

多层介质 PTR 的矩阵方法*

钱霖 吴志明** 李佩赞

(苏州大学物理系, ** 苏州大学分析测试中心, 江苏, 苏州, 215006)

摘要: 从介质层的特性矩阵出发, 导出了多层介质热波透射系数和反射系数的矩阵计算公式, 并由此推出多层样品光热辐射信号的表达式. 给出的两个三层样品的计算结果与实验值符合得很好.

关键词: 光热辐射测量 (PTR), 多层介质, 特性矩阵.

引言

光热辐射测量技术 (PTR) 是新发展的测试技术^[1], 并已应用于测量涂层厚度^[2], 材料热物性、复合材料的无损检测^[3]等. J. Opsal^[4] 发展了多层一维 PTR 理论, 但没有考虑样品内部由于吸收入射光而产生的内热源. 李佩赞、吴志明^[5] 等进一步分析了多层 PTR 理论, 得出了多层样品的递推公式, 以及三层样品 PTR 信号的振幅和位相表达式. 但计算较为繁杂, 无显式表示. 本文将样品中产生的周期性热效应视为样品中热波的传递, 类比于介质中光波的传播, 导出热波在不同介质界面上的反射系数和透射系数, 讨论了计算多层样品 PTR 信号的矩阵方法. 它具有物理概念清楚, 物理图像清晰, 计算简便等优点, 尤其对三层以上样品的计算机处理, PTR 的矩阵方法可显示出更多的长处. 本文还给出测量实例, 验证了矩阵方法的正确性.

1 任意层介质中的热波

图 1 为多层介质示意图. 多层介质样品置于空气中, 样品前表面受到一垂直入射的调制光辐照. 在入射光均匀照射样品表面和调制光频率不很低的条件下^[6], 可作一维情况讨论. 探测到的 PTR 信号正比于样品表面的温度交变量 $\phi(0)$ 或 $\phi(z_N)$ ^[1]. 其中第 m 层的温度 $\phi_m(z, t)$ 由该层的热扩散方程确定:

$$k_m \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial z^2} - \rho_m C_m \frac{\partial \phi_m}{\partial t} = -Q_m(z) e^{j\omega t}, \quad (1)$$

本文 1992 年 4 月 25 日收到, 修改稿 1993 年 6 月 1 日收到.

* 国家自然科学基金资助项目.

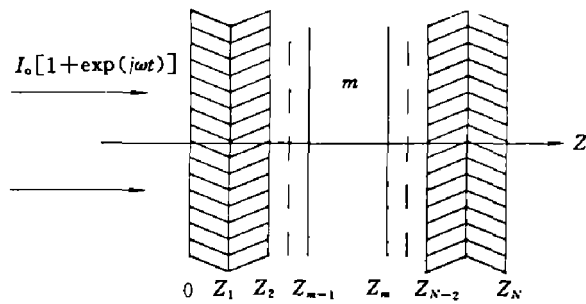


图 1 多层介质示意图
Fig. 1 Schematic diagram of multilayer structures

类似于光波在介质中的传播. 其中 $\sigma_m = (1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_m}}$, $\alpha_m = \frac{k_m}{\rho_m c_m}$ 为热扩散率. D_m 、 C_m 为由边界条件确定的待定系数.

2 热波在界面上的反射系数和透射系数

设半无限介质 1、2 以 $z=0$ 为分界面, 热波在介质 1 内垂直入射于界面, 复振幅为 $U_0 e^{-\sigma_1 z}$. 热波在界面上发生透射和反射, 透射波为 $D_2 e^{-\sigma_2 z}$, 反射波为 $C_1 e^{\sigma_1 z}$. 由界面上温度连续和热流连续条件可解得热波在界面上的反射系数和透射系数分别为:

$$\begin{cases} r_{12} = \frac{C_1}{U_0} = \frac{k_1 \sigma_1 - k_2 \sigma_2}{k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2}, \\ t_{12} = \frac{D_2}{U_0} = \frac{2k_1 \sigma_1}{k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2}. \end{cases} \quad (2)$$

3 多层介质的热波反射系数和透射系数

3.1 介质层的特性矩阵

分析图 1 中第 m 层介质与第 $m-1$ 层介质中热波复振幅之间的关系. 每层介质中正反方向传递的热波有:

$$\begin{cases} \phi_{m-1}(z) = C_{m-1} e^{\sigma_{m-1} z} + D_{m-1} e^{-\sigma_{m-1} z}, \\ \phi_m(z) = C_m e^{\sigma_m z} + D_m e^{-\sigma_m z}. \end{cases} \quad (3)$$

由 $z=z_{m-1}$ 界面上温度连续和热流连续可得到它们之间的关系, 并表示成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} C_{m-1} e^{\sigma_{m-1} z_{m-1}} \\ D_{m-1} e^{-\sigma_{m-1} z_{m-1}} \end{bmatrix} = [L_{m-1}] \begin{bmatrix} C_m e^{\sigma_m z_{m-1}} \\ D_m e^{-\sigma_m z_{m-1}} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式 (1) 中 k 为导热系数, ρ 、 C 分别为样品的密度和比热, $Q(z)$ 是入射光激励下样品内部产生的内热源, 下标 m 表示第 m 层介质. 内热源强度为

$$Q_m = \beta_m I_0 \exp \left\{ - \sum_{l=1}^{m-1} \beta_l d_l - \beta_m (z - z_{m-1}) \right\},$$

式中 β 是光吸收系数, d 为某层的厚度.

