

# 自适应光学中的大气色散效应

冯岳忠 宋正方 龚知本

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 安徽、合肥, 230031)

用 Zernike 多项式展开的方法讨论了双波长自适应光学系统中的大气色散效应。根据位相展开系数的双频相关求得了大气色散产生的剩余位相误差。结果表明: 虽然大气色散会使位相补偿不完全, 但用比发射激光波长更短的光源为信标, 并将信标位相畸变量与比值  $\lambda_2/\lambda_1$  (信标波长/发射波长) 的乘积作为位相预畸变, 能较好地校正发射光束的位相畸变。

关键词: 自适应光学, 大气色散, 剩余位相差。

## 1 引言

在自适应光学系统以及其它红外激光工程中, 经常使用同轴的接收-发射系统<sup>[1]</sup>, 在这种系统中用相同波长的发射光和接收光将使探测和控制很难实现, 因此常常使用不同波长的发射光和接收光。例如在相干光学自适应技术校正大气湍流效应时常用一种波长(通常是可见光)的位相畸变信息校正另一种波长(通常是红外波段)的位相畸变。由于大气湍流效应是与波长有关的, 即存在大气色散效应, 这种双波长自适应光学系统的校正将是不完全的。为了讨论大气色散效应对自适应光学系统性能的影响, 我们首先将波前位相展开成一系列正交的 Zernike 多项式之和, 并讨论不同波长的光波位相的展开系数的相关特性, 由此对大气色散产生的剩余位相误差进行了分析和讨论, 以期为实际研制自适应光学系统选择合适的激光波长提供理论依据。

## 2 双频位相展开系数的相关性

假设波数分别为  $k_1$  和  $k_2$  的二束光波在湍流大气中传输  $L$  距离后的波前位相畸变分别为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ , 它们之间的关系可表示为<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} B_\varphi(r, r', k_1, k_2) &= \langle \varphi_1(k_1, r) \cdot \varphi_2(k_2, r') \rangle \\ &= 4\pi^2 k_1 k_2 \int_0^L dz \int_0^\infty dk' k' \phi_n(k') \cdot J_0[k'(r-r')] \\ &\quad \cdot \cos\left[\frac{(L-z)k'^2}{2k_1}\right] \cdot \cos\left[\frac{(L-z)k'^2}{2k_2}\right]; \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)中  $\langle \rangle$  为系综平均,  $J_0[\ ]$  为第一类零阶贝塞尔函数,  $\phi_n(k')$  为湍流的谱分布, 假设

$r = R\rho$ ,  $k' = k/R$ ,  $z = L \cdot \eta$ ,  $R$  为发射光束的有效半径, 则可将式(1)无量纲化后得到

$$B_p(B\rho, R\rho', k_1, k_2) = \frac{4\pi^2 k_1 k_2 L}{R^2} \int_0^1 d\eta \int_0^\infty dk \cdot k \cdot \phi_n\left(\frac{k}{R}\right) \cdot J_0[k(\rho - \rho')] \cdot \cos\left[\frac{(1-\eta)Lk^2}{2k_1 R^2}\right] \cdot \cos\left[\frac{(1-\eta)Lk^2}{2k_2 R^2}\right]; \quad (2)$$

将位相畸变  $\varphi_j (j=1, 2)$  展开成 Zernike 多项式<sup>[3, 4]</sup>

$$\varphi_j(\rho) = \sum_i a_i^{(j)} \cdot F_i(\rho/R); \quad (3)$$

其中  $F_i$  为  $i$  阶 Zernike 多项式,  $a_i^{(1)}$  和  $a_i^{(2)}$  是二列分别对应于波长  $\lambda_1$  和  $\lambda_2 (\lambda_j = 2\pi/k_j)$  的展开系数, 这样双频位相展开系数的相关函数为

$$C_{ii}(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \langle a_i^{(1)} a_i^{(2)} \rangle = \frac{4\pi^2 k_1 k_2 L}{R^2} \iint d^2 K d^2 K' Q_i^*(K) Q_i(K') \int_0^1 d\eta \int_0^\infty dk k \phi_n\left(\frac{k}{R}\right) \cdot \cos\left[\frac{(1-\eta)Lk^2}{2k_1 R^2}\right] \cos\left[\frac{(1-\eta)Lk^2}{2k_2 R^2}\right] \cdot \iint d^2 \rho d^2 \rho' \exp[2i\pi K \rho - 2i\pi K' \rho'] \cdot J_0[k(\rho^2 - \rho'^2)]; \quad (4)$$

