

源象闪烁孔径平滑与积分光强起伏概率

张逸新

(无锡轻工业学院物理系, 江苏, 无锡, 214036)

摘要: 研究了复振幅满足椭圆高斯分布散射光场时的孔径平滑效应, 得到了相应的孔径平滑因子. 从理论上分析了有限孔径检测到的孔径积分光强起伏分布, 结果表明当检测孔径内包含的相关散斑面元数足够大时, 闪烁满足对数正态分布, 与已有实验观测结果一致.

关键词: 源象闪烁, 孔径平滑, 概率分布.

引言

由于天文观测、红外通讯等工程的需要, 光波大气传输源象闪烁(光强起伏)是一直受重视的课题. 早期测量指出, 在方差饱和闪烁区域闪烁仍满足对数正态分布^[1,2], 但是Wang等从理论上证明, 在强湍流起伏区闪烁不再是对数正态分布^[3], 而是负指数分布^[4], 但是若求和的光场是对数正态变量, 那么总场仍是对数正态的^[5], 所以负指数分布也不是普适分布. 负指数分布是建立在散射场复振幅满足圆对称高斯分布的基础上的, 它忽略了散射场的空间不均匀性. 对实际湍流大气散射场的客观描述应该包含这种不均匀性, 为此L. R. Bissonnette et al.^[6]提出了复振幅满足椭圆高斯分布光场的概率分布模型, 该分布覆盖了对数正态和负指数分布. 由于椭圆高斯分布光场比圆对称高斯场更客观地反映了在实际大气中传输光场的统计分布规律, 所以有必要研究与之相关的光场统计特性和检测孔径效应. 至今尚未见有关接收椭圆高斯散射场的孔径平滑问题的详细讨论. 光波闪烁概率分布的近期实验结果表明^[7], 当用有限孔径测量时, 即使在湍流强度 $C_n^2 = 5.2 \times 10^{-13} \sim 1.9 \times 10^{-12} \text{ m}^{-2/3}$ 的范围内, 闪烁仍满足对数正态分布, 这表明测量闪烁分布与接收孔径有关^[8]. 因此积分光强起伏分布与孔径大小间的关系也是值得研究的.

本文从椭圆高斯场孔径积分光强满足的概率分布函数出发, 用系综平均方法导出仪器接收椭圆高斯场的闪烁平滑因子, 并研究了饱和湍流起伏区孔径与闪烁分布的关系.

1 椭圆高斯场的积分光强起伏概率

通过湍流大气(把随机粗糙表面等效于“湍流相屏”)层传播的光场可以认为是由径向

散射形成的相干分量和漫射形成的随机分量之和, 那么接收场振幅可表示为

$$U(t) = (Ae^{i\theta} + Re^{i\varphi(t)})e^{i\omega t} = (U_r + iU_i)e^{i\omega t}, \quad (1)$$

其中 $Ae^{i\theta}$ 是相干分量, $Re^{i\varphi(t)}$ 是随机分量, A 和 R 分别是相应的振幅, θ 和 φ 是相位, U_r 和 U_i 分别是光场复振幅 Q 的实部和虚部, $I = QQ^*$ 是光强, ω 是光波频率. 散射场复振幅的实部和虚部的联合概率密度函数为^[9]

$$p(U_r, U_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_i(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\Delta U_r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2\rho\Delta U_r\Delta U_i}{\sigma_r\sigma_i} + \frac{\Delta U_i^2}{\sigma_i^2}\right)\right], \quad (2)$$

其中 $\Delta U_r = U_r - \langle U_r \rangle$ 和 $\Delta U_i = U_i - \langle U_i \rangle$ 分别是 U_r 和 U_i 的起伏量, $\sigma_r^2 = \langle (\Delta U_r)^2 \rangle$ 和 $\sigma_i^2 = \langle (\Delta U_i)^2 \rangle$ 分别是 U_r 和 U_i 的起伏方差, $\rho = \langle \Delta U_r \Delta U_i \rangle / (\sigma_r \sigma_i)$ 是 U_r , U_i 的相关系数, 而 $\langle \Delta U_r \Delta U_i \rangle$ 是 U_r 和 U_i 的协方差, $\langle \dots \rangle$ 表示系综平均值.

