

用子波网络实现自适应子波变换

斯华龄(Harold Szu)*

(NSWCDD Code B44, Silver Spring/White Oak MD 20903, U.S.A)

摘要 本文从傅里叶变换(FT)的角度引入连续和离散自适应子波变换(WT). 作为应用, 在数学上比较了耳、眼功能和连续WT, 以给人工神经网络(ANN)提供多分辨率分析(MRA)并行输入. 这种巧妙的预处理可以实现特征保持的数据压缩, 避免过训练或过拟合对ANN概括和抽象能力的影响. 这可以用来解释嘈杂鸡尾酒效应. 一个例子是, 对N个数据要求有N阶复杂性快速数据压缩的多波段红外图像, 引入离散WT作为完备、正交和归一化(C.O.N.)基, 如果是哈尔基, 类似于将笛卡尔坐标系旋转45°. 指出子波芯片和神经芯片的配合使用将成为信息与自动化技术的前沿领域.

关键词 子波变换, 傅里叶变换, 神经网络.

引言

1992年, Szu等^[1]发展了自适应子波变换(WT), 利用每个结点是一个子子波的人工神经网络(ANN), 由给定的数据和特定性能目标确定最优的WT核.

在信号分析中, 人们已经使用了窗口或短时傅里叶变换(FT):

$$G(\omega|t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) \exp(-j\omega t) w(t|t_0). \quad (1)$$

其中窗函数 $w(t|t_0)$ 对所有频率具有固定的宽度, 如果它是高斯函数, 式(1)就是盖伯(Gabor)变换. 相反, 为了能够更好地使尖锐图像边缘局部化, 子波变换使用了一个紧支并且宽度随尺度减小而成比例减小的子波核, 见图1.

一个实际的信号通常是局部化和瞬变的, 噪声出现在所有的频率上, 所以通过扩大频率范围来获得高分辨率将导致信噪比(SNR)的下降, 这是因为通常在高频段信号能量的减小量和固定窗接受的等量大小的(白)噪声混在一起. 这个缺陷直到近10年利用地震波成像勘探时^[2]才被发现, 为此 Morlet 提出了一个子波核($\omega_0 \geq 5$)

