^2}. \quad (35)$$

令

$$\tilde{F}_0 = \eta e^{i\varphi},$$

则

$$\frac{\partial \eta}{\partial Z} = -\frac{a\eta \bar{D}_0}{2\eta^2} \ln(1 + \eta^2 g_1), \quad (36)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Z} = -\frac{a\eta \bar{D}_0}{2\eta^2} \cdot \frac{g_2 \ln(1 + \eta^2 g_1)}{g_1}, \quad (37)$$

其中

$$g_2 \equiv g_2(\beta_n, \beta) = \sum_n \frac{f_n (\beta_n - \beta)}{1 + (\beta_n - \beta)^2}, \quad (38)$$

考虑平均场近似(MFA)

$$aL \rightarrow 0, T \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \quad (39)$$

和

$$aL/T = 2C \quad (\text{const.}), \quad (40)$$

$$\delta_0/T = \delta \quad (\text{const.}). \quad (41)$$

对于  $aL \ll 1$ , 并令

$$x = \eta(1/2) \quad (42)$$

从式(36)和(37)并使用边界条件式(33), 我们得到

$$y = x \{ [1 + \frac{C\bar{D}_0}{x^2} h(x^2, g_1)]^2 + [\delta + \frac{C\bar{D}_0}{x^2} \cdot \frac{g_2}{g_1} h(x^2, g_1)]^2 \}^{1/2}, \quad (43)$$

其中

$$h(x^2, g_1) = \ln(1 + g_1 x^2). \quad (44)$$

当染料分子样品的半径  $r_0$  相对于  $W_0$  不是太大时, 可得到

$$y = x \{ [1 + \frac{C\bar{D}_0}{x^2} H(x^2, g_1)]^2 + [\delta + \frac{C\bar{D}_0}{x^2} \frac{g_2}{g_1} H(x^2, g_1)]^2 \}^{1/2}, \quad (45)$$

其中

$$H(x^2, g_1) = \ln\{(1 + x^2 g_1) / [1 + x^2 \exp(-2(r_0/W_0)^2)]\}. \quad (46)$$

### 3 数值计算结果和结论

为了进行数值计算,我们假定带是连续的,并且偶极矩阵元  $f_0$  作为  $\sigma$  函数分布是宽度  $\Gamma$  的 Lorentz 函数,即

$$f(\sigma) = \frac{\text{const.}}{1 + \sigma^2/\Gamma^2}, \quad (47)$$

其中 const. 是由以下的归一化条件来决定的.

$$g_1(\sigma, 0) = \int_{-b}^b \frac{\text{const.}}{[1 + (\sigma - \beta)^2](1 + \sigma^2/\Gamma^2)} d\sigma = 1. \quad (48)$$

其中  $b$  是带的半宽度. 二能级模型结果为<sup>[10]</sup>

$$y = x \left\{ \left[ 1 + \frac{2c}{x^2} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{1 + \beta^2} \right) \right]^2 + \left[ \delta + \frac{2c\beta}{x^2} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{1 + \beta^2} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (49)$$

式(49)和式(43)都使用了单模近似(OTMA). 比较式(49)与式(43)的结果:

(1) 图 1~3 表明,带模型给出的双稳区域要比二能级给出的宽,特别当  $\beta$  值较大的时候,  $\beta$  值的变化对二能级模型下的双稳区域范围的影响要比对带模型下双稳区域范围的影响更加明显.

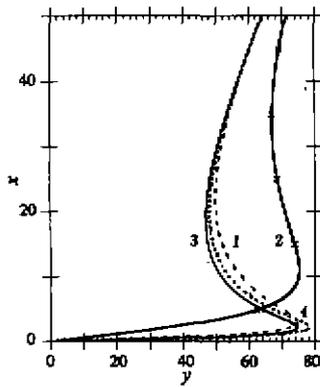


图 1 高斯分布的二能级模型和带模型在定态情况下,归一化入射场  $y$  作为归一化透射场  $x$  的函数曲线,图中  $C=90, \delta=0$ .  
二能级模型 1— $\beta=0, 2—\beta=5$   
带模型 3— $\beta=0, 4—\beta=5$