由于调制入射光的激励, 在样品中产生周期性热效应, 它在样品各层中以波动的形式 (热波) 沿着 z 方向传递^[7,8]. 正向热波的复振幅为 $D_m e^{-\sigma_m z}$, 反向热波的复振幅为 $C_m e^{\sigma_m z}$,

$$[L_{m-1}] = \frac{1}{t_{m-1,m}} \begin{bmatrix} 1 & r_{m-1,m} \\ r_{m-1,m} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

式(4)中 $C_{m-1}e^{\sigma_{m-1}z_{m-1}}$ 、 $D_{m-1}e^{-\sigma_{m-1}z_{m-1}}$ 、 $C_me^{\sigma_m z_{m-1}}$ 、 $D_me^{-\sigma_m z_{m-1}}$ 分别代表界面 $z = z_{m-1}$ 处相邻介质层的反向热波和正向热波的复振幅. 式(4)中 $[L_{m-1}]$ 为界面 z_{m-1} 处的转换矩阵. 而 m 层中任意处 z 的热波复振幅与 $m-1$ 层的热波复振幅的关系为

$$\begin{bmatrix} C_{m-1}e^{\sigma_{m-1}z_{m-1}} \\ D_{m-1}e^{-\sigma_{m-1}z_{m-1}} \end{bmatrix} = [M_m(z - z_{m-1})] \begin{bmatrix} C_me^{\sigma_m z} \\ D_me^{-\sigma_m z} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [M_m(z - z_{m-1})] &= [L_{m-1}] \begin{bmatrix} e^{-\sigma_m(z-z_{m-1})} & 0 \\ 0 & e^{\sigma_m(z-z_{m-1})} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{t_{m-1,m}} \begin{bmatrix} e^{-\sigma_m(z-z_{m-1})} & r_{m-1,m}e^{\sigma_m(z-z_{m-1})} \\ r_{m-1,m}e^{-\sigma_m(z-z_{m-1})} & e^{\sigma_m(z-z_{m-1})} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (7)$$

矩阵 $[M_m(z - z_{m-1})]$ 为 m 层的特性矩阵.

3.2 多层介质中热波的反射系数与透射系数

热波由 $z = 0$ 表面入射, 在多层介质中传递时每经过一个界面, 均要产生透射和反射. 经 $z = z_{m-1}$ 界面后进入第 m 层介质, 透射波复振幅为 $D_me^{-\sigma_m z}$, 在空气中反射波为 $C_0e^{-\sigma_0 z}$. 它们都是各界面透射、反射和各层介质中传递的累积效果, 其值可由上述矩阵关系逐层计算. 即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_0 \\ D_0 \end{bmatrix} &= [M_1(z_1 - 0)] \begin{bmatrix} C_1e^{\sigma_1 z_1} \\ D_1e^{-\sigma_1 z_1} \end{bmatrix} = [M_1(d_1)][M_2(d_2)] \begin{bmatrix} C_2e^{\sigma_2 z_2} \\ D_2e^{-\sigma_2 z_2} \end{bmatrix} \\ &= \dots = \underbrace{[M_1(d_1)][M_2(d_2)] \cdots [M_{m-1}(d_{m-1})][L_{m-1}]}_{\text{记为} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} C_me^{\sigma_m z_{m-1}} \\ D_me^{-\sigma_m z_{m-1}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

当分析热波经过 $m-1$ 层介质的透射系数 $t_{0m} = \frac{D_me^{-\sigma_m z_{m-1}}}{D_0}$ 和反射系数 $r_{0m} = \frac{C_0}{D_0}$ 时, 应将 m 层介质视为半无限大, 故 $C_m = 0$, 即得

$$\begin{bmatrix} r_{0m} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t_{0m} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式(9)中 $t_{0m} = \frac{1}{h_{22}}$, $r_{0m} = \frac{h_{12}}{h_{22}}$.