$$h(t) = \exp(-j\omega_0 t) \exp(-t^2/2), \quad (2)$$

以得到一个零积分区域 $\int dt \exp(-j(\omega=0)t) h(t) = H(\omega=0) = 0$, 即没有直流分量, 这样可

*北京大学和清华大学客座教授

本文1994年11月22日收到. 来稿为英文稿, 由阮志刚译成中文, 陈鲁林校对

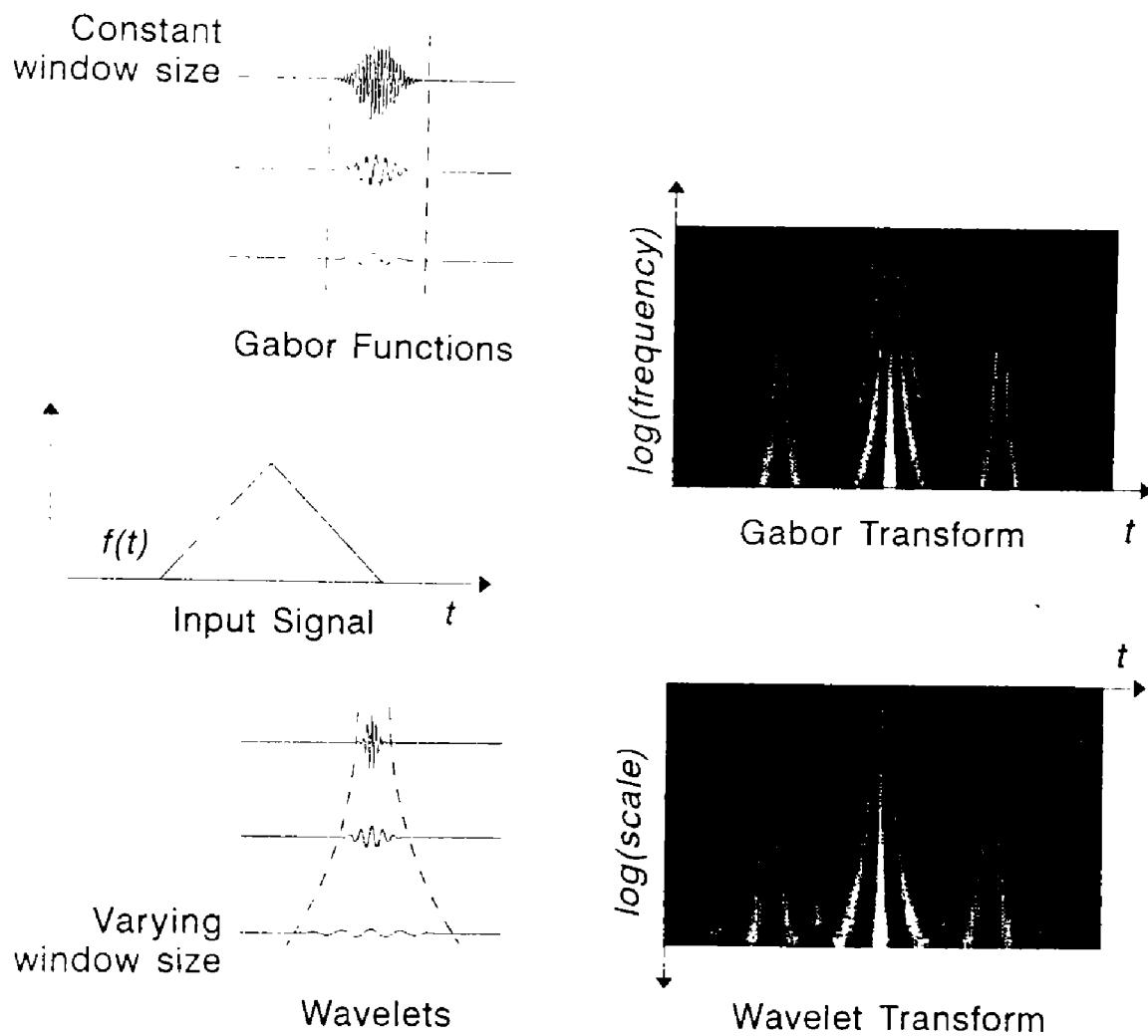


图 1 连续 WT: 具有固定高斯窗的短时傅里叶变换称为盖伯变换,

Morlet 子波变换用于确定顶部地震图像强度不连续性则更好

Fig. 1 Continuous WT: a short-time Fourier transform that has a fixed Gaussian window is called the Gabor transform. Morlet wavelet transform is better in locating a roof-top seismic image intensity discontinuity

以消除均匀回波, 不是通过提高频率, 而是用仿射($\text{scale-}a, \text{shift-}b$)变换将时间相对收缩, 即

$$t \rightarrow t' = (t - b)/a \quad (3)$$

便可生成完备基函数

$$h(t) \rightarrow h(t')/\sqrt{a} \equiv h((t-b)/a)/\sqrt{a} \equiv h_{ab}(t). \quad (4)$$

此时, 如果核函数满足时域上的完备条件, 即

$$\int da/a^2 \int db h_{ab}(t) * h_{ab}(t') = c\delta(t-t'), \quad (5)$$

或者对于偶的和解析的傅里叶幅值重写于频域

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega |H(\omega)|^2 / |\omega| = c < \infty. \quad (6)$$

因此,可接受核函数 $h(t)$ 应避免式(6)中的除零发散,即直流分量 $H(0)=0$ (如 Daubechies 所证明³,它具有比 t^{-1} 更快的振荡衰减). 核函数 $h(t)$ 已被 Morlet, Grossmann, Meyer, Mallat, Coiman, Chui 等称为母子波(mother wavelet)(参阅下列专辑: IEEE Trans. Inf. Theo. March 1992; Opt. Eng. Sept. 1992; IEEE Trans. Sig. Proc. Dec. 1993; Opt. Eng. July 1994).

