

# 回旋媒质偏心加载圆波导的传输特性

沈忠祥

(南京航空学院电子工程系, 江苏, 南京, 210016)

**摘要:** 利用基于 Bessel 函数加法定理的坐标变换, 获得了关于回旋媒质偏心加载圆波导中传播常数的特征方程. 文中给出了回旋介质棒偏心加载圆波导时的色散特性曲线, 并讨论了传播常数随各参数的变化.

**关键词:** 电磁场, 波导, 回旋媒质, 回旋波导.

## 引言

近年来由于聚合物科学和人造介质材料工艺的进展, 使得在微波和毫米波频段制造具有旋电磁特性的回旋媒质成为可能<sup>[1]</sup>. 因此近年来有关回旋媒质的研究工作引起了众多学者的兴趣<sup>[2-12]</sup>.

1989年, Engheta 和 Pelet<sup>[6]</sup>提出了回旋波导 (chirowaveguide), 它是由在柱形波导中填充回旋媒质构成的. 由于填充材料的旋光特性, 回旋波导有望在集成光学、通信系统、电子器件和印刷天线等方面获得应用.

本文从理论上分析了回旋媒质偏心加载圆波导的传播特性. 偏心加载回旋介质棒的圆形波导比全填充圆形回旋波导具有较大的设计灵活性, 而且在移相器和隔离器的设计中有望获得实用. 本文推导了偏心加载回旋介质棒的圆波导各区域中的电磁场表达式, 由边界条件导出了计算各次模传播常数的特征方程; 给出了若干数值结果, 并作了简要讨论.

## 1 理论推导

对于时谐场 ( $e^{-j\omega t}$ ), 描述回旋媒质的基本关系式为:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + j\xi_c \vec{B}, \quad (1)$$

$$\vec{H} = j\xi_c \vec{E} + \vec{B} / \mu, \quad (2)$$

其中  $\epsilon$ ,  $\mu$  和  $\xi_c$  分别是回旋媒质的介电常数、导磁率和回旋导纳 (chirality admittance). 圆柱形波导偏心加载回旋介质棒的横截面结构如图 1 所示. 图中区域 I 是回旋媒质所在区域, 区域 II 中的媒质是各向同性非回旋的. 假定传播方向与圆波导的轴向相同, 且均为  $z$

向, 则波导中所有电磁场分量均按因子  $e^{j\beta z}$  变化, 这里  $\beta$  是传播常数. 文中省略了因子  $e^{j\beta z - j\omega t}$ .

根据回旋波导理论<sup>[7~9]</sup>, 回旋媒质区域 I 中的纵向场分量可以用函数  $U^+$  和  $U^-$  表示为

$$E_{z1} = P^+ U^+ + P^- U^-, \quad (3)$$

$$jH_{z1} = (P^+ U^+ - P^- U^-) / \eta_c, \quad (4)$$

其中  $U^+$  和  $U^-$  满足:

$$\nabla_t^2 U^+ + P^+ U^+ = 0, \quad (5)$$

$$\nabla_t^2 U^- + P^- U^- = 0; \quad (6)$$

且

$$P^\pm = (k^\pm)^2 - \beta^2,$$

$$k^\pm = \pm \omega \mu \xi_c + \sqrt{k^{\mp 2} + (\omega \mu \xi_c)^2},$$

$$\eta_c = \sqrt{\mu / (\varepsilon + \mu \xi_c^2)},$$

$$k^{\mp 2} = \omega^2 \mu \varepsilon, \quad \mu = \mu_{r1} \mu_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_{r1} \varepsilon_0.$$

对于区域 I, 采用以 0 为原点的极坐标系  $(\rho, \varphi)$ , 则可得  $U^+$  和  $U^-$  分别为

$$U^+ = \sum_n A_n J_n(\sqrt{P^+} \rho) e^{jn\varphi}, \quad (7)$$

$$U^- = \sum_n B_n J_n(\sqrt{P^-} \rho) e^{jn\varphi}, \quad (8)$$

式中  $J_n$  为  $n$  次第一类 Bessel 函数,  $A_n$  和  $B_n$  是待定常数. 由式 (3), (4) 和回旋波导理论<sup>[8]</sup> 可得

$$E_{z1} = \sum_n [P^+ J_n(\sqrt{P^+} \rho) A_n + P^- J_n(\sqrt{P^-} \rho) B_n] e^{jn\varphi}, \quad (9)$$

$$jH_{z1} = \sum_n [P^+ J_n(\sqrt{P^+} \rho) A_n - P^- J_n(\sqrt{P^-} \rho) B_n] e^{jn\varphi} / \eta_c, \quad (10)$$

$$E_{\varphi 1} = \sum_n [S_n^+(\rho) A_n + S_n^-(\rho) B_n] e^{jn\varphi}, \quad (11)$$

$$jH_{\varphi 1} = \sum_n [S_n^+(\rho) A_n - S_n^-(\rho) B_n] e^{jn\varphi} / \eta_c, \quad (12)$$