Fig. 1 Plot of normalized incident field  $y$  as a function of normalized transmitted field  $x$  at the steady state for Gaussian case with  $C=90, \delta=0$  in both two-level and band models. In the two-level model, curve 1,  $\beta=0$ ; curve 2,  $\beta=5$ . In the band model, curve 3,  $\beta=0$ ; curve 4,  $\beta=5$

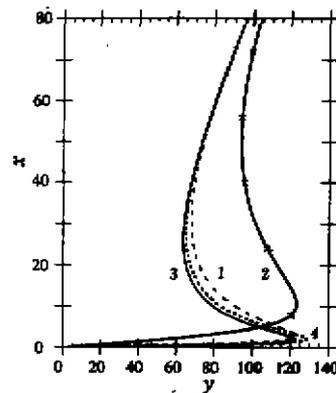


图 2 高斯分布的二能级模型和带模型在定态情况下,归一化入射场  $y$  作为归一化透射场  $x$  的函数曲线,图中  $C=150, \delta=0$ .  
二能级模型中 1— $\beta=0, 2—\beta=5$   
带模型中 3— $\beta=0, 4—\beta=5$

Fig. 2 The same as Fig. 2 except  $C=150, \delta=0$

(2) 如果  $\delta=0$ (见图 1, 2),带模型给出的入射场强度的第一个双稳阈值要比二能级模型给出的小;如  $\delta \neq 0$ (见图 3),以上的结论对于  $\beta=0$  来说仍然是正确的,但对于  $\beta > 0$ (例如

$\beta=5$ ), 则结论相反.

比较由式(43)给出的光场具有高斯横模分布时的结果和由以下公式所给出的平面波近似(PWA)下的结果<sup>[6]</sup>,

$$y = x + \frac{2C' x g(\beta)}{1 + \frac{1}{2} x^2 g(\beta)}$$

$$g(\beta) = \sum_n \frac{f_n}{1 + (\beta_n - \beta)^2} \quad (50)$$

式(43)和式(50)都是在带模型的基础上所得到的理论公式.

图(5)和图(6)表明, 当 $\beta$ 较小时, 使用平面波近似的带模型(BWPWA)给出的双稳范围将随着 $\beta$ 值的增大而减小; 当 $\beta$ 值较大时, 这个双稳范围将随着 $\beta$ 值的增大而增大, 然而, 本文(即使用单横模近似带模型)所给出的双稳范围的变化情况却相反, 即当 $\beta$ 值较小时, 双稳范围将随 $\beta$ 值的增大而增大, 当 $\beta$ 值较大时, 双稳范围将随 $\beta$ 值的增大而减小.

为了比较从不同模型得到的结果, 在我们的数值计算中, 令 $\Gamma=20.0, b=10.0$ 而这些值是与Gong等人<sup>[6]</sup>文章中所取的值是相同的.

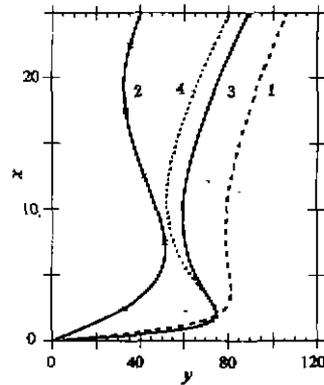


图3 高斯分布的二能级模型和带模型在定态情况下, 归一化入射场 $y$ 作为归一化透射场 $x$ 的函数曲线, 图中 $C=90, \delta=3$ .  
二能级模型 1— $\beta=0, 2-\beta=5$   
带模型 3— $\beta=0, 4-\beta=5$

Fig. 3 The same as Fig. 2 except  $C=90, \delta=3$

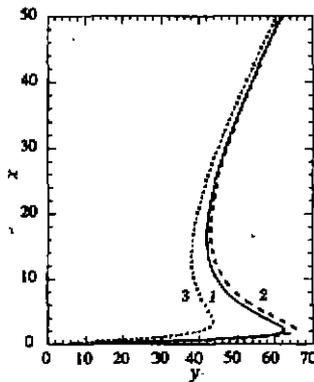


图4 高斯分布的带模型在定态情况下, 归一化入射场 $y$ 作为归一化透射场 $x$ 的函数曲线, 图中 $C=75, \delta=0$ .  
1— $\beta=0, 2-\beta=5, 3-\beta=10$ ,

Fig. 4 Plot of normalized incident field  $y$  as a function of normalized transmitted field  $x$  at the steady state for Gaussian case with  $C=75, \delta=0$  in the band models. Curve 1;  $\beta=0$ ; curve 2;  $\beta=5$ ; curve 3;  $\beta=10$ .