子波变换(WT)的定义等同于傅里叶 FT $\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(j\omega t)^* g(t) \equiv \langle \exp(j\omega t), g(t) \rangle$, 即

$$G(a, b) = \text{WT}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt h_{ab}(t)^* g(t) \equiv \langle h_{ab}(t), g(t) \rangle. \quad (7)$$

其中内积括号 \langle , \rangle 用复共轭^{*} 定义. 类似地,由 2 维哈尔测度 $[db da/a^2]$ 相当于无量纲的时频乘积 $[dt d\omega]$ (其中 $dt \approx -db, d\omega \approx d(1/a) = -da/a^2$), 逆 WT 定义为

$$g(t) = \text{WT}^{-1}\{G(a, b)\} = (1/c) \int da/a^2 \int db G(a, b) h_{ab}(t) \equiv \langle G(a, b), h_{ab}(t) \rangle. \quad (8)$$

将式(7)代入式(8),得到完备性式(5),它将 $g^*(t')$ 等同映射为 $g(t)$.

与 FT 类似,WT 有连续和离散两种形式. 连续 WT 易于使子波核与特征提取相适应, 离散 WT 则在实现多分辨率数据压缩上计算速度更快.

1 子带编码观点下的离散 WT

正如 Harr⁴ 所提出的,子波构成了一个满足尺度关系的特殊正交坐标系统. 最简单的正交坐标系是著名的笛卡尔坐标系,例如 4 维情形:

$$x = (1, 0, 0, 0), y = (0, 1, 0, 0), z = (0, 0, 1, 0) \text{ 和 } z' = (0, 0, 0, 1),$$

其任意两个坐标轴的内积为零(由分量 $0 \times 1 = 0$ 可知),即意味着正交性. 类似地,哈尔选择了奇偶正交性,即偶函数

$$\varphi(t) = (+, +, +, +)$$

的指向在 4 个正轴的第一象限(orthant)上,奇函数

$$\psi(t) = (+, +, -1, -1)$$

的指向在正 x, y 和负 z, z' 的象限上. 它们的内积为零,意味着 4 维正交性. 而且如果选择 $\psi(2t) = (+, -, 0, 0)$ 的指向在 $x \geq 0, y \leq 0$ 的平面上, $\psi(2t-1) = (0, 0, +, -)$ 的指向在 $z \geq 0, z' \leq 0$ 的平面上,则这个性质在半区间里重复. 例如,任意 4 维矢量,如斜面 g ,可以同样在笛卡尔坐标系和哈尔坐标系上展开,因为二者均是完备的:

$$g = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & + & + & 0 \\ + & + & - & 0 \\ + & - & 0 & + \\ + & - & 0 & - \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \equiv [\mathbf{H}4]G. \quad (9)$$

由矩阵的正交性,即逆矩阵就是转置矩阵,容易算得其中展开系数 G (上标 T 表示矩阵转置操作并且用 $(4,4,2,2)$ 作基归一化处理):

$$G = \{5, -2, -1, -1\}^T = [\mathbf{H}4]^{-1}g = [\mathbf{H}4]^Tg, \quad (10)$$

$$\longleftrightarrow G(a, b) = \langle h_{ab}(t), g(t) \rangle. \quad (7)$$

$O(N)$ 计算复杂性来自于矩阵简化^[6]:

$$[\mathbf{H}4] = \begin{vmatrix} [\mathbf{H}2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{H}2] \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [\mathbf{H}2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

根据这 3 个简化的矩阵,有

$$[\mathbf{H}2] = \begin{vmatrix} + & + \\ + & - \end{vmatrix}. \quad (12)$$

同样地, $[\mathbf{H}8]$ 可以简化到 $[\mathbf{H}4]$. 对于大的 N , 零元素使 $O(N^2)$ 稠密矩阵简化为 $O(N)$ 稠密矩阵. 式(12)也揭示了如下基 2 子带性质.