其中

$$S_n^\pm(\rho) = -\beta n J_n(\sqrt{P^\pm} \rho) / \rho \mp k^\pm \sqrt{P^\pm} J_n'(\sqrt{P^\pm} \rho).$$

由于区域中的媒质是非回旋的, 因此可由 Helmholtz 方程<sup>[13]</sup> 直接导出

$$E_{z2} = \sum_n [C_n J_n(\gamma_2 \rho) + D_n Y_n(\gamma_2 \rho)] e^{jn\varphi}, \quad (13)$$

$$jH_{z2} = \sum_n [E_n J_n(\gamma_2 \rho) + F_n Y_n(\gamma_2 \rho)] e^{jn\varphi}, \quad (14)$$

$$E_{\varphi 2} = \sum_n \left\{ \frac{-n\beta}{\gamma_2^2 \rho} [C_n J_n(\gamma_2 \rho) + D_n Y_n(\gamma_2 \rho)] - \frac{\omega \mu_0}{\gamma_2} [E_n J_n'(\gamma_2 \rho) + F_n Y_n'(\gamma_2 \rho)] \right\} e^{jn\varphi}, \quad (15)$$

$$jH_{\varphi 2} = \sum_n \left\{ \frac{-\omega \varepsilon_0}{\gamma_2} [C_n J_n'(\gamma_2 \rho) + D_n Y_n'(\gamma_2 \rho)] - \frac{n\beta}{\gamma_2^2 \rho} [E_n J_n(\gamma_2 \rho) + F_n Y_n(\gamma_2 \rho)] \right\} e^{jn\varphi}, \quad (16)$$

其中,  $\gamma_2^2 = k_0^2 - \beta^2$ ,  $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ .

根据介质分界面 ( $\rho = R_1$ ) 上切向电磁场分量的连续性条件可得:

$$C_n = \rho_{n1} A_n + \rho_{n2} B_n, \quad (17)$$

$$D_n = \rho_{n3} A_n + \rho_{n4} B_n, \quad (18)$$

$$E_n = \rho_{n5} A_n + \rho_{n6} B_n, \quad (19)$$

$$F_n = \rho_{n7} A_n + \rho_{n8} B_n, \quad (20)$$

其中

$$\rho_{n1} = \frac{1}{Q} \left[ \frac{P^+}{\gamma_2} J_n(\sqrt{P^+} R_1) Y_n'(\gamma_2 R_1) + \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \eta_c} \omega_n^+ Y_n(\gamma_2 R_1) \right],$$

$$\rho_{n2} = \frac{1}{Q} \left[ \frac{P^-}{\gamma_2} J_n(\sqrt{P^-} R_1) Y_n'(\gamma_2 R_1) + \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \eta_c} \omega_n^- Y_n(\gamma_2 R_1) \right],$$

$$\rho_{n3} = \frac{-1}{Q} \left[ \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \eta_c} \omega_n^+ J_n(\gamma_2 R_1) + \frac{P^+}{\gamma_2} J_n(\sqrt{P^+} R_1) J_n'(\gamma_2 R_1) \right],$$

$$\rho_{n4} = \frac{1}{Q} \left[ \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \eta_c} \omega_n^- J_n(\gamma_2 R_1) - \frac{P^-}{\gamma_2} J_n(\sqrt{P^-} R_1) J_n'(\gamma_2 R_1) \right],$$

$$\rho_{n5} = \frac{1}{Q} \left[ \frac{P^+}{\gamma_2 \eta_c} J_n(\sqrt{P^+} R_1) Y_n'(\gamma_2 R_1) + \frac{1}{\omega \mu_0} \omega_n^+ Y_n(\gamma_2 R_1) \right],$$

$$\rho_{n6} = \frac{1}{Q} \left[ \frac{-P^-}{\gamma_2 \eta_c} J_n(\sqrt{P^-} R_1) Y_n'(\gamma_2 R_1) + \frac{1}{\omega \mu_0} \omega_n^- Y_n(\gamma_2 R_1) \right],$$

$$\rho_{n7} = \frac{-1}{Q} \left[ \frac{1}{\omega \mu_0} \omega_n^+ J_n(\gamma_2 R_1) + \frac{P^+}{\gamma_2 \eta_c} J_n(\sqrt{P^+} R_1) J_n'(\gamma_2 R_1) \right],$$

$$\rho_{n8} = \frac{1}{Q} \left[ -\frac{1}{\omega \mu_0} \omega_n^+ J_n(\gamma_2 R_1) + \frac{P^-}{\gamma_2 \eta_c} J_n(\sqrt{P^-} R_1) J_n'(\gamma_2 R_1) \right];$$

