313—317
第15卷第4期 1996年8月
红外与毫米波学报 J. Infrared Millim. Waves
Vol. 15, No. 4 August, 1996

介电微圆柱的模密度计算和热辐射谱*

张存洲 张光寅
(南开大学物理系,天津,300071)
潘潇宁 王清月
(天津大学精密仪器系,天津,300072)

TN25

A

摘要 利用电磁理论和量子理论,计算了介电微圆柱的轴向模密度,并得到了热辐射谱.结果表明介电微圆柱的模密度和自由空间(体材料)有显著的区别:在自由空间,材料的模密度在空间位置上是均匀的,其频率是连续的;而介电微圆柱则相反,模密度在空间位置上是不均匀的,频率是分立的.

关键词 模密度,热辐射,自发发射. 介电微圆柱 光纤光子器件

引言

14

在自由空间,模密度 ρ_f 在空间上是均匀的,在频率上连续.但在微腔结构中,模密度 ρ 在空间上是不均匀的,在频率上是分立的.亦即在某些空间和频率位置,模密度 ρ 是很大的值,而在其它位置则很小.如果模密度的谱和空间分布与微腔中激活介质相匹配,激发原子的自发发射将会得到加强,反之将减弱.这样,我们可以利用微腔结构来控制它的自发发射,从而可望获得近零阈值微激光器.微腔模密度分布的获得是走向获得近零阈值激光器的第一步.线状物体、微球状物体的模密度已经被计算出来[1,2],而微圆柱状物体的模密度计算至今未见报道.微圆柱状物体的模密度的获得对于光纤光子学器件性能的研究有着重要的意义,它可以对它们的性能的改进提供重要的理论基础.由模密度不仅可以得到物质的热辐射谱分布,而决定原子系统激发态寿命及其与电磁场相互作用的爱因斯坦系数也都和模密度相联系[3].这些问题将对各种与形貌(尺寸)有关的荧光、喇曼散射和激光的共振效应产生重要影响(如光纤激光器).因此,模密度的获得具有重要的意义.

本文从电磁理论和量子理论出发计算介电微圆柱的轴向模密度.

1 公式

假设微圆柱的半径为 a,长度为 b,材料折射率是 n,半径的范围在 5~100μm,对应于光波长,无量纲尺寸参数 $\frac{2\pi a}{\lambda}$ 大约是在 50~1000 范围.这样,微圆柱既不至于被看成是一条线,又不在几何光学的处理范畴.如果 $\frac{b}{a}\gg 1$,微圆柱可以近似看成是无限长的.我们用 m 来表示微圆柱,它的热辐射(黑体辐射)能量谱密度是

* 国家自然科学基金资助项目
本文1995年10月24日收到

$$S^m(T,\omega)=\rho^m(\omega)\hbar\,\omega\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1},\tag{1}$$

其中 $\rho^m(\omega)=\int_m\rho(\omega,\vec{r})d\vec{r}$，$T$ 是微圆柱的温度，ω 是频率，$\rho^m(\omega)$是微圆柱的模谱密度（单位频率间隔），$\rho(\omega,\vec{r})$是局域模密度（单位体积，单位频率间隔），可以写成[4,5]

$$\rho(\omega,\vec{r})=\frac{1}{\hbar\,\omega}\sum_s\delta(\omega-\omega_s)U_s(\vec{r}).$$

这里 s 是标记，$U_s(\vec{r})$是已被归一化为模 s 中一个光量子时的能量密度（正比于真空场零点能密度）. 真空场在每个模中有半个光量子（暗态）. 能量密度 $U_s(\vec{r})$为

$$U_s(\vec{r})=\frac{1}{2}[\varepsilon E^2(\vec{r})+\mu H^2(\vec{r})],\tag{2}$$

式(2)中 $E(\vec{r})$、$H(\vec{r})$分别是微圆柱中模 s 中有一个光量子时的电场和磁场分布. 并注意其在线性表示中取实部，在平方表示中，$E^2=\frac{1}{2}E^*\cdot E$，$H^2=\frac{1}{2}H\cdot H^*$，$E^*$、$H^*$分别是 E、H 的共轭复数.