同样, 热波由 m 层内入射 $z = z_m$ 界面, 经 $N-m$ 层介质后, 在 $z = z_N$ 界面透射至

空气(下标为 $N+1$), 其透射系数 $t_{m,N+1}$ 和反射系数 $r_{m,N+1}$ 由下式表示:

$$\begin{bmatrix} r_{m,N+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{[M_{m+1}(d_{m+1})][M_{m+2}(d_{m+2})] \cdots [M_N(d_N)][L_N]}_{\text{记作 } \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ t_{m,N+1} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式(10)中 $r_{m,N+1} = \frac{l_{12}}{l_{22}}$, $t_{m,N+1} = \frac{1}{l_{22}}$.

4 多层样品前后表面的温度表达式

热波在多层介质中的传递与光波在介质中的传播十分相似, 各界面间的温度和热流连续的条件都包含在热波的反射系数和透射系数之中. 因此, 方程(1)的求解可采用热波传递的概念来分析.

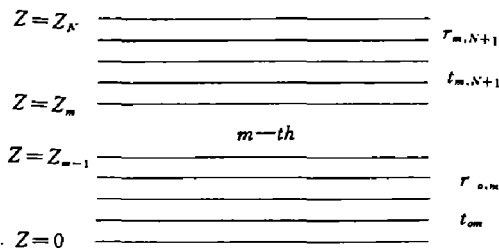


图2 第 m 层介质示意图
Fig. 2 Schematic diagram of the m -th layer

考虑任意第 m 层对表面温度的贡献, 将它看成是置于空气中的单层介质. 相对于前后空气的反射系数和透射系数分别为 r_{0m} , t_{0m} , $r_{m,N+1}$, $t_{m,N+1}$ (见图2).

在第 m 层内 $z = z_0$ 处取一薄层元 dz , 内热源强度为 $Q_m(z_0)$, 该薄层产生温度场为正向波 $U_m(z_0) dz e^{-\sigma_m(z-z_0)}$ 和反向波 $U_m(z_0) dz e^{\sigma_m(z-z_0)}$. 从薄层流出的热量 $2k_m \sigma_m U_m(z_0)$ 相当于内热源产

生的热量, 即 $U_m(z_0) = \frac{Q_m(z_0)}{2k_m \sigma_m}$.

正向热波到达 $z = z_m$ 界面后, 一部分透射至空气(下标为 $N+1$), 另一部分以 $r_{m,N+1}$ 比例反射后到达 $z = z_{m-1}$ 界面, 与反向热波一样以比例 t_{m0} 透射到空气(下标为 0). 由于第 m 层介质如同平行平面谐振腔, 所以通过前表面透射至空气的热波是所有无穷次透射波的迭加. 而第 m 层介质对表面温度的贡献应是全部薄层元贡献的总和. 经计算可得:

$$\phi_m(0) = \frac{t_{m0}}{2k_m \sigma_m} \frac{I_0 \beta_m e^{-\sum_{l=1}^{m-1} \beta_l d_l}}{e^{\sigma_m d_m} - r_{m0} r_{m,N+1} e^{-\sigma_m d_m}} \cdot \left(\frac{e^{\sigma_m d_m} - e^{-\beta_m d_m}}{\beta_m + \sigma_m} + r_{m,N+1} \frac{e^{-\sigma_m d_m} - e^{-\beta_m d_m}}{\beta_m - \sigma_m} \right). \quad (11)$$

用相同的方法, 计算得第 m 层介质对后表面温度的贡献为

$$\phi_m(z_N) = \frac{t_{m,N+1}}{2k_m \sigma_m} \frac{I_0 \beta_m e^{-\sum_{l=1}^{m-1} \beta_l d_l}}{e^{\sigma_m d_m} - r_{m0} r_{m,N+1} e^{-\sigma_m d_m}} \cdot \left(\frac{1 - e^{-(\beta_m - \sigma_m) d_m}}{\beta_m - \sigma_m} + r_{m0} \frac{1 - e^{-(\beta_m + \sigma_m) d_m}}{\beta_m + \sigma_m} \right). \quad (12)$$

多层样品的表面温度则是样品中各层介质对表面温度贡献的迭加:

$$\phi(0) = \sum_{m=1}^N \phi_m(0); \quad \phi(z_N) = \sum_{m=1}^N \phi_m(z_N). \quad (13)$$

5 实验验证

我们以铝片上镀铜和康铜片上镀镍的两个三层样品为例, 实验验证了多层介质矩阵方法的正确性.

样品的有关数据如表 1 所示. 入射光为经调制的 CO_2 激光 ($10.6 \mu\text{m}$). 用致冷的铯镉汞探测器测量样品表面的光热信号, 经前置放大器和锁相放大器放大后记录.