其中  $Q_i(K')$  是 Zernike 多项式的傅里叶变换,  $Q_i^*$  是  $Q_i$  的共轭. 式(4)可简化为

$$C_{ii}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{4\pi^2 k_1 k_2 L}{R^2} \iint d^2 K' |Q_i(K')|^2 \int_0^1 d\eta \int_0^\infty dk k \phi_n\left(\frac{k}{R}\right) \cdot \cos\left[\frac{(1-\eta)Lk^2}{2k_1 R^2}\right] \cos\left[\frac{(1-\eta)Lk^2}{2k_2 R^2}\right] \cdot \frac{1}{R} \cdot \delta\left(K' - \frac{k}{2\pi}\right); \quad (5)$$

式(5)中  $\delta(\ )$  是  $\delta$  函数;

$$|Q_i(K')|^2 = (n+1) \left(\frac{J_{n+1}(2\pi K)}{\pi K}\right)^2 \cdot F(m\theta); \quad (6)$$

其中

$$F(m\theta) = \begin{cases} 2 \cos^2(m\theta), & i \text{ 为偶数;} \\ 2 \sin^2(m\theta), & i \text{ 为奇数;} \\ 1, & m=0; \end{cases} \quad m \neq 0$$

$J_{n+1}(\ )$  是第一类  $n+1$  阶贝塞尔函数;  $n$  和  $m$  分别为 Zernike 多项式的径向阶次和角向阶次;  $\theta$  为角分量. 将式(6)代入式(5), 并假定湍流是均匀的, 经简化整理后可得

$$C_{ii}(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{D^2}{r_{01} r_{02}}\right)^{5/6} \cdot P_i(\lambda_1, \lambda_2); \quad (7)$$

$$P_i(\lambda_1, \lambda_2) = 1.95(n+1) \int_0^\infty dk k^{-14/3} J_{n+1}^2(k) \left[ \frac{\sin(Ak^2)}{A} + \frac{\sin(Bk^2)}{B} \right]; \quad (8)$$

其中  $D = 2R$ ,  $r_{01}$  和  $r_{02}$  分别是对应于  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的大气相干长度,

$$A = \frac{2L(k_1 + k_2)}{k_1 k_2 D^2}, \quad B = \frac{2L(k_1 - k_2)}{k_1 k_2 D^2}.$$

当  $k_1 = k_2$  时式(7)和式(8)变为

$$C_{ii}(\lambda_n, \lambda_n) = \left(\frac{D}{r_{0n}}\right)^{5/3} P_i(\lambda_n, \lambda_n); \quad (9)$$

$$P_i(\lambda_j, \lambda_j) = 1.95(n+1) \int_0^\infty dk k^{-20/3} J_{n+1}^2(k) \left[ \frac{\sin(ck^2)}{c} + k^2 \right]; \quad (10)$$

其中  $\sigma = 4L/k_j D^2$ 。这里的  $C_{ii}(\lambda_j, \lambda_j)$  与文献[4]的结果不同, 这是因为我们考虑了衍射效应, 而文献[4]仅是几何光学近似下的结果。衍射效应的影响取决于  $\frac{4L}{k_j D^2}$  的大小, 当  $\frac{4L}{k_n D^2}$  很小时衍射效应的影响不大, 而  $\frac{4L}{k_j D^2}$  愈大则衍射效应的影响也愈大。图 1 中我们给出了归一化  $C_{ii}(\lambda, \lambda)$  (以几何光学近似值归一化) 的部分计算结果。其中曲线分别对应  $n=3, 5, 7, 10$ 。可以看到长波的衍射效应是较大的, 特别是高阶项系数的相关受衍射效应的影响更大。另外, 对  $P_i(\lambda_1, \lambda_2)$  的计算结果表明, 在不同波长下虽然低阶项的  $P_i(\lambda_1, \lambda_2)$  基本相同, 但高阶项的  $P_i(\lambda_1, \lambda_2)$  会有一定差别, 正是这种差别的存在使得以一种波长的位相信息不能完全校正另一种波长的位相畸变。

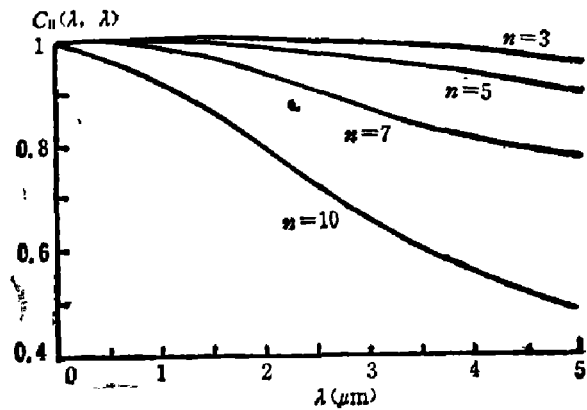


图 1 相关函数  $C_{ii}(\lambda, \lambda)$  随波长  $\lambda$  的变化  
Fig. 1 Normalized correlation function  $C_{ii}(\lambda, \lambda)$  VS. wavelength  $\lambda$

