

# 静电电子回旋脉塞的理论分析\*

于善夫 熊彩东 刘盛纲

(电子科技大学高能电子学研究所, 四川, 成都, 610054)

本文考虑了电子注厚度及交、直流空间电荷效应以后, 对静电电子回旋谐振脉塞(EECRM)进行了理论分析, 并讨论了其特性的变化情况。

关键词: 空间电荷效应, 不稳定性, 增长率。

## 1 引言

静电电子回旋谐振脉塞(EECRM)是1984年提出的<sup>[1]</sup>, 其机理是在同轴波导系统中注入相对论或非相对论性回旋电子注, 利用内外导体间的径向静电场约束电子回旋, 使电子与同轴高频场(TE、TM或TEM模)发生同步相互作用, 产生相干辐射。EECRM具有可以实现电压调谐、可工作于高次回旋模与非相对论状况下去掉了静磁回旋管中的磁场等优点, 为探索体积小、效率高的中小功率毫米波、亚毫米波源提供了一条新途径。目前已有不少理论与实验报道<sup>[2~4]</sup>。美国学者I. Alexeff提出的与EECRM类似的Orbitron也在毫米波段获得了相干辐射输出<sup>[5]</sup>。在以往有关EECRM和Orbitron的文献中, 处理的大多是理想模型, 即电子注为圆轨道运动, 注的径向厚度无限薄, 略去空间电荷效应的影响等。从本文研究结果可以看到, 实际上厚电子注及空间电荷效应在EECRM中起重要作用, 并将改变其部分特性。

## 2 EECRM系统空间电荷场对电子稳态运动的影响

为了得到解析解, 采用美国学者R. H. Pantell早期的方法<sup>[6]</sup>。在图1所示的圆柱坐标系( $R, \varphi, z$ )中, 计入电子注径向有限厚度 $\tau$ , 由拉普拉斯方程及场匹配法, 可以导出电子注所在位置的空间电荷场为

$$E_\varphi = jH_1 R_1 + H_2 R_0 \varphi_1, \tag{1}$$

$$E_R = \frac{\rho_0 \tau}{2\epsilon} + H_3 R_1 + jH_4 R_0 \varphi_1; \tag{2}$$

其中

$$H_1 = \frac{m\rho_0\tau}{2\epsilon} R_0^{-2m-1} \frac{(R_0^{2m} + R_n^n R_b^m)(R_a^n R_b^m - R_0^{2m})}{R_b^{2m} - R_a^{2m}}, \tag{3}$$

$$H_2 = -\frac{m\rho_0\tau}{2\epsilon} R_0^{-2m-1} \frac{(R_0^{2m} - R_a^{2m})(R_b^{2m} - R_n^{2m})}{R_b^{2m} - R_a^{2m}}, \tag{4}$$

本文1990年9月19日收到, 修改稿1990年11月27日收到。

\* 国家自然科学基金资助项目。

$$H_3 = -\frac{\rho_0 \tau}{2\epsilon R_0} + \frac{m\rho_0 \tau}{2\epsilon} R_0^{-2m-1} \frac{(R_0^{2m} + R_b^{2m})(R_0^{2m} + R_a^{2m})}{R_b^{2m} - R_a^{2m}}, \quad (5)$$

$$H_4 = \frac{m\rho_0 \tau}{2\epsilon} R_0^{-2m-1} \times \frac{(R_0^{2m} - R_a R_b^m)(R_0^{2m} + R_a^m R_b^m)}{R_b^{2m} - R_a^{2m}}, \quad (6)$$

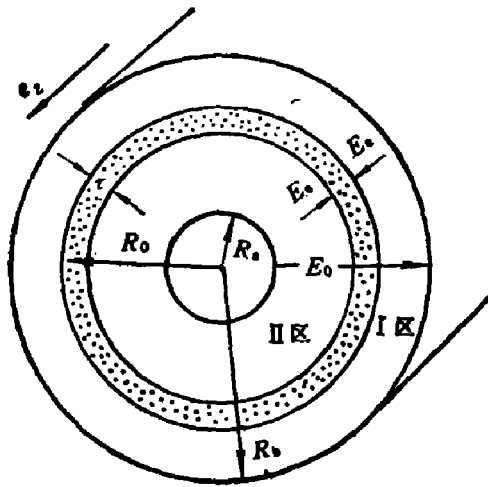


图 1 电子注位形

Fig. 1 Configuration of electron beam

$m$  为角向谐波数,  $R_0$  为电子注平均半径.