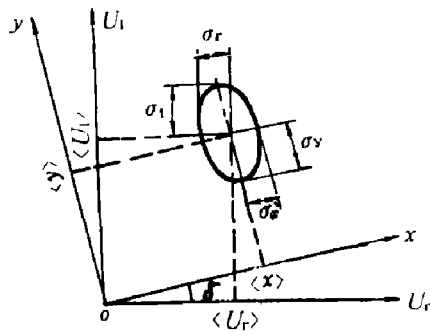


图 1 等概率密度椭圆

Fig. 1 Equiprobability density ellipse

我们用等概率密度椭圆法^[9]研究散射场积分强度分布, 图 1 给出了等概率密度椭圆在 $U_r - U_i$ 坐标系平面的投影, xoy 系统绕 o 点相对于 U_r, U_i 系旋转的角度为

$$\delta = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1}[2\sigma_r\sigma_i\rho / (\sigma_r^2 - \sigma_i^2)]. \quad (3)$$

两坐标系间有关物理量满足以下变换:

$$\begin{cases} \langle x \rangle = \langle U_r \rangle \cos\delta + \langle U_i \rangle \sin\delta, & \langle y \rangle = \langle U_i \rangle \cos\delta - \langle U_r \rangle \sin\delta; \\ \sigma_x^2 = (\sigma_r^2 \cos^2\delta - \sigma_i^2 \sin^2\delta) / \cos 2\delta, & \sigma_y^2 = (\sigma_r^2 \sin^2\delta + \sigma_i^2 \cos^2\delta) / \cos 2\delta. \end{cases} \quad (4)$$

由图 1 可见通过坐标变换可把 $U_r - U_i$ 坐标系中的联合概率密度函数变为 $x - y$ 坐标系中的两个互不相关随机变量 x, y 的联合概率密度函数.

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\Delta y^2}{\sigma_y^2}\right)\right] = p(x)p(y), \quad (5)$$

两坐标系中光场的振幅正交分量满足 $I = QQ^* = U_r^2 + U_i^2 = x^2 + y^2$.

式 (5) 表示, 在 xoy 坐标系中的振幅分量 x 和 y 所服从的统计规律与部分偏振光的两个互相统计独立的偏振光所满足的统计规律形式相同. 为了利用部分偏振光所使用的方法, 引入“椭圆度” $e \equiv 2\sigma_x^2 / (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)$. 在 xoy 坐标系内光强 $I = I_x + I_y$, 且满足

$$\begin{cases} \langle I_x \rangle = \frac{1}{2} (1 + e) \langle I \rangle, \\ \langle I_y \rangle = \frac{1}{2} (1 - e) \langle I \rangle. \end{cases} \quad (6)$$

用有限孔径测量光强时, 被测光强具有积分的形式. 积分光强 W 可表示为

$$W = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x', y') I(x', y') dx' dy' = W_x + W_y, \quad (7)$$

这里 $\varphi(x', y')$ 是孔径函数, 对于直径为 D_0 的圆孔, 有

$$\varphi(x', y') = \begin{cases} 1, & (\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \leq D_0/2) \\ 0, & (\rho' > D_0/2) \end{cases} \quad (8)$$

类似于部分偏振光积分光强统计分布的讨论^[10], 当检测孔径足够大时, 即接收孔径内有大量互不相干散斑元 M 个 (设光源单色性很高) 时, 光强的概率密度函数为

$$p(W) = \frac{1+e}{2e} \left(\frac{2M}{(1+e)\langle W \rangle} \right)^M \frac{W^{M-1} \exp\left(-\frac{2MW}{(1+e)\langle W \rangle}\right)}{\Gamma(M)} - \frac{1-e}{2e} \left(\frac{2M}{(1-e)\langle W \rangle} \right)^M \frac{W^{M-1} \exp\left(-\frac{2MW}{(1-e)\langle W \rangle}\right)}{\Gamma(M)}. \quad (9)$$

这里 $\Gamma(M)$ 是伽马函数. 由于式 (9) 在 $M=1$ 和 $e=1$ 时退化为 Γ 分布, 且 Γ 分布是精确分布的一个好的近似^[11], 所以可认为式 (9) 在 $1 \leq M < \infty$ 内是近似成立的.