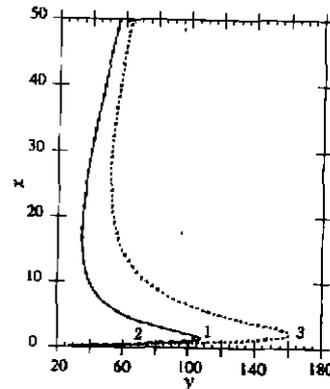


图5 平面波近似下的带模型, 在定态情况下, 归一化入射场 $y$ 作为归一化透射场 $x$ 的函数曲线,  $C'=75$ .  
1— $\beta=0, 2-\beta=5, 3-\beta=10$

Fig. 5 Plot of normalized incident field  $y$  as a function of normalized transmitted field  $x$  at the steady state for plane-wave approximation with  $C=75$ , in the band models. Curve 1;  $\beta=0$ ; curve 2;  $\beta=5$ ; curve 3;  $\beta=10$

本文导出了环形腔染料激光器系统的带模型理论下的 Maxwell-Bloch 方程组,并利用这个方程组研究了激光系统的光学双稳性. 在研究中考虑了腔场具有高斯横模分布. 本文所得到的结果分别与使用平面波近似下的带模型结果以及单横模近似下的二能级模型结果进行了比较. 我们发现,当  $\beta$ 、 $C$  和  $\delta$  等参量的数值改变时,染料激光器系统的双稳范围和双稳阈值的变化趋势有显著的差别.

### 参考文献

- 1 Hillman L H, Kransinki J, Boyd R W, *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1984, **52**(18), 1605
- 2 Lawandy N M, Sohrab A R, Rabinovich W S. *Phys. Rev.*, 1987, **A36**(4), 1759
- 3 Fu Hong, Haken H. *Phys. Rev.*, 1987, **A36**(10), 4802
- 4 Fu Hong, Haken H. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **60**(25), 2614
- 5 Fu Hong, Haken H. *Phys. Rev.*, 1990, **A42**(7), 4151
- 6 Gong S Q, Pan S H, Yang G Z. *Phys. Rev.*, 1992, **A44**(9), 6655
- 7 Moloney J V, Hopf F A, Gibbs H M. *Phys. Rev.*, 1982, **A25**(5), 3442
- 8 Lugiato L A, Milani M. *Z. Phys.*, 1983, **B50**(2), 171
- 9 Lugiato L A, Horowicz R J, Strini G, *et al.* *Phys. Rev.*, 1984, **A30**(3), 1366
- 10 Scalora M, Haus W J. *J. Opt. Soc. Am.*, 1989, **B6**(9), 1714
- 11 Haelterman M, Tolay M D, Vitrant G. *J. Appl. Phys.*, 1990, **67**(6), 2725
- 12 Fan X J, Tan B G, Yuan Z F, *et al.* *Phys. Rev.*, 1991, **A44**(3), 2048

## OPTICAL BISTABILITY BASED ON THE BAND MODEL IN A DYE-RING CAVITY WITH GAUSSIAN TRANSVERSE PROFILE

Tian Shufen

(The Institute of Modern Educational Means, Communication College,  
Shandong Normal University, Jnan, Shandong 250014, China)

Fan Xijun

(Department of Chemistry and Biochemistry, and Center for Solid State Science,  
Arizona State University, Tempe, AZ 85287, U. S. A.)

**Abstract** The optical bistability in a dye-ring cavity laser was investigated by using the theory of band model. In the study, the real distribution of the cavity field with Gaussian transverse profile was used. The result was compared with those which were obtained by using plane wave approximation based on the band model and the two-level model in one transverse mode approximation, respectively.

**Key words** dye laser, ring cavity, band model, optical bistability.