且  $\omega_n^\pm = S_n^\pm(R_1) + \frac{n\beta}{\gamma_2^2 R_1} P^\pm J_n(\sqrt{P^\pm} R_1)$ ,  $Q = \frac{2}{\pi R_1 \gamma_2^2}$ . 把式 (17)~(19) 代入式 (13)

和式 (14) 得:

$$E_{z2} = \sum_n [(\rho_{n1} A_n + \rho_{n2} B_n) J_n(\gamma_2 \rho) + (\rho_{n3} A_n + \rho_{n4} B_n) Y_n(\gamma_2 \rho)] e^{jn\varphi}, \quad (21)$$

$$jH_{z2} = \sum_n [(\rho_{n5} A_n + \rho_{n6} B_n) J_n(\gamma_2 \rho) + (\rho_{n7} A_n + \rho_{n8} B_n) Y_n(\gamma_2 \rho)] e^{jn\varphi}, \quad (22)$$

根据 Graf 关于 Bessel 函数的加法定理<sup>[14]</sup>

$$Z_n(k\rho) e^{jn\varphi} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_p(k\rho') J_{p-n}(kd) e^{jp\varphi'}; \quad (23)$$

其中  $Z_n$  可以是  $J_n$  或  $Y_n$ .  $(\rho', \varphi')$  是以  $0'$  为原点的极坐标系 (见图 1), 可将式 (21) 和式 (22) 表示成关于  $\rho', \varphi'$  的函数:

$$E_{z2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_n [(\rho_{n1} A_n + \rho_{n2} B_n) J_m(\gamma_2 \rho') + (\rho_{n3} A_n + \rho_{n4} B_n) Y_m(\gamma_2 \rho')] \cdot J_{m-n}(\gamma_2 d) e^{jm\varphi'}, \quad (24)$$

$$jH_{z2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_n [(\rho_{n5} A_n + \rho_{n6} B_n) J_m(\gamma_2 \rho') + (\rho_{n7} A_n + \rho_{n8} B_n) Y_m(\gamma_2 \rho')] \cdot J_{m-n}(\gamma_2 d) e^{jm\varphi'}, \quad (25)$$

由于  $\rho' = R_2$  处是导体壁, 所以在  $\rho' = R_2$  处切向电场为零.

$$E_{z2} \big|_{\rho'=R_2} = 0, \quad (26)$$

$$E_{\varphi 2} \big|_{\rho'=R_2} = 0, \quad (27)$$

即等同于

$$E_{z2} \big|_{\rho'=R_2} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial H_{z2}}{\partial \rho'} \bigg|_{\rho'=R_2} = 0, \quad (29)$$

由式 (24), (25), (28), (29) 得:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\rho_{n1} A_n + \rho_{n2} B_n) J_m(\gamma_2 R_2) + (\rho_{n3} A_n + \rho_{n4} B_n) Y_m(\gamma_2 R_2)] J_{m-n}(\gamma_2 d) = 0, \quad (30)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\rho_{n5} A_n + \rho_{n6} B_n) J'_m(\gamma_2 R_2) + (\rho_{n7} A_n + \rho_{n8} B_n) Y'_m(\gamma_2 R_2)] \cdot \gamma_2 J_{m-n}(\gamma_2 d) = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (31)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} [K_{mn}^1] & [K_{mn}^2] \\ [K_{mn}^3] & [K_{mn}^4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_n] \\ [B_n] \end{bmatrix} = 0; \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{mn}^1 &= [\rho_{n1} J_m(\gamma_2 R_2) + \rho_{n3} Y_m(\gamma_2 R_2)] J_{m-n}(\gamma_2 d), \\ K_{mn}^2 &= [\rho_{n2} J_m(\gamma_2 R_2) + \rho_{n4} Y_m(\gamma_2 R_2)] J_{m-n}(\gamma_2 d), \\ K_{mn}^3 &= [\rho_{n5} J'_m(\gamma_2 R_2) + \rho_{n7} Y'_m(\gamma_2 R_2)] \gamma_2 J_{m-n}(\gamma_2 d), \\ K_{mn}^4 &= [\rho_{n6} J'_m(\gamma_2 R_2) + \rho_{n8} Y'_m(\gamma_2 R_2)] \gamma_2 J_{m-n}(\gamma_2 d). \end{aligned}$$