2 数字滤波器阵列观点下的子带编码

低通 L 和高通 H 滤波器定义了尺度函数 φ 和子波函数 ψ :

$$L\{c_k\} = \{+, +\} \longleftrightarrow \varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) = \sum_k c_k \varphi(2t-k), \quad (13)$$

$$H\{d_k\} = \{+, -\} \longleftrightarrow \psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) = \sum_k d_k \varphi(2t-k). \quad (14)$$

哈尔尺度函数 $\text{rect}(t) = \text{rect}(2t) + \text{rect}(2t-1)$ 满足式(13), 其系数为 $\{1, 1\}$, 这相当于用式(13)的低通滤波器 L 对相邻的两点取平均值. 相似地, 式(14)中的哈尔子波 $H = \{+, -\}$ 是一个高通滤波器, 它取相邻两点的差值. 将任一给定的输入信号, 例如 $\{1, 1\}$, 并行地输入给低通滤波器 $L = \{+, +\}$ 和高通滤波器 $H = \{+, -\}$ (参见图 2 的分析部分), 这样卷积结果为 $\{1, 1\} \times \{+, +\} = \{1, 2, 1\}$ 和 $\{1, 1\} \times \{+, -\} = \{1, 0, -1\}$. 由于平滑作用输出信号可以用较少的点来表示, 对每个通道进行下采样(downsampling), 隔点抽取得 $\{1, 2, 1\} \rightarrow \{1, 1\}; \{1, 0, -1\} \rightarrow \{1, -1\}$. 接收端为了重构进行上采样(upsampling), 内插补零得到 $\{1, 1\} \rightarrow \{1, 0, 1\}; \{1, -1\} \rightarrow \{1, 0, -1\}$. 因为哈尔综合滤波器 $L^+ = \{-, -\}$ 和 $H^+ = \{+, -\}$ 与分析滤波器相同, 重构给出 $\{1, 0, 1\} \times \{-, -\} = \{-1, -1, -1, -1\}$ 和 $\{1, 0, -1\} \times \{+, -\} = \{1, -1, -1, 1\}$, 它们相加 $\{-1, -1, -1, -1\} + \{1, -1, -1, 1\} = \{-2, -2\} = \{1, 1\} \times (-2)$ 就得到了有一因子的原始输入 $\{1, 1\}$. 用上面的例子容易验证, 不进行向下向上采样, 系统