2 孔径平滑效应

对式 (9) 作变量变换 $D = -\ln(W/\langle W \rangle)$, 由 $P_D(D) \left| \frac{\partial D}{\partial W} \right| = P(W)$ 有

$$P_D(D) = \frac{1+e}{2e} \frac{M^M}{\Gamma(M) \left(\frac{1+e}{2}\right)^M} \exp(-MD) \exp\left[-\frac{2M}{(1+e)} \exp(-D)\right] - \frac{1-e}{e} \frac{M^M}{\Gamma(M) \left(\frac{1-e}{2}\right)^M} \exp(-MD) \exp\left[-\frac{2M}{(1-e)} \exp(-D)\right]. \quad (10)$$

由式 (10) 可得到光场对数强度“起伏方差”

$$\sigma_b^2 = \zeta(2, M) + \frac{1+e}{2e} \left[\psi(M) - \ln \frac{2M}{1+e} \right]^2 - \frac{1-e}{2e} \left[\psi(M) - \ln \frac{2M}{1-e} \right]^2, \quad (11)$$

其中 $\zeta(2, M) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{M-1} \frac{1}{r^2}$ 是里曼 ζ 函数, $\psi(M) = \ln M - \frac{1}{\sqrt{M}} - \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{2k}}{2kM^{2k-2}}$, 是 ψ 函数^[12], 式中 B_{2k} 是伯努利数. 在用有限孔径检测时, $M > 1$, 我们取 $M \geq 2$ 研究孔径效应, 现在式 (11) 变为

$$\sigma_b^2 \approx M^{-1} \left\{ 1 - \left[\frac{1+e}{2} \ln \left(\frac{1+e}{2} \right) - \frac{1-e}{2} \ln \left(\frac{1-e}{2} \right) \right] \right\}, \quad (12)$$

而孔径 S 内包含的正态散斑相关面元数目 M 为

$$M = \left[S^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} R_s(\Delta x', \Delta y') |\mu_Q(\Delta x', \Delta y')|^2 dx' dy' \right]^{-1}. \quad (13)$$

式(13)中 μ_Q 是复振幅 Q 的自相关函数^[11], 由 I_x, I_y 的统计独立性质及相应振幅满足圆对称高斯分布, 计算得

$$|\mu_Q(\rho)|^2 = B(I, \rho) + \frac{1-e^2}{2} \sqrt{B(I_x, \rho) B(I_y, \rho)} = B_I(\rho), \quad (14)$$

其中

$$B(I, \rho) = \frac{\langle I(x'_1, y'_1) I(x'_2, y'_2) \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1. \quad (15)$$

而 $R_s(\Delta x', \Delta y')$ 是孔径函数 $\varphi(x', y')$ 的卷积^[11], 在圆孔检测条件下为

$$R_s = \frac{D_0^2}{2} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{\rho}{D_0} \right) - \frac{\rho}{D_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{D_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (16)$$

把式(14)和(16)代入式(13), 有

$$M = \left[\frac{16}{\pi} \int_0^1 \{ \cos^{-1} \tau - \tau [1 - \tau^2]^{1/2} \} B_I(D_0 \tau) \tau d\tau \right]^{-1}. \quad (17)$$

定义接收孔径平滑因子 $G = \sigma_b^2 / (a B_I(0))$, 那么

$$G = \frac{1}{a} \left[\frac{16}{\pi} \int_0^1 \{ \cos^{-1} \tau - \tau [1 - \tau^2]^{1/2} \} b_I(D_0 \tau) \tau d\tau \right] \left\{ 1 - \left[\frac{1+e}{e} \ln \left(\frac{1-e}{2} \right) - \frac{1+e}{e} \ln \left(\frac{1-e}{2} \right) \right] \right\}, \quad (18)$$