为了得到非零解, 要求式 (32) 的系数矩阵的行列式值等于零, 即:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} [K_{mn}^1] & [K_{mn}^2] \\ [K_{mn}^3] & [K_{mn}^4] \end{bmatrix} = 0. \quad (33)$$

由方程式 (33) 可求出各次模的传播常数  $\beta$ 。

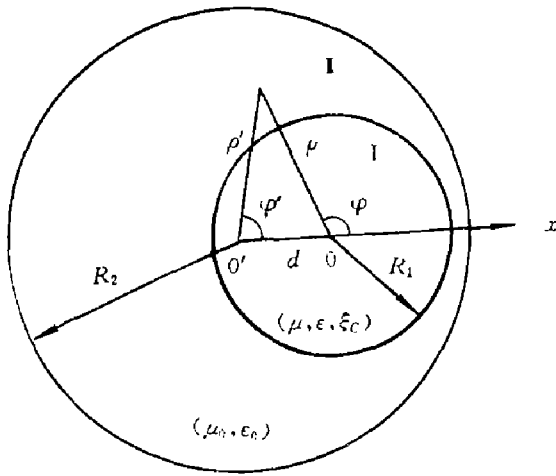


图 1 回旋媒质偏心加载圆波导的横截面图

Fig. 1 Cross section of a circular waveguide eccentrically loaded with a chiral rod

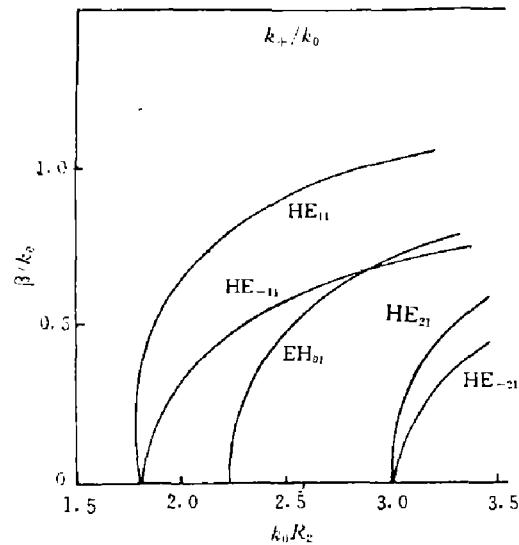


图 2 回旋媒质同心加载圆波导中  $HE_{11}$ ,  $HE_{-11}$ ,  $HE_{21}$ ,  $HE_{-21}$ ,  $EH_{01}$

模的色散特性曲线 ( $R_1 = R_2/2$ ,  $d = 0$ )

Fig. 2 Dispersion characteristics of  $HE_{11}$ ,  $HE_{-11}$ ,  $HE_{21}$ ,  $HE_{-21}$  and  $EH_{01}$  modes in the circular waveguide concentrically loaded with chiral rod ( $R_1 = R_2/2$ ,  $d = 0$ )

## 2 数值结果与讨论

本文首先对圆柱波导同心加载相对介电常数  $\epsilon_{r1} = 1$ , 相对导磁率  $\mu_{r1} = 1$  和回旋导纳  $\xi_c = 0.001S$  的回旋媒质时其中几个低次模式的传播常数作了计算. 由于回旋波导中所有模式都是混合的<sup>[6-10]</sup>, 不可能单独存在纯 TE 模或 TM 模, 因此采用  $HE_{nm}$  或  $EH_{nm}$  来表征回旋波导中的模式<sup>[10]</sup>. 在圆波导中,  $EH_{nm}$  沿袭于非回旋圆波导中的  $TM_{nm}$  模,  $HE_{nm}$  沿袭于非回旋圆波导中的  $TE_{nm}$  模. 这里  $n$  代表沿  $\varphi$  方向的变化因子  $e^{jn\varphi}$ ,  $m$  代表沿径向变化的数目. 图 2 给出了圆波导同心加载回旋媒质时其中几个低次模式的色散特性曲线. 从图 2 可以看出:

(1) 对于每个非零的  $n$  存在两个传播常数不同的分支, 但它们的截止频率相同. 当  $n = 0$  时只存在一支;

(2) 存在一后向变化的区域 (这时相速度与群速度符号相反), 这与横磁铁氧体加载波导的情形类似, 但回旋波导是互易的;

(3) 当  $\xi_c > 0$  时, 随着频率的增大, 传播常数  $\beta$  越来越接近  $k_+$ .

