漫射圆筒型腔体有效发射率的不确定度

季晓烨

(上海市计量技术研究所,上海,200040)

摘要----运用广义的误差传递理论,推导了漫射圆筒型腔体有效发射率不确定度的计算公式;提供了一种能够精确确定腔体发射率误差的有效方法.

关键词——腔体、发射率,不确定度。

1. 引 言

辐射腔发射率的计算一直是感兴趣的课题.随着对这个问题研究的深入,建立在一些较为理想化的物理模型基础上的数学计算模型和公式已日趋完善,所得到的计算结果也日益精确.但是,由计算所获得的腔体发射率数据的不确定度问题还有待研究解决.本文试图推导漫射圆筒模型的辐射腔体的有效发射率的不确定度计算公式,探索一种对辐射腔的发射率的不确定度进行定量分析的有效方法.

漫射辐射腔的有效发射率的计算方法很多.近年来,在一些准确性要求较高的场合,积 分方程法被认为是比较精确而理想的方法.漫射圆筒辐射腔的有效发射率的积分方程法计 算公式经 Bedford 等人的努力已趋于完善.本文在这个数理模型和计算公式的基础上讨论 辐射腔的有效发射率的不确定度的计算方法和结果.

2. 有效发射率不确定度的计算公式

辐射腔的有效发射率是构成腔体的材料的辐射特性、腔体的几何形状和尺寸以及腔体的温度和温度分布等因素的单值函数.因此,只要能确切地获得这些参量,通过下面的公式,就可以计算出漫射圆筒腔的有效发射率 8a,

$$A\varepsilon_a = b,$$
 (1a)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}_{n} \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{a} = \lfloor \varepsilon_{a1} \varepsilon_{a2} \varepsilon_{a3} \cdots \varepsilon_{aN} \rfloor,$$
$$\boldsymbol{b}' = \lfloor b_{1} b_{2} b_{3} \cdots b_{N} \rfloor,$$

[、]本文1990年3月16日收到,修改稿1990年7月2日收到。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2N} \\ & & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} \cdots a_{NN} \end{bmatrix}$$

 A^{-1} 是 A 的逆矩阵,

N 是对腔体表面有规分隔的数目的总和.其中, $a_{ij} = \delta_{ij} - [1 - \varepsilon_{\lambda}(\xi_i, T_i, \alpha_i)] \cdot g_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j, \\ 0 & i\neq j; \end{cases}$$
$$g_{ij} = \frac{1}{2} \int_{f_{j-1}}^{f_{j+1}} d^2 F_{f_{i},f_{j}},$$

其具体形式见参考文献[1];

$$b_i = \varepsilon_{\lambda}(\xi_i, T_i, \alpha_i) \cdot M_{bb,\lambda}(\xi_i, T_i) / M_{bb,\lambda}(T_0),$$

 $M_{bb,\lambda}(\xi, T)$ 是黑体光谱辐出度. T_0 是参考温度.

显然,式(1)中的 a_{ii} 和 b_i 都是材料表面的发射率 s₄(ξ, T)、几何量 ξ 及温度 T 等参量的 函数.这些量都是经过测量得到.由误差公理知,这些量必定存在测量误差或不确定度.这 些量的误差也必然会传递到最终的计算结果 s₀上去.因此,有效发射率也必定存在误差或 不确定度.

2.1 不确定度的计算公式

用 **ζ** 来统一表示影响有效发射率的变量,即材料表面发射率 ε_λ,温度 **T** 及几何量 ζ,并 将其视为一组可测量的随机变量.由式(1b)可知,有效发射率 ε_a 就是这组变量的函数,而求 解这种由随机变量组成的函数的不确定度应使用广义的设差传递公式.因此,得到的有效 发射率的方差及不确定度计算公式为

$$\sigma_{s_{ak}}^{2} = \frac{\partial \varepsilon_{ak}}{\partial \zeta'} \cdot DX \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ak}}{\partial \zeta}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ak}}{\partial \zeta'} = \left[\frac{\partial \varepsilon_{ak}}{\partial \zeta_{1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ak}}{\partial \zeta_{2}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ak}}{\partial \zeta_{3}} \cdots \frac{\partial \varepsilon_{ak}}{\partial \zeta_{M}} \right], \qquad (2)$$

其中,

 $\frac{\partial s_{ak}}{\partial \zeta_i}$ 是变量 ζ_i 对 s_{ak} 的误差传递系数,这里 M 是指变量的数目.