2 计算

选取柱坐标 r、φ、z. 在 $nK_0>\beta>K_0(K_0=\frac{\omega}{c})$的范围内存在导波模，$\beta$ 是沿轴向场的波矢. 由亥姆霍兹方程解得微圆柱的轴向场分布如下：

当 $r<a$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}
E_r&=-\frac{i\beta}{h^2}[AhJ_l'(hr)+\frac{i\omega\mu l}{\beta r}BJ_l(hr)]\exp i\delta,\\
E_\varphi&=-\frac{l\beta}{h^2}[\frac{il}{r}AJ_l(hr)-\frac{\omega\mu}{\beta}BhJ_l'(hr)]\exp i\delta,\\
E_z&=AJ_l(hr)\exp i\delta,
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
E_r&=-\frac{i\beta}{h^2}[AhJ_l'(hr)-\frac{i\omega\epsilon_l l}{\beta r}AJ_l(hr)]\exp i\delta,\\
H_\varphi&=-\frac{i\beta}{h^2}[\frac{il}{r}BJ_l(hr)+\frac{\omega\epsilon_1}{\beta}AhJ_l'(hr)]\exp i\delta,\\
E_z&=BJ_l(hr)\exp i\delta,
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式中 $h=\sqrt{n^2K_0^2-\beta^2}$，$J_l'(hr)=\frac{dJ_l(hr)}{d(hr)}$，$\delta=\omega t+l\varphi-\beta z$，$\varepsilon_1=\varepsilon_0 n^2$；

当 $r>a$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&E_r=\frac{i\beta}{q^2}[CqK_l'(qr)+\frac{i\omega\mu l}{\beta r}DK_l(qr)]\exp i\delta,\\&E_\varphi=-\frac{i\beta}{q^2}[\frac{il}{r}CK_l(qr)-\frac{\omega\mu}{\beta}DqK_l(qr)]\exp i\delta,\\&E_z=CK_l(qr)\exp i\delta,\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}&H_r=\frac{i\beta}{q^2}[DqK_l'(qr)-\frac{i\omega\varepsilon_2 l}{\beta r}CK_l(qr)]\exp i\delta,\\&H_\varphi=\frac{l\beta}{q^2}[\frac{il}{r}DK_l(qr)+\frac{\omega\varepsilon_2}{\beta}CqK_l'(qr)]\exp i\delta,\\&H_z=DK_l(qr)\exp i\delta,\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

式中 $q=\sqrt{\beta^2-K_0^2}$，$K_l'(qr)=\frac{\mathrm{d}K_1(qr)}{\mathrm{d}(qr)}$，$\varepsilon_2=\varepsilon_0$. 其中 J_l 是第一类 l 阶贝塞尔函数，K_l 是变态的第二类 l 阶贝塞尔函数. 由边界条件，E_φ、E_z、H_φ 和 H_z 在 $r=a$ 处连续，得到场分布的系数关系为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{C}{A}=\frac{J_l(ha)}{K_l(qa)}=\chi,\\&\frac{B}{A}=\frac{i\beta l}{\omega\mu}(\frac{1}{q^2a^2}+\frac{1}{h^2a^2})[\frac{J_l'(ha)}{haJ_l(ha)}+\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)}]^{-1}=\zeta,\\&\frac{D}{A}=\frac{J_l(ha)}{K_l(qa)}\frac{B}{A}=\chi\zeta.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

亥姆霍兹方程的解是正交归一的，即

$$\hbar\,\omega=\int\frac{1}{2}\varepsilon E^*\cdot E\mathrm{d}\vec{r},$$

因此单位长度微圆柱的归一化为

$$\begin{aligned}\hbar\,\omega&=\int\frac{1}{2}\varepsilon E^*\cdot E\mathrm{d}\vec{r}\\&=\frac{1}{2}\{\int_0^a\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\varepsilon_1E^*\cdot E_{(r<a)}+\int_a^\infty\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\varepsilon_2E^*\cdot E_{(r>a)}\}=MA^2,\end{aligned}\tag{8}$$

式(8)中 $M=\frac{\pi}{2}\{\varepsilon_1\frac{a^2}{4h^2}(\beta^2+\omega^2\mu^2\zeta^2)[J_{l-1}^2(ha)+J_{l+1}^2(ha)-J_l(ha)J_{l+2}(ha)$
$-J_{l-2}(ha)J_l(ha)]+\varepsilon_1[J_l^2(ha)-J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)]+\varepsilon_2\frac{a^2}{4q^2}(\chi^2\beta^2$
$+\omega^2\mu^2\chi^2\zeta^2)[-K_{l-1}^2(qa)-K_{l+1}^2(qa)+K_1(qa)K_{l+2}(qa)$
$-K_{l-2}(qa)]+\varepsilon_2[-K_l^2(qa)+K_{l-1}(qa)K_{l+1}(qa)]\}$.