回旋媒质同心加载圆波导时其中  $HE_{11}$  和  $HE_{-11}$  模的传播常数随回旋介质棒半径  $R_2$  的变化关系曲线如图 3 所示. 加载介质越多 (即  $R_2/R_1$  越大), 两个分支的传播常数相差也越大.  $R_2 = 0$  时两个分支合二为一, 即空载圆波导的情形.

图 4 给出了圆波导偏心加载非回旋和回旋介质棒时  $HE_{11}^e$  和  $EH_{01}^e$  模的色散曲线. 加

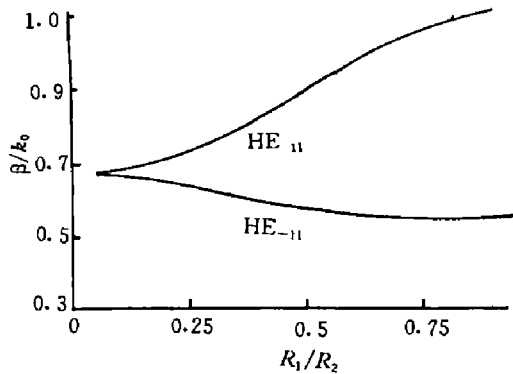


图3 同心加载回旋媒质时圆波导中  $HE_{11}$  和  $HE_{-11}$  模的传播常数随  $R_1/R_2$  变化的关系曲线

Fig. 3 Propagation constants of  $HE_{11}$  and  $HE_{-11}$  as a function of  $R_1/R_2$  ( $kR_2 = 2.5, d = 0$ )

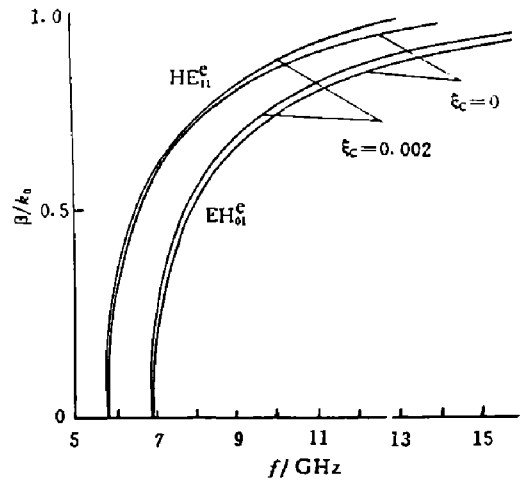


图4 圆波导偏心加载非回旋和回旋介质棒时  $EH_{01}^c$  和  $HE_{11}^c$  模的色散曲线 ( $\epsilon_{r1} = 5, \mu_{r1} = 1, R_1 = 2\text{mm}, d = 5\text{mm}, R_2 = 15\text{mm}$ )

Fig. 4 Dispersion curves for  $EH_{01}^c$  and  $HE_{11}^c$  modes in a circular waveguide eccentrically loaded with achiral and chiral rods, respectively ( $\epsilon_{r1} = 5, \mu_{r1} = 1, R_1 = 2\text{mm}, d = 5\text{mm}, R_2 = 15\text{mm}$ )

载非回旋介质棒时的结果与文献 [15] 中求的结果一致。回旋介质偏心加载圆波导中的  $EH_{01}^c, HE_{11}^c$  和  $HE_{-11}^c$  模的传播常数随介质棒半径  $R_1$  和偏心率  $d$  变化的关系曲线分别示于图 5 和图 6 中。图 5 中当  $R_1 = 0$  时退化为空载圆波导。从图 6 可知  $HE_{11}^c$  和  $HE_{-11}^c$  模的传播常数基本上不随偏心率  $d$  变化，而  $EH_{01}^c$  的变化较大。