空间电荷场作用力为

$$f_s = [(f_{sR})_0 + f_{sR}] e_R + f_{s\phi} e_\phi + f_{sz} e_z. \quad (7)$$

当环形电子注处于稳定平衡时,  $R_1 = 0, \phi_1 = 0, E_\phi = 0$ , 角向不出现群聚. 这时径向的直流空间电荷场为

$$(E_R)_0 = \frac{\rho_0(R_0)\tau}{2\epsilon}; \text{ 直流作用力为 } (f_{sR})_0 = e(E_R)_0;$$

另外, 交流作用力为

$$f_{sR} = e(H_3 R_1 + j H_4 R_0 \phi_1), \quad (8)$$

$$f_{s\phi} = e(j H_1 R_1 + H_2 R_0 \phi_1), \quad (9)$$

$$f_{sz} = 0. \quad (10)$$

我们主要考察电子在横截面  $(R, \phi)$  内的运动情况, 略去了纵向  $(e_z)$  空间电荷场的影响.

图 2 是 EECRM 系统示意图, 左端是发射环形旋转电子注的电子枪(未画出), 中间是同轴谐振腔, 内外导体间电压为  $U_0$ , 静电场为

$$E_0 = e_R U_0 / \left( \ln \frac{R_b}{R_a} \right) \cdot R.$$

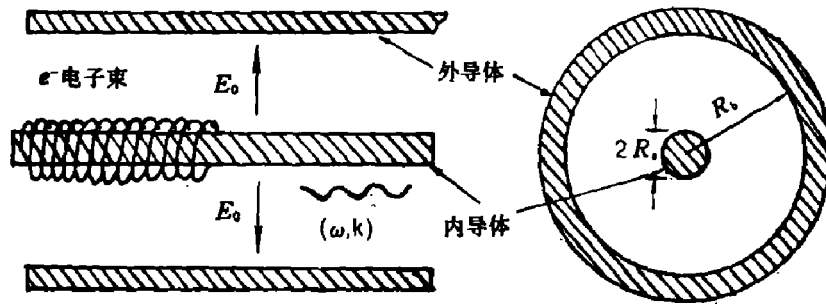


图 2 EECRM 系统示意图

Fig. 2 Schematic diagram of EECRM system

电子的相对论运动方程为

$$F = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v) = \gamma m_0 \frac{dv}{dt} + m_0 v \frac{d\gamma}{dt}, \quad (11)$$

式中  $F$  包括空间电荷力  $f_s$ 、静电场力  $eE_0$  和腔内高频场力  $f$ . 不计  $f_s, f$  时, 电子的稳态圆轨道方程为

$$\gamma_0 m_0 (-R_0 \omega_0^2) = eU_0 / R_0 \ln \frac{R_b}{R_a}. \quad (12)$$

当电子有微扰  $(R_1, R_0 \phi_1, z_1)$  时, 可以导出<sup>[1]</sup>,

$$R_1 = (R_1)_{\max} \sin \Omega_e t, \quad (13)$$

$$R_0 \phi_1 = \sqrt{2 - \beta_{0\varphi}^2} (R_1)_{\max} \cos \Omega_e t, \quad (14)$$

$$z_1 = \frac{-\beta_{0\varphi} \beta_{0z}}{\sqrt{2 - \beta_{0\varphi}^2}} (R_1)_{\max} \cos \Omega_e t; \quad (15)$$

其中  $\Omega_e = \sqrt{2 - \beta_{0\varphi}^2} \omega_0$ ,  $\beta_{0\varphi} = v_{0\varphi}/c$ ,  $\beta_{0z} = v_{0z}/c$ . 可见各扰动量均以  $\Omega_e$  作振荡, 当  $v_{0z} = 0$  (无纵向运动时) 时, 横向运动仍存在; 在非相对论情况下,  $\beta_{0\varphi} = 0$ ,  $\Omega_e = \sqrt{2} \omega_0$ , 振荡仍存在; 可见这是 EEORM 固有的振荡.