其中 a 是待定常数, $b_I(\rho) = B_I(\rho) / B_I(0)$. 众所周知, 当用理想点孔接收时, $G = 1$, 那么当 $D_0 = 0$ 时, $b_I(0) = 1$, 则 $a = \left\{ 1 - \left[\frac{1+e}{e} \ln \left(\frac{1+e}{2} \right) - \frac{1-e}{e} \ln \left(\frac{1-e}{2} \right) \right] \right\}^{-1}$, 得到检测椭圆高斯散斑的孔径平滑因子为

$$G = \left[\frac{16}{\pi} \int_0^1 \{ \cos^{-1} \tau - \tau [1 - \tau^2]^{1/2} \} b_I(D_0 \tau) \tau d\tau \right]. \quad (19)$$

当接收圆对称高斯分布散射场时 $e = 1$, 式(19)简化为熟知的孔径平滑因子 G' ^[13]

3 强湍流区域闪烁概率

现考虑在视线光路大气中传输的光束, 光场复振幅满足圆对称高斯分布($e = 1$), 积分光强的概率密度函数为

$$P_D(D) = \frac{M^M}{\Gamma(M)} \exp\{-M[D + \exp(-D)]\}. \quad (20)$$

展开 $\exp(-D)$ 为级数, 有

$$P_D(D) = \frac{M^M}{\Gamma(M)} \exp(-M) \exp\left[-\frac{MD^2}{2} \left(1 - \frac{D}{3} + \dots\right)\right]. \quad (21)$$

在用大孔径测量积分光强起伏概率分布的情况下, 从式 (12) 取 $e = 1$, 有 $\sigma_b^2 = \langle (\ln W - \langle \ln W \rangle)^2 \rangle \approx 1/M$. 为进一步讨论计算 $\langle D \rangle$, 由定义得

$$\langle D \rangle = \ln M - \psi(M). \quad (22)$$

利用大 M 时 $\psi(M)$ 的性质, 在接收孔径面积 S 足够大 (即 $M > 5$) 时, 由式 (22) 可得到

$$\langle \ln W \rangle \approx \ln \langle W \rangle, \quad (23)$$

由式 (23) 和方差的定义, 现在 $\sigma_b^2 = \langle (\ln W - \langle \ln W \rangle)^2 \rangle$ 是对数积分光强 W 的方差, 记为 $\sigma_{\ln W}^2 = \sigma_b^2$ (当用点孔测量时 $\sigma_{\ln W}^2 = 4\sigma_s^2$), 由此可知当 $M \geq 2$ 时, $\sigma_{\ln W}^2 \leq 0.5$, 即测量闪烁处于弱起伏区. 当光波在强湍流起伏区传播和大孔径测量的条件下, 即满足 $M \geq 2$, 利用文献 [14, 15] 点孔测量闪烁概率分布的实验结果, 我们假定闪烁分布的归一化积分强度主要分布于 $0.05 \ll W/\langle W \rangle \ll 15$ 的区域, 那么 $|D| \ll 3$. 又因为湍流导致光束相干性的降低, 当光波在强起伏区内传输, 有限孔径内的互不相干斑元数 $M \gg 1$, 由此再利用 $\Gamma(M) = (M-1)!$ 和 Stirling 近似, 式 (21) 可写为

$$P_D(D) \approx \sqrt{\frac{M}{2\pi}} \exp\left(-\frac{MD^2}{2}\right). \quad (24)$$

由式 (23), 得 $D = -\ln W/\langle W \rangle = -(\ln W - \langle \ln W \rangle)$, 把 D 代入式 (24), 并利用概率密度换元关系 $P_{\ln W}(\ln W) \left| \frac{\partial(\ln W)}{\partial D} \right| = P_D(D)$, 得

$$P_{\ln W}(\ln W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\ln W}^2}} \exp\left[-\frac{(\ln W - \langle \ln W \rangle)^2}{2\sigma_{\ln W}^2}\right]. \quad (25)$$

这就从理论上解释了在强湍流起伏区用大孔径接收时, 光闪烁满足对数正态分布的实验结果^[7].