表 1 样品的各层参数
Table 1 Parameters for each layer of the samples

样品	厚度 $d(\text{mm})$			导热系数 ($\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$)			热扩散率 $\alpha(\times 10^5 \text{m}^2/\text{s})$		
	d_1	d_2	d_3	k_1	k_2	k_3	α_1	α_2	α_3
CuAlCu	0.200	0.400	0.200	386	204	386	11.234	8.418	11.234
NiCuNi	0.120	0.096	0.110	17.0	24.9	17.0	0.444	0.730	0.444

由式 (12) 和式 (13), 并且考虑到铜和镍对 $10.6 \mu\text{m}$ 的红外辐射的强烈的吸收, 得到三层样品后表面的温度计算公式为

$$\phi(z_N) = \frac{t_{14}}{2k_1\sigma_1 e^{\sigma_1 d_1} - r_{10}r_{14}e^{-\sigma_1 d_1}} \frac{1 + r_{10}}{I_0} = \frac{I_0}{2k_1\sigma_1 l_{22}e^{\sigma_1 d_1} - r_{10}l_{12}e^{-\sigma_1 d_1}} \frac{1 + r_{10}}{I_0}. \quad (14)$$

式 (14) 中 l_{12}, l_{22}, σ_1 都是复数, $\phi(z_N)$ 中包含了振幅和位相因子, 而且随着调制频率而变化. 由式 (10) 可见, l_{22}, l_{12} 是下列矩阵的乘积:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = [M_2(d_2)][M_3(d_3)][L_3]. \quad (15)$$

将表 1 中数据代入式 (14) 和式 (15), 计算得上述两种样品后表面 $\phi(z_N)$ 的振幅与频率的关系曲线如图 3 所示. 由实验测得的后表面 PTR 信号如图 3 中 \circ 和 \bullet 所示. 由图 3 可见, 理论值与实验值符合得很好.

6 结论

本文详细分析了样品因吸收调制光而产生的热波在多层介质中的传播行为. 采用矩阵

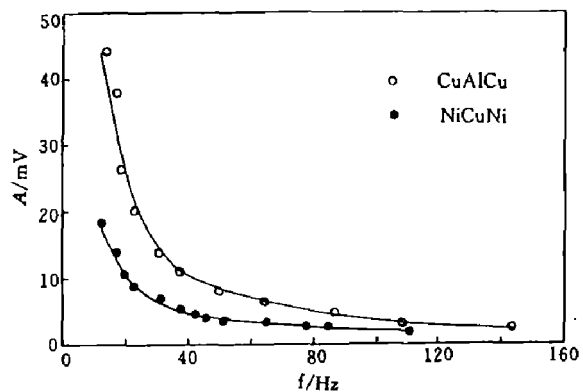


图 3 三层样品后表面 PTR 信号振幅与频率关系图

Fig. 3 Amplitude vs. frequency curves of PTR signal at rear surface of three-ply sample

方法, 把热波在某层介质中的传播用该层介质的特性矩阵 $[M]$ 来描述; 把热波在边界上的传递用界面的转换矩阵 $[L]$ 来描述, 并引入热波在界面上的反射系数与透射系数. 从而用简洁的方法给出了多层介质 PTR 信号的显式表达式, 实际测量结果证明这种方法给出的结果是正确的. 该矩阵方法具有物理意义清楚, 计算简便, 易于计算机处理和定量分析等优点. 由于显式结果中各层贡献相对独立, 对进一步分析各层介质在多层样品中对 PTR 信号的影响十分有利.

参考文献

- 1 Nordal P E, Kanstad S O. *Infrared Phys.*, 1985;**25**(1):295~304
- 2 Rosencwaig A, Opsal J, Willenborg D L. *Appl. Phys. Lett.*, 1983;**43**(2):166~168
- 3 Leung W P, Tam A C. *J. Appl. Phys.*, 1988;**63**(9):4505~4510
- 4 Opsal J, Rosencwaig A. *J. Appl. Phys.*, 1982;**53**(6):4240~4246
- 5 李佩赞, 吴志明等. *红外研究*, 1990;**9**(3):215~220
- 6 钱霖, 李佩赞. *光学学报*, 1990;**10**(3):276~279
- 7 Murphy C, Aamodt L C. *J. Appl. Phys.*, 1980;**51**(7):4580~4584
- 8 Busse G, Eyerer P. *Appl. Phys. Lett.*, 1983;**43**(4):355~357

MATRIX METHOD OF PHOTOTHERMAL RADIOMETRY FOR MULTILAYER MEDIA*

QIAN LIN, WU ZHIMING**, LI PEIZAN

(*Department of Physics, Suzhou University, **Center of Analysis and Measurement,
Suzhou University, Suzhou, Jiangsu 215006, China*)

Abstract: Based on the characteristic matrix of a lamellar structure, a matrix method about thermal wave transmission and reflection coefficients is presented, and a calculating formula for photothermal radiometry signal of the multilayer media is given. The results of two three-ply samples calculated by this method are in good agreement with experimental data.

Key words: photothermal radiometry (PTR), multilayer media, characteristic matrix.

*The project supported by the National Natural Science Foundation of China.