考虑直流空间电荷效应后, 电子要作圆轨道运动, 须满足

$$\omega_0^2 = \frac{|e| U_0}{\gamma_0 m_0 R_0^2 \ln \frac{R_b}{R_a}} + \frac{|e| \tau \rho_0 (R_0)}{2 \varepsilon \gamma_0 m_0 R_0}; \quad (16)$$

上式表明, 电子的初始动能  $\left(\frac{1}{2} m_0 R^2 \omega_0^2\right)$  应有所提高, 才能克服直流空间电荷效应的散焦作用, 对电子注实现稳定聚束. 这时  $\Omega_e = \sqrt{2 - \beta_{0\varphi}^2} \omega_0$  实际上也增加了, 表明直流空间电荷效应使系统的固有振荡频率上移, 从而使得当这种固有振荡模式与波导模式发生耦合作用时的工作频率也上移.

### 3 EEORM 色散方程的不稳定性分析

由文献[7], 色散方程一般形式为

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - k_c^2 = \frac{-j \omega \mu_0}{N_{mn}} \iint_{S_e} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^* ds; \quad (17)$$

其中  $k_c$  为波导截止波数,  $N_{mn} = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds$ ,  $\mathbf{E}$  为高频场值,  $S$  为整个波导截面,  $S_e$  为电子注所占截面. 对  $TE_{mn}$  模, 经过繁复冗长推导后, 可以得到如下形式的色散方程<sup>[8]</sup>,

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - k_c^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1}{N_0 \Omega_d^4} (\Delta_1 \Omega^4 + \Delta_2 \Omega^3 + \Delta_3 \Omega^2 + \Delta_4 \Omega + \Delta_5 + \Delta_6 \Omega^{-1} + \Delta_7 \Omega^{-2}); \quad (18)$$

这里系数  $\Delta_{1-7}$  包含有高频场和空间电荷效应对色散方程的贡献<sup>[8]</sup>,  $N_0$  为一积分常数,  $\omega_p$  为等离子体频率,  $\Omega = \omega - k v_{0z} - m \omega_0$ ,  $\Omega_d^4 = \Omega^2 \Omega_s^2 - \Omega_m^4$ ,  $\Omega_s^2 = \Omega_e^2 - \Omega^2$ ,  $\Omega_m^4 = M_1 \Omega^2 + M_2 \Omega + M_3$ ,  $M_{1-3}$  是计入空间电荷效应后的修正系数:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \gamma_0 (1 - \beta_0^2) A + \gamma_0^{-1} (1 - \beta_{0\varphi}^2) D, \\ M_2 &= \gamma_0 \omega_0 (1 - \beta_0^2) (2 - \beta_{0\varphi}^2) (B - C), \\ M_3 &= \gamma_0 \omega_0 (1 - \beta_0^2) (2 - \beta_{0\varphi}^2) D - \gamma_0^{-2} (1 - \beta_{0\varphi}^2) (AD + BC); \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$A, B, C, D$  与  $\omega_0^2$  同量纲, 它们分别为

$$\left. \begin{aligned} A &= \gamma_0 \omega_0^2 + e U_0 / m_0 R_0^2 \ln \frac{R_b}{R_a} - \frac{e H_3}{m_0}, \\ B &= -\frac{e H_4}{m_0}, \\ C &= -\frac{e H_1}{m_0}, \\ D &= -\frac{e H_2}{m_0}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(18)包含  $\Omega=0$  及  $\Omega_d^4=0$  两类不稳定点. 文献[1]对  $\Omega=0$  代表的同步回旋不稳定性作了详尽讨论, 指出, 只有当  $\beta_{0\varphi} \geq \beta_{\perp \text{crit}} = \frac{R_0 k_c}{m \gamma_{0z}}$ , 也即当

$$U_0 \geq (U_0)_{\text{crit}} = \frac{1}{m^2} \frac{m_0}{|\epsilon|} \gamma_0 R_0^3 \ln \frac{R_b}{R_a} \cdot \left( \frac{ck_c}{\gamma_{0z}} \right)^2 - \frac{R_0 \tau \rho_0(R_0)}{2\epsilon} \ln \frac{R_b}{R_a} \quad (21)$$