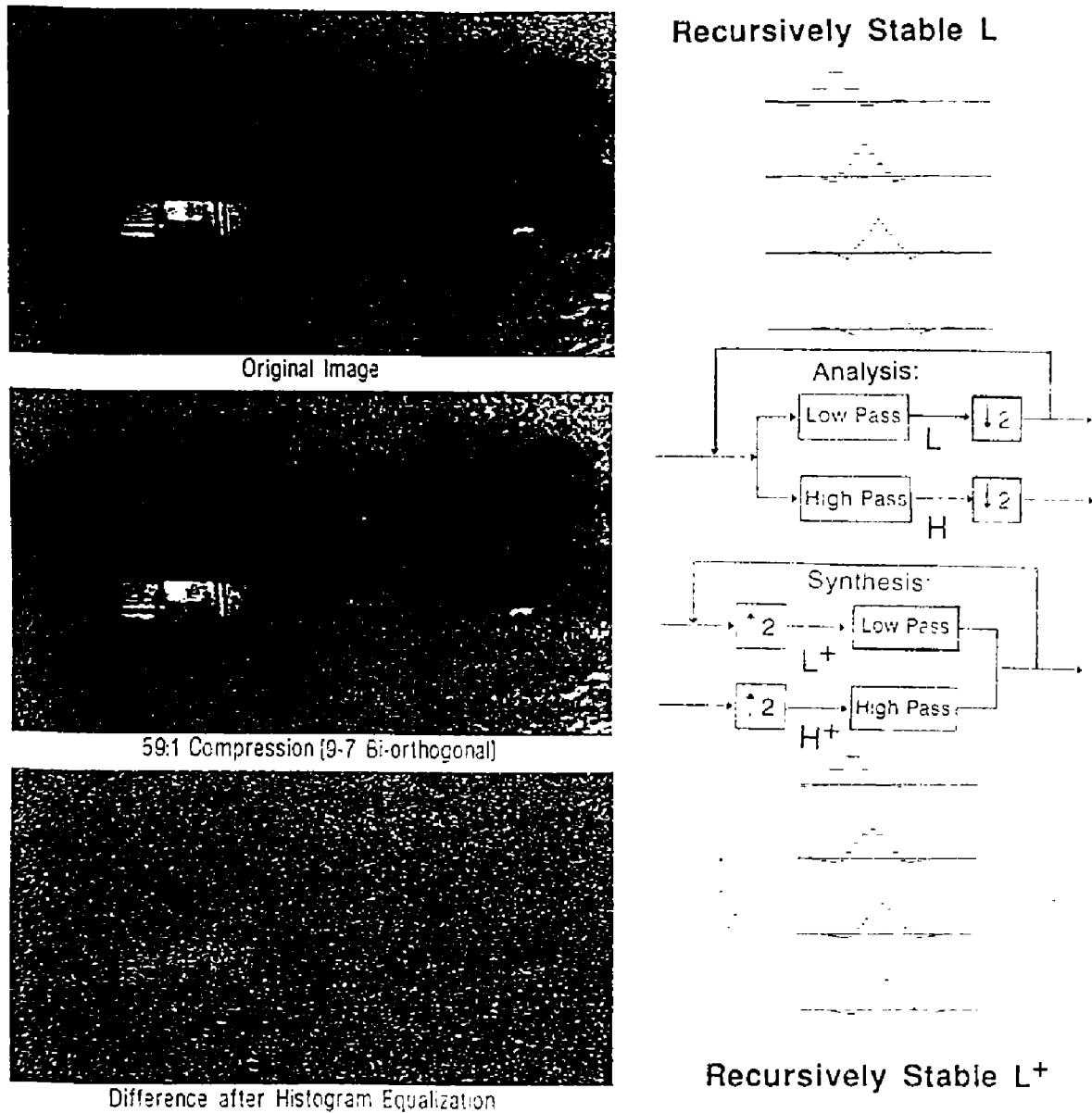


图 2 离散 WT: 迭代双正交子带编码的应用, 将 $S_{7,0}$

(表 1) 用于多光谱红外图像同时获得去传感器噪声和 59:1 数据压缩比

Fig. 2 Discrete WT: applications of iterative biorthogonal subband coding using $S_{7,0}$ (Table 1) to multispectral infrared imagery to achieve simultaneously the sensor de-noise and data compression of 59:1 ratio

也是无损的。实现这种离散 WT 的子带编码滤波器在数字滤波器理论中称为无损正交镜像滤波器。在信道中只传送被称为细节信号的高通输出, 被称为参考信号的低通输出, 通常被反馈输入以递推产生下一级要传送的高通细节信号, 如图 2 所示。由于在递推的每一级都进行 2:1 的下采样, 净像素数保持不变 $N + N/2 + N/4 + \dots = 2N$ 。而在原来的(拉普拉斯金字塔)算法中要存储的数据量会明显增加。但是, 这种下采样过程敏化了量化和较准误差。Daubechies^[3]第一个超越了哈尔系统, 假设分析滤波器 L 和 H 与综合滤波器 L^+ 和 H^+ 相