### 3 剩余位相误差

由上节给出的相关函数可以求得大气色散产生的剩余位相误差。假定以波长为  $\lambda_2$  的信标光的位相信息  $\varphi_2$  来校正波长为  $\lambda_1$  的发射光束的位相畸变  $\varphi_1$ , 则校正后的剩余位相误差为

$$\varphi_c = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (11)$$

其均方误差为

$$\Delta_c^2 = \iint d^2\rho \langle (\varphi_c(\rho))^2 \rangle, \quad (12)$$

利用式(3)和式(11)并根据 Zernike 多项式的正交性, 式(12)可表示成

$$\Delta_c^2 = \sum_i [C_{ii}(\lambda_1, \lambda_1) + C_{ii}(\lambda_2, \lambda_2) - 2C_{ii}(\lambda_1, \lambda_2)] \quad (13)$$

$C_{ii}$  由式(7)和(9)给出。因此

$$\Delta_c^2 = \left(\frac{D}{r_{01}}\right)^{5/3} \sum_i \left[ P_i(\lambda_1, \lambda_1) + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 P_i(\lambda_2, \lambda_2) - 2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) P_i(\lambda_1, \lambda_2) \right] \quad (14)$$

由图(2)给出了  $L=10$  km,  $D=4$  m,  $\lambda_1=1$   $\mu$ m 条件下  $\Delta_c^2$  的计算结果。显然只有当信标波长  $\lambda_2$  和发射波长  $\lambda_1$  一致时剩余位相误差才为零。当  $\lambda_1/\lambda_2 < 1$  时, 即用长波长校正短波长, 由于位相畸变随波长的增加而减小, 结果将补偿不足, 而且剩余位相误差随  $\lambda_1/\lambda_2$  的减小而增加, 最后趋于没有补偿时的值, 当  $\lambda_1/\lambda_2 > 1$  时, 即用短波长校正长波长, 校正量大于实际的畸变量, 剩余位相误差随  $\lambda_1/\lambda_2$  的增加而迅速增大, 当  $\lambda_1$  超过  $\lambda_2$  一定值时剩余位相误差达到没有补偿时的值, 如果用更短的信标波长势必会使补偿的结果比没有补偿时更糟。以上分析表明, 在这种校正方法下, 只有用很接近发射波长的信标光波才会有较小的剩余位相误差, 从而获得较好的补偿效果。

为了得到更好的补偿效果, 可以将  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \varphi_2$  作为位相的校正量来补偿发射光束的位相畸变  $\varphi_1$ , 这时剩余位相方差为

$$\Delta_c'^2 = \sum_i [O_{ii}(\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2/\lambda_1)^2 \cdot O_{ii}(\lambda_2, \lambda_2) - 2\lambda_2/\lambda_1 O_{ii}(\lambda_1, \lambda_1)], \quad (15)$$

经整理后上式变为

$$\Delta_c'^2 = \left(\frac{D}{r_{01}}\right)^2 [P_i(\lambda_1, \lambda_1) + P_i(\lambda_2, \lambda_2) - 2P_i(\lambda_1, \lambda_2)], \quad (16)$$

我们对不同情况下的  $\Delta_c'^2$  作了计算, 结果表明剩余位相误差大大减小了, 图 3 是对应于  $L=10 \text{ km}$ ,  $D=4 \text{ m}$ ,  $\lambda_1=1 \mu\text{m}$  的计算结果. 图 3 与图 2 比较可清楚地看到  $\Delta_c'^2$  比  $\Delta_c^2$  小得多, 特别是  $\lambda_1/\lambda_2 > 1$  时  $\Delta_c'^2$  很小, 例如当  $\lambda_1/\lambda_2=3$  时  $\Delta_c'^2$  为  $10^{-5}(D/r_{01})^{5/3}$ , 比原来减小 5 个数量级以上; 当  $\lambda_1/\lambda_2 < 1$  时,  $\Delta_c'^2$  稍大一些, 但直到  $\lambda_1/\lambda_2=0.5$  时,  $\Delta_c'^2$  也只有  $2.5 \times 10^{-4}(D/r_{01})^{5/3}$ , 仍有三个数量级减小.