时, 真空波导模  $\omega^2 - c^2 k^2 - c^2 k_z^2 = 0$  才有可能与电子回旋模  $\omega - kv_{0z} - m\omega_0 = 0$  发生耦合作用. 从式(21)可见, 角向谐波数  $m$  越大,  $\beta_{\perp \text{crit}}$  与  $(U_0)_{\text{crit}}$  越小; 这表明若使波导模式与电子回旋高次谐波耦合, 则对电子横向初速及静电聚束电压的要求越低. 此结论与 I. Alexeff 得出的轨道频率的谐波比基波更不稳定的结论是一致的<sup>[4]</sup>, 这与大回旋半径回旋管中工作于高次回旋模式可以降低对直流磁场的要求这一特性相类似. 另外从式(21)可见, 直流空间电荷效应可降低对静电聚束电压的要求, 有利于同步回旋不稳定性的发生, 这是以往文献中没有提到过的. 其实, 由于  $E_0 = e_R U_0 / R \ln \frac{R_b}{R_a} \propto \frac{1}{R}$ , 当  $R$  由  $R_a$  增为  $R_b$  时,  $E_0$  随  $R$  增大而减小, 如图 1 中空间电荷场  $E_e$  削弱 I 区的  $E_0$  而加强 II 区的  $E_0$ , 使本来就比 I 区  $E_0$  大的 II 区  $E_0$  更大, 使得电子更快地被吸向内导体 ( $\frac{dR}{dt} < 0$ ), 同时回旋,  $R$  减小, 电子的势能减少, 损失的能量交给波场使之增长. 可见, 空间电荷效应在这里促进了电子势能的减少, 有利于波场的激发, 从而有利于不稳定性的产生.

令  $\omega = \omega_r + \delta\omega$  ( $\delta\omega \ll \omega_r$ ), 从色散方程式(18)可以求得同步回旋不稳定性的最大增长率近似为

$$I_m(\delta\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{A_7 \omega_p^2}{2N_0 M_3 \omega_r} \right)^{1/3}; \quad (22)$$

其中不稳定性工作频率为  $\omega_r = \gamma_{0z}^2 m \omega_0 \pm \gamma_{0z} [(\gamma_{0z} m \omega_0^2) - c^2 k_c^2]^{1/2}$ .

以下讨论  $\Omega_d^4=0$  代表的不稳定性. 不计空间电荷效应时, 可得  $\Omega_s^2 = \Omega_c^2 - \Omega^2 = 0$ , 即系统存在以  $\Omega_c = \sqrt{2 - \beta_{0\varphi}^2} \omega_0$  为特征效率的固有振荡, 并且该振荡将与  $\Omega = \omega - kv_{0z} - m\omega_0$  的波导模式耦合, 产生横向振荡不稳定性. 只是计入空间电荷效应后, 这种振荡复杂多了.

采用图解法来分析  $\Omega_d^4 = \Omega^2 \Omega_s^2 - \Omega_m^4 = 0$  (见图 3), 分别令  $f_1(\Omega) = \Omega^2 \Omega_s^2 = -\Omega^4 + A_0^2 \omega_0^2 \Omega^2$ ,  $f_2(\Omega) = \Omega_m^4 = M_1 \Omega^2 + M_2 \Omega + M_3$ , 作出曲线  $f_1(\Omega) \sim \Omega$  和  $f_2(\Omega) \sim \Omega$ . 文献[8]对  $f_1(\Omega)$  与  $f_2(\Omega)$  是否相交作了讨论, 指出当电压  $U_0$  大于下列阈值  $(U_0)_{\text{crit},1}$  时, 曲线  $f_1(\Omega)$  与  $f_2(\Omega)$  相交.

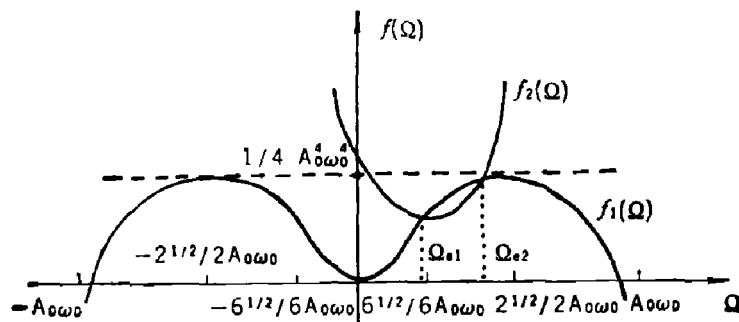


图 3  $\Omega_d^4=0$  的图解分析

Fig. 3 The graph of  $\Omega_d^4=0$

$$(U_0)_{\text{crit}\cdot 1} = \gamma_0^{-5} R_0 \ln \frac{R_a}{R_b} \left[ \frac{m \rho_0 \tau (1 - \beta_{0\varphi}^2)}{2\varepsilon (1 - \beta_0^2) (2 - \beta_{0\varphi}^2)} \right]^2 \left[ \frac{R_0^{2m} (R_b^{2m} - R_n^{2m})}{(R_0^{2m} - R_a^{2m}) (R_b^{2m} - R_0^{2m})} \right] - \frac{\rho_0 \tau}{2\varepsilon} R_0 \ln \frac{R_a}{R_b}, \quad (23)$$