同，并有简化

$$\left. \begin{array}{l} L = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}, \\ H = \{c_3, -c_2, c_1, -c_0\}. \end{array} \right\} \quad (15)$$

它把 8 个未知数减少到 4 个，这样，这个自伴随系统生成了一个酉矩阵，Vetterli 和 Herley^[6]称之为环酉(paraunitary)矩阵：

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_3 \\ c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \\ c_3 & -c_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma c_i^2 & 0 \\ 0 & \Sigma c_i^2 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

这样，只需 4 个方程确定 4 个未知数：(1)低通尺度方程(13)用 $\int dt \varphi(t) = 1$ 归一化，得到 $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 2$ ；(2)为了检测出变化，高通子波滤波器 H 式(14)应该消除常数(1, 1, 1, 1)： $c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0$ ；(3)还应消除线性斜坡(1, 2, 3, 4)： $c_3 - 2c_2 + 3c_1 - 4c_0 = 0$ ；(4)两个子子波对于位移量 2 应是正交的： $(c_1, -c_2, c_1, -c_0, 0, 0)(0, 0, c_3, -c_2, c_1, -c_0)^T = c_1 c_1 + c_0 c_2 = 0$ 。它们唯一确定了有 4 个滤波器系数的 $L = (1, 3, 3, 1)/4 + (1, 1, -1, -1)\sqrt{3}/4$ (见表 1)。WT 对于滤波器阵列理论的贡献是发现了正则性条件的重要性，这个条件意味着通过递推方法求解式(13)中的尺度函数 $\varphi(t)$ 是收敛的。所以，移位型 $\varphi(2t - k)$ 给出子波式(14)，这样，连续 WT 即 $\langle g(t), \varphi(t) \rangle$ 可以用离散 WT 来近似，即滤波器阵列卷积结果 $g * H$ 。注意正则性条件是必要的但不充分，因为它仍可能产生非对称的和类分维(fractal-like)的尺度函数，这很不适合于图像压缩，因为图像的边界值通常利用假设为它的镜像对称值来外推。对称的 4 阶尺度函数在具有 8 个系数的双正交系统 $L \neq L^\perp$; $H \neq H^\perp$ (表 1) 中仍是酉的：

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & -\alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\alpha^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 - 2 \end{vmatrix}.$$

由于离散 WT 是线性的，所以它只是重新安排了信息内容。数据压缩必须来自动态范围的压缩，后者则利用了滤波后细节较少的图像对每一像素要求较少比特数这一事实。在这样的做法中递归滤波的收敛性主要取决于迭代中滤波器的稳定性，即所谓的正则性质。在双正交系统中，分析滤波器 $L \neq L^\perp$ ，所以二者都必须是正则的。遗憾的是，简单的 4 阶 L^\perp 往往不是正则的。在表 1 中只有样条 $S_{9,7}$ 系统满足正则性条件，其 L 有 9 个系数，伴随的 L^\perp 有 7 个系数。所以，如 Antonini 等^[7] 表明，它适合于图像压缩。事实上，FBI 已经用它演示了一个无损的 20 : 1 的指纹压缩^[8]，这无疑将会有益于减少刑事案件。一个附加的好处是，利用选择性重建方法我们可以抑制噪声或清除杂波。在图 2 中我们对多光谱红外图像递归使用四次 $S_{9,7}$ ，结果表明，当舍去第一级细节信号时，非均匀的红外探测器噪声亦被去除。

在保持目标特征的基础上获得 59:1 的压缩比.