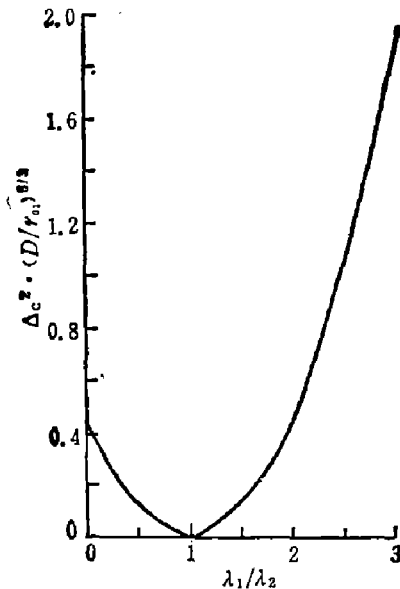


图 2 剩余位相误差  $\Delta_c^2$   
( $\lambda_1=1 \mu\text{m}$ ,  $L=10 \text{ km}$ ,  $D=4 \text{ m}$ )  
Fig. 2 Residual Phase error  $\Delta_c^2$

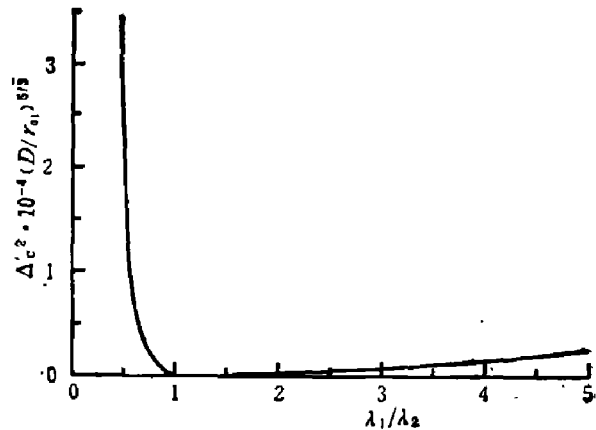


图 3 剩余位相误差  $\Delta_c'^2$   
( $\lambda_1=1 \mu\text{m}$ ,  $L=10 \text{ km}$ ,  $D=4 \text{ m}$ )  
Fig. 3 Residual phase error  $\Delta_c'^2$

## 4 小 结

以上分析结果表明, 由于湍流效应与波长有关, 用一种波长探测到的位相信息只能对相同波长上的位相畸变进行完全校正. 在用双波长自适应光学系统校正大气湍流效应时, 直接以信标光  $\lambda_2$  的位相畸变为位相校正量只能部分地校正发射光  $\lambda_1$  上的位相畸变, 当两个波长相差较大时特别是  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  时将产生很大的剩余位相误差. 为了减小剩余位相误差可将信标位相误差与波长比值  $\lambda_2/\lambda_1$  的乘积作为位相校正量, 这样在几何光学近似下理应完全校正发射光束的位相畸变, 但由于衍射效应的存在, 这种校正也将产生剩余位相误差. 衍射效应产生的剩余位相误差即使在两波长相差较大时一般也不大, 因此对信标波长的要求大大放宽了. 在具体实施时宜选用短波长为信标光, 一般可用可见光波段的信标校正近红外或红外波段光波的位相畸变.

## 参 考 文 献

- 1 Greenwood D P. *J. Opt. Soc. Am.* 1977; **67**(3): 282
- 2 Ishimaru A. *IEEE Trans. Antennas Propag. AP.*, 1972; **20**(1): 10
- 3 Fried D L. *J. Opt. Soc. Am.*, 1965; **55**(11): 1427
- 4 Noll R J. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976; **66**(2): 207

## ATMOSPHERIC DISPERSION IN ADAPTIVE OPTICS

FENG YUEZHONG SONG ZHENGFANG GONG ZHIBEN

*(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031, China)*

The atmospheric dispersion in a two-wavelength adaptive system is discussed by Zernike's polynomial expansion. The bifrequency correlation function of the expansion coefficients is presented and used to derive the residual phase error due to dispersion. It is shown that the compensation will not be exact because there will be phase difference between the transmitted beam and the beacon's beam when the wavelengths are different. By using shorter wavelength beacon as well as multiplying the beacon's signal by  $\lambda_2/\lambda_1$  (the ratio of beacon's wavelength to transmitted wavelength), the phase difference variance will be considerably reduced.

**Key words.** adaptive optics, atmospheric dispersion, residual phase error