经估算  $(U_0)_{\text{crit}\cdot 1}$  一般只有几百 V, 通常有  $U_0 > (U_0)_{\text{crit}\cdot 1}$ , 于是  $f_1(\Omega)$  与  $f_2(\Omega)$  有交点  $\Omega_{e1}$  与  $\Omega_{e2}$  (见图 3), 这时系统存在固有振荡, 而且可能与波导模式耦合, 产生横向振荡不稳定性. 文献[9]导出了这种不稳定性的近似增长率取如下形式

$$I_m(\delta\omega) = \left[ \frac{|B_1|}{4\sqrt{2 - \beta_{0\varphi}^2} \omega_0 \omega_r} \right]^{1/2}. \quad (24)$$

注意到等离子体频率  $\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{\gamma_0 m_0 \varepsilon_0} = \frac{|e| I}{\gamma_0 m_0 \varepsilon_0 v_{0z}} \propto I$  ( $I$  为电子注电流), 从式(22)、(24)

两式可推知, 同步回旋不稳定性的增长率  $I_m(\delta\omega) \propto I^{1/3}$ ; 而当发生固有振荡不稳定性时, 有  $I_m(\delta\omega) \propto I^{1/2}$ . 当注电流较大 ( $> 1\text{A}$ ) 时, 有  $I^{1/2} > I^{1/3}$ ; 这时空间电荷效应参与对不稳定性增长的贡献. 上述结论, 与以往关于负质量不稳定性的描述一致<sup>[10]</sup>, 也类似于正交场器件中空间电荷效应能提高小信号增益的结论<sup>[11]</sup>.

## 4 结 论

空间电荷效应在 EEORM 中有重要作用, 它使系统的固有振荡频率上移; 有利于同步回旋不稳定性的产生; 使不稳定性增长率变大. 这对  $TM_{mn}$  模, 有完全类似的结论<sup>[9]</sup>.

致谢: 作者曾与刘芷清同志作过有益的讨论, 在此深表谢意.

## 参 考 文 献

- 1 刘盛纲. 中国科学(A), 1986; (6): 657
- 2 Liu Shenggang et al. *J. Appl. Phys.*, 1986; **59**(11): 3621
- 3 Liu Shenggang et al. *IEEE Trans. on Plasma Science*, 1988; **16**(2): 275
- 4 Alexeff I. *Phys. Fluids*, 1985; **28**(6): 1990
- 5 Alexeff I, Dyex F. *Phys. Rev. Lett.*, 1980; **45** (5): 351
- 6 Pantell R. H. *IRE. Trans. on ED.*, 1960; **ED-7**(1): 22
- 7 Liu Shenggang. *Scientia Sinica*, 1979; **22** (8): 901
- 8 熊彩东. 电子科技大学研究生学报, 1990; **8**(1): 65
- 9 熊彩东. 硕士学位论文, 电子科技大学高能电子学研究所(1988)
- 10 Lau Y Y. *IEEE Trans. on ED.*, 1984; **31**(3): 329
- 11 张兆缙. 微波电子管(下册), 北京: 国防工业出版社, 1981: 41

## THEORETICAL ANALYSIS OF ELECTROSTATIC ELECTRON CYCLOTRON RESONANCE MASER\*

YU SHANFU XIONG CAIDONG LIU SHENGGANG

*(Institute of High Energy Electronics, University of Electronic Science and  
Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)*

A detailed theoretical analysis of the electrostatic electron cyclotron resonance maser is given, in which the radial thickness of electron beam, ac and dc space charge effects are taken into consideration. The characteristic changes of EEORM are also discussed in this paper.

**Key words:** space charge effect, instability, growth rate.

---

\* The project supported by National Natural Science Foundation of China.