表 1 分析/分解和综合/重构滤波器

Table 1 Analysis/decomposition and synthesis/reconstruction filters

系统	L	H	L'	H'
Harr h2	1,1	1,-1	-1,-1	1,-1
Hat H3	1,2,1	1,2,-6,2,1	-1,2,6,2,-1	1,-2,1
Spline S ₁	1, α, α, 1	1, α, -α, -1	-1, α, α, -1	1, -α, α, -1
Spline S _{9,7}	.04,-.02,-.1,.4,.9, .4,-.1,-.02,.04	-1×L 的偶项 -1×H 的奇项	-.06,-.04,.1,.8, .4,-.04,-.06	
Daubechies:4xD ₁	$1 + \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{3}$, $-3 + \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, $-1 - \sqrt{3}$	同 L	同 H
Laplacian Pyramid	$1+2a, 1, 4a, 1, 1-2a$	差值图像	同 L	同 H

3 自适应子波变换——子波网

对于识别来说,子波特征的正交性并不那么重要,这是因为它们仅对训练数据进行分类.由于分类器一般需要较长的离线训练,在训练中使子波特征与分类器相适应是降低误分率的一种颇具吸引力的方法. Szu 等^[9]在神经网络的预处理中,使用了一个在 a, b 域上的楔形滤波器进行尺度不变分类.

此外,我们希望通过自适应地构造可接受母子波的叠加——超母子波(supermother wavelet)来更好地匹配各类信号.这样,表示信号所需的项数大大减少,并且当有扰动时在冗余性和稳定性的意义上,每一项的鲁棒性得以提高. 我们把 Szu 等^[10]的自适应子波定理表述为:可接受母子波的线性叠加仍是可接受的.这个定理允许我们在人工神经网络中使用的监督训练方法,用带噪声的样本和自上而下的性能测度来为每一音素构造超母子波^[11]. 鸡尾酒会效应是个有趣的例子,在嘈杂的酒会中,无论自己的名字被用什么音调叫出来,自己总能听到. 在这个例子中,自己的名字是一个宽带瞬变子波 $h(t)$. 这些子子波被称为“子波元”(wavenons),它们与辐射基函数相似,但通过仿射变换相联系,所以,通过特定的子子波神经元可以并行地匹配输入信号——名字加噪声,然后采用胜者为王(winner-take-all)的方法抑制来自其它子子波神经元而信噪比较差的贡献.这就去除了其它匹配较差而噪声贡献多于信号的子子波神经元.因此子波网(wavenet)增强了相对信噪比,解释了鸡尾酒会效应.最近,Mallat 和 Zhang^[11]讨论了一种 $O(N \log N)$ 快速算法,用匹配追踪(matching pursuit)方法构造冗余波形集来匹配信号类别.

4 讨论

自适应子波变换通过模仿人耳和人眼可以克服仪器数据输出和提供给类似大脑计算的多分辨率输入之间的不匹配。这里存在若干技术上实现的问题：(1)对于数字化误差和像素寄存误差不太敏感而有 N 阶量算法的快速离散 WT；(2)可编程、模块化和可插入的子波芯片；(3)针对用户的基于自适应子波算法的神经网络。还有一些关于子波变换的问题应引起注意：(1)用子波变换将非线性偏微分方程(PDE)转换为常微分方程(ODE)，其中子波核为简化的非线性ODE的特解，例如 Szu 关于三次薛定谔或 KdV 方程的孤子母子波，该方程为 Navier-Stokes 流体动力学的子集；(2)用于 2 维不可分子波有 Barnesly 式拼贴定理的 2 维尺度方程，例如用小枫叶构成的枫叶；(3)由 Strang 引入的多尺度方程和由 Chui 引入的尺度 3。

实时压缩和恢复的能力将会极大地应用于宽带综合业务数字网(B-ISDN)的高清晰度电视、指纹、医学图像的传输等全球市场中的图像电话(picture phone)领域。用软件和硬件实现的快速离散子波变换将在警戒和通信应用中发挥重要作用。子波芯片和神经芯片的配合将推动信息自动化技术的前进。简而言之，实际的信息处理是一个宽带瞬变过程(其英文缩写 WT 使我们想到实现它的有效工具 WT)。自由地使子波核适应于模拟人耳和人眼将会在多分辨率分析、神经动力学、混沌和模糊逻辑方面开辟新的研究与开发领域。