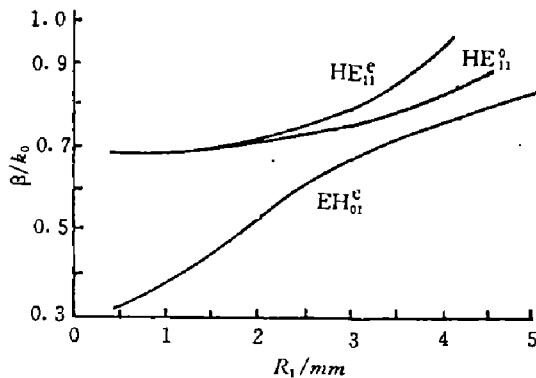


图5 偏心加载回旋媒质时圆波导中几个低次模的传播常数随  $R_1$  变化的关系曲线

( $R_2 = 15\text{mm}, d = 5\text{mm}, \epsilon_{r1} = 5, \mu_{r1} = 1, \xi_c = 0.001\text{S}, f = 8\text{GHz}$ )

Fig. 5 Propagation constants as a function of  $R_1$  for the three lowest-order modes ( $R_2 = 15\text{mm}, d = 5\text{mm}, \epsilon_{r1} = 5, \mu_{r1} = 1, \xi_c = 0.001\text{S}, f = 8\text{GHz}$ )

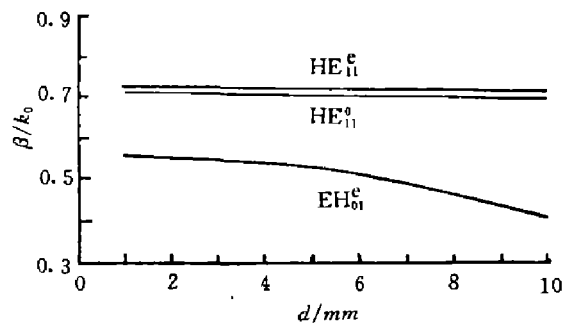


图6 偏心加载回旋媒质时圆波导中 3 个低次模的传播常数随  $d$  变化的关系曲线

( $R_2 = 15\text{mm}, \epsilon_{r1} = 5, \mu_{r1} = 1, \xi_c = 0.001\text{S}, f = 8\text{GHz}, R_1 = 2\text{mm}$ )

Fig. 6 Propagation constants as a function of  $d$  for the three lowest-order modes ( $R_2 = 15\text{mm}, \epsilon_{r1} = 5, \mu_{r1} = 1, \xi_c = 0.001\text{S}, f = 8\text{GHz}, R_1 = 2\text{mm}$ )

## 参考文献

- 1 Jaggard D L et al. *Appl. Phys.*, 1979,**18**:211-216
- 2 Engheta N, Mickelson A R. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1982,**AP-30**:1213-1216
- 3 Bassiri S et al. *Alta Frequenza*, 1986,**LV-2**:83-88
- 4 Engheta N, Jaggard D L. *IEEE Antennas and Propagation, Newsletter*, 1988,**30**(5):6-12
- 5 Bassiri S et al. *J. Opt. Soc. Am.*, 1988,**A5**:1450-1459
- 6 Engheta N, Pelet P. *Optics Letters*, 1989,**14**:593-595
- 7 Engheta N, Pelet P. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1990,**MTT-38**:1631-1634
- 8 Pelet P, Engheta N. *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, 1990,**AP-38**:90-97
- 9 Eftimice C, Pearson L W. *Radio Science*, 1989,**24**:351-359
- 10 Svedin J A M. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1990,**MTT-38**:1488-1496
- 11 Pelet P, Engheta N. *J. Appl. Phys.*, 1990,**67**:2742-2745
- 12 Cory H, Rosenhouse I. *IEE Proc.*, 1991,**138H**:51-54
- 13 Collin R E. *Field Theory of Guided Waves*, New York: McGraw-Hill, 1960, p.160-212
- 14 Gesche R. *Arch. Elektr. Ubertr.*, 1984,**38**:391-394
- 15 Yeo S P. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1990,**MTT-38**:1092-1095

## PROPAGATION CHARACTERISTICS OF A CIRCULAR WAVEGUIDE ECCENTRICALLY LOADED WITH CHIRAL MEDIA

Shen Zhongxiang

(Department of Electronic Engineering, Nanjing Aeronautical Institute,  
Nanjing, Jiangsu 210016, China)

**Abstract:** A characteristic equation for calculating the propagation constants of modes in a circular waveguide eccentrically loaded with a chiral rod is obtained through a coordination transformation based on the additions theorem for Bessel functions. As an example, calculated results for the dispersion characteristics of a circular waveguide eccentrically loaded with a chiral cylinder are presented. Variation of propagation constants with several parameters is discussed.

**Key words:** electromagnetic fields, waveguide, chiral medium, chirowaveguide.