对于这样的场分布，在 $r>a$ 时能量很小，因为 a 在 5～100μm 时，在可见光区相应的无量纲尺寸参数 $\frac{2\pi a}{\lambda}$ 在 50～1000 左右，因此在 $r=a$ 处电场的切向分量近似等于零. 取 $ha\gg1$，由渐近公式得到

$$ha = (\upsilon + \frac{l}{2})\pi + \frac{3}{4}\pi, \tag{9}$$

对单位长度，$\sum_s \to \sum_\upsilon \sum_l$，由于求解得到的能量是连续的，于是有

$$\sum_\upsilon \to \int \frac{n^2 a\omega s}{\pi c^2 h} d\omega_s, \tag{10}$$

得到微圆柱的轴向局域模密度($r<a$)为

$$\rho(\omega, r) = \frac{1}{\hbar\,\omega}\sum_s \delta(\omega - \omega_s) U_s(r)$$

$$= \frac{1}{\hbar\,\omega}\sum_l \int \frac{n^2 a\omega_s}{\pi c^2 h} d\omega_s \delta(\omega - \omega_s) \cdot \frac{1}{2}[\varepsilon E^2(\vec{r}) + \mu H^2(\vec{r})]. \tag{11}$$

最后得到

$$\rho(\omega, r) = \frac{1}{4M}\frac{n^2 a\omega}{\pi c^2 h}\sum_l \{(\varepsilon_1 + \mu\zeta^2) J_l^2(hr) + \frac{1}{2h^2}[\beta^2(1 + \zeta^2) + \omega^2(\varepsilon_1^2 + \mu^2\zeta^2)][J_{l-1}{}^2(hr) + J_{l+1}{}^2(hr)]\}, \tag{12}$$

在自由空间，模密度 $p=\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$，在空间位置上是均匀的，在频率上是连续的. 由式(12)可见，微圆柱的模密度和 $J_i(hr)(i=l-1,l,l+1)$、$J_i(ha)(i=l-2,l-1,l,l+1,l+2)$、$K_i(qa)(i=l-2,l-1,l,l+1,l+2)$、$J_l(ha)$、$K_l(qa)$有关，因此在空间位置上是不均匀的，且在频率上是不连续的. 在这里仅涉及轴向模密度，实际上，在非轴向方向上还存在辐射模，其模密度也具有类似的性质，关于这方面的详细分析以及实验研究将另文发表.

参考文献

1 Lai H M, *et al*. *Phys. Lett. A*, 1987, **119**: 337

2 Ching S C, *et al*. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1987, 4(12): 1995

3 Ching S C, *et al*. *J. Opt. Sco. Am. B*, 1987, 4(12): 2004

4 Economou E N. *Green' s Function in Quantum Physics*, 2nd ed., Berlin: Springer Verlag, 1983: 7

5 Rickayzen G. *Green' s Functions and Condensed Matter*, London: Academic Press Inc. (London) Ltd. 1980: 35

CALCULATION OF THE MODE DENSITY OF DIELECTRIC MICROCYLINDER AND THERMAL RADIATION SPECTRUM *

Zhang Cunzhou Zhang Guangyin
(Department of Physics, Nankai University, Tianjin 300071, *China)*

Pan Xiaoning Wang Qingyue
(Department of Precision Instrument Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, *China)*

Abstract The mode density of dielectric microcylinder in axial direction was calculated by means of electromagnetic theory and quantum theory, and the thermal radiation spectrum was obtained. The result shows that the mode density of dielectric microcylinder is obviously different from that in free space (bulk material), i. e. in free space, the mode density is uniform in space and continuous in frequency, while in microcylinder, the mode density is nonuniform in space and discrete in frequency.

Key words mode density, thermal radiation, spontaneous emission.

* This project supported by the National Natural Science Foundation of China