致谢 承蒙 NSWCDD 独立研究基金资助。

参考文献

- 1 Szu H, Telfer B, Kadambe S. *Opt. Eng.*, 1992, **31**(9), 1907~1916
- 2 Combes J M, Grossmann A, Tchamitchian P, eds. *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space*, New York, Springer-Verlag, 1989
- 3 Daubechies I. *SIAM Phil PA*, 1992
- 4 Haar A. *Math. Annal.*, 1910, **69**: 331~371
- 5 Strang G. *Am. Sci.*, 1994, **82**: 150~255
- 6 Vetterli M, Herley C. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 1992, **40**(9): 2207~2232
- 7 Antonini M, Barlaud M, Mathieu P, et al. *IEEE Trans. Image Proc.*, 1992, **1**(2): 205~220
- 8 Hopper T. *Proc. SPIE*, 1994, **2242**: 18~187
- 9 Szu H, Yang X Y, Telfer B, et al. *Phys. Rev. E*, 1993, **48**(2): 1497~1501
- 10 Szu H, Telfer B. *Opt. Eng.*, 1994, **33**(7): 2111~2124
- 11 Mallat S. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 1989, **PAMI-11**, 674~693

ADAPTIVE WAVELET TRANSFORMS BY WAVENETS

Harold Szu *

(NSWCDD Code BM, Silver Spring/White Oak MD 20903, U. S. A)

Abstract In this paper, both continuous and discrete adaptive Wavelet Transforms (WT) are introduced from Fourier Transform (FT) viewpoint. As applications, the functionality of ears and eyes is compared mathematically with the Continuous WT in order to produce Multi — Resolution Analysis (MRA) parallel inputs to Artificial Neural Networks (ANN). Such a smart MRA preprocessing can accomplish a feature-preserving data compression that avoids the overtraining or overfitting plagued the ANN's ability of generalization and abstraction, which can explain the noisy drinking cocktail party effect and the old saying that the beauty is in the eyes of beholder. For example, for a multiband infrared image that requires a fast data compression, of the order (N) complexity for N data, the discrete WT is introduced to be a complete, orthogonal and normalized (C. O. N.) basis, similar to the 45° rotation of the Cartesian Coordinates in case of Haar. The synergism between (7, 9) biorthogonal FBI Wavelet chips with Neural chips is pointed out, which may become the frontier of information and automation technologies.

Key words wavelet transforms, Fourier transforms, neural networks.



Dr. Szu received a Ph. D. from Rockefeller University in 1971, and worked at the Naval Research Laboratory for 15 years. He is currently the Information Science group leader at Naval Surface Warfare Center, Dahlgren Division (NSWCDD) and a Science Advisor to the NSWCDD Technical Director. He is a Fellow of SPIE, has published more than 200 technical papers, and holds six patents. He hosted the SPIE Institute for Advanced Optical Technologies in Leesburg, VA in 1986. That meeting led to the formation of the International Neural Network Society (INNS) in the following year. He is a cofounder of INNS, has been its Secretary/Treasurer since 1987 and served as President in 1993. He is the Editor-in-Chief of the INNS Press for a five-year term. He was editor-in-chief of the Journal of Neural Network Computing from 1989 to 1991, and is currently on the Editorial Boards of *Neural Networks* and the *Journal of Neurocomputing* (Elsevier). He has been Chair of Wavelet Applications at SPIE-Orlando since 1992. He will be the 1995 Chairman of the Gordon Research Conference on Holography and Optical Signal Processing. He edited special issues of *Optical Engineering* on the wavelet transform in September 1992 and July 1994. His current research involves neural network pattern recognition, wavelet pre-processing, optical computing, photonic storage and hardware implementations. He is known for his contributions in self reference matched filters, Cauchy simulated annealing, self-organization in neural network architectures, spatiotemporal chaotic neural nets for information processing, and the bifurcation-cascade for fuzzy-membership function.