4 结论与讨论

本文研究了接收复振幅椭圆高斯分布散射场的闪烁孔径平滑效应, 得到一个比现有理论更普遍的孔径平滑因子. 同时研究了孔径平滑与闪烁分布的关系, 结果表明, 接收孔径内等效相干散斑数量直接影响测量闪烁分布, 即使光波在强湍流起伏区内传输, 若检测孔径足够大, 由于接收孔径内独立相干光斑元数 M 较大, 对数光强方差 $\sigma_b^2 \approx 1/M$ 仍很小 (有关 $\sigma_b^2 \approx 1/M$ 的精度参见文献[16]), 其与弱湍流起伏区传输光闪烁一样仍满足光闪烁对数正态分布规律, 从而解释了实验结果^[7]. 虽然本文在讨论中忽略了大气不稳定等因素导致的光束抖动对检测平均光强的调制, 但是实验研究孔径平滑总是用有限孔进行检测的, 孔径 S 内含有较多的不相关面元数, 从统计平均意义上, 光束抖动时对检测平均光强的影响可以不予考虑, 所以本文的讨论是可行的, 由式 (19) 在 $e = 1$ 导出的结果与其它方法^[13]的结果相同也间接地表明了这一点.

参考文献

- 1 Eried D L et al. *J. Opt. Soc. Am.*, 1967, **57**(7): 787
- 2 Ochs G R, Lawrence R S. *J. Opt. Soc. Am.*, 1961, **59**(2): 226
- 3 Wang T, Strohbehn J W. *J. Opt. Soc. Am.*, 1974, **64**(5): 583
- 4 Dashen R. *J. Math. Phys.*, 1979, **20**(5): 894
- 5 Consortini A, Ronchi L. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(2): 181
- 6 Bissonnette L R, Wizinowich P L. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(10): 1590
- 7 Churnside J H, Hill R J. *J. Opt. Soc. Am.*, 1987, **4A**(4): 727
- 8 Ben-Yosef N, Goldner E. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(11): 2167
- 9 Takai N et al. *Opt. Engine.*, 1986, **25**(5): 627
- 10 王乃权 et al. *物理学报*, 1983, **32**(1): 124
- 11 Goodman J W. In Dainty J C ed. *Statistical Properties of Laser Speckle Patterns in Laser Speckle and Related Phenomena*, New York: Springer-Verlag, 1975: 9-75
- 12 Gradshteyn I S, Ryzhik A M. *Table of Integrals, Series and Products*, New York: Academic Press, 1980: 943
- 13 В. И. 塔塔尔斯基. 温景嵩等译, *湍流大气中波的传播理论*, 北京: 科学出版社, 1978: 200
Tatarski V I. *Wave Propagation in a Turbulent Medium*, New York: McGraw-Hill, 1961
- 14 Churnside J H, Frehlich R G. *J. Opt. Soc. Am.*, 1989, **6A**(11): 1760
- 15 Patrushev G Y et al. *Radiophys. Quant. Electron.*, 1983, **26**(7): 612
- 16 Arsenault H H, April G. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(11): 1160

APERTURE-AVERAGING OF SCINTILLATIONS OF SOURCE IMAGE AND STATISTICAL PROBABILITY OF INTEGRATED INTENSITY

Zhang Yixin

(Department of Physics, Wuxi Institute of Light Industry, Wuxi, Jiangsu 214036, China)

Abstract: The effect of the aperture-averaging is studied for the case of a finite detector aperture when the receiver detects the light intensity of which the complex field amplitude is an elliptical Gaussian probability-density function, and a more general aperture-averaging function is obtained. The aperture-averaging intensity fluctuation statistical distribution is analyzed theoretically for the case of a finite detector aperture. The results show that the scintillation probability follows the logarithmic normal distribution when the correlation speckle number is large in the receiver aperture. The conclusion agrees with the previous experimental measurements.

Key words: scintillation, aperture-averaging, probability distribution.