DX 是变量 ζ 的协方差矩阵,其形式如下:

 $DX = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3\cdots\rho_{1M}\sigma_1\sigma_M \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3\cdots\rho_{2M}\sigma_2\sigma_M \\ & \cdots & \cdots \\ \rho_{M1}\sigma_M\sigma_1 & \rho_{M2}\sigma_M\sigma_2 & \rho_{M3}\sigma_M\sigma_3\cdots\sigma_M^2 \end{bmatrix}_{J}$

式中, $\rho_{ij}\sigma_{i}\sigma_{j}$ 是 ζ_{i} 和 ζ_{j} 的协方差项或相关项, ρ_{ij} 是 ζ_{i} 和 ζ_{j} 的相关系数. 而式中的 σ_{i} 则分别是对 ζ_{i} 测量的不确定度,它们通过实测和分析是不难得到的. 因此,用式(2)求解有效发射率的不确定度主要就成了求 ζ_{i} 对 s_{a} 的传递系数 $\frac{\partial s_{a}}{\partial \zeta_{i}}$,以及 ζ_{i} 和 ζ_{j} 的相关系数 ρ_{ij} .

2.2 传递系数的计算

传递系数 $\frac{\partial \varepsilon_{ak}}{\partial \zeta_i}$ 实际上就是 ε_{ak} 对 ζ_i 的偏导数. 当然, 在式 (1b) 中采用直接对 ζ_i 求

偏导的方法来求得传递系数是很困难的.因为,一般情况下,为了有效地减小计算方法引起的误差和提高计算精度,N的取值往往很大.从式(1b)中也可以看到,等号的右边是一个由复杂函数组成的矩阵,解决这个问题的最好办法是用隐函数求偏导的方法来获得传递系数.具体步骤如下:

先将有效发射率的求解方程式(1a)表示成下列的隐函数形式

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}, \qquad (3)$$

再根据隐函数求偏导的定义可获得下列方程式:

$$\boldsymbol{J} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_{i}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_{i}}, \qquad (4)$$

而通过式(4)就可以解得 5,的传递系数,在式(4)中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{a1}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{a2}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{a3}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{aN}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{a1}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{a2}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{a3}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{aN}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial \varepsilon_{a1}} & \frac{\partial f_N}{\partial \varepsilon_{a2}} & \frac{\partial f_N}{\partial \varepsilon_{a3}} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial \varepsilon_{aN}} \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}'_a}{\partial \zeta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{a1}}{\partial \zeta_i} & \frac{\partial \varepsilon_{a2}}{\partial \zeta_i} & \frac{\partial \varepsilon_{a3}}{\partial \zeta_i} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_{aN}}{\partial \zeta_i} \end{bmatrix}, \ (i = 1, 2, \dots, M)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \zeta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_i} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_i} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_i} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial \zeta_i} \end{bmatrix}.$$

若比较一下 J 矩阵和 A 矩阵, 就可以发现它们实际上是相等的, 所以式(4) 又可以表示为

$$A\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{a}}{\partial \zeta_{i}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \zeta_{i}}$$
(5a)

或

$$\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \zeta_i} = A^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \zeta_i} \tag{5b}$$

显然,在式(5b)中,A在计算有效发射率时已经得到了,因而只要能计算出方程式(5a)中的常数项 <u>∂F</u>,传递系数的求解就变得很容易了.

一般情况下,材料的表面发射率是其物理性质、表面状态、表面温度及辐射波长的函数, 即 $\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon(\alpha, T, \lambda)$. 通过实测分析, ε_{λ} 可表示成显含 α 、T 和 λ 的函数形式. 其中,用 α 表征 材料表面的状态函数,即表面的物性和状态,因而,在一定的波长上对于一定温度的表面,其 发射率 ε_{λ} 的特性可用 α 变量来表征,并通过下式可以求得 $\frac{\partial F}{\partial \zeta_{\lambda}}$ 中对 α_{i} 变量的偏导数

$$\frac{\partial f_k}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{1}{1 - \varepsilon_{\lambda k}} \cdot \frac{M_{bb,\lambda}(\xi_k, T_k)}{M_{bb,\lambda}(T_0)} - \frac{\varepsilon_{ak}}{1 - \varepsilon_{\lambda k}}\right] \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\lambda k}}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots M_a,).$$
(6)

如前所述, № 的取值往往很大,即辐射腔的壁面被分割得很细. 但是,实际上不可能通 过测量得到那么多点的温度. 所以,腔体中的温度分布常常是用下面的方法来获得的,即先 测得辐射腔壁上的一些特殊位置的温度, 然后用回归拟合的方法求得腔体中的温度分布函 数. '用 ~ 作为腔体温度分布的回归系数,即腔温分布函数的特征参数. 并用下式就可以求 得方程(5a)中包含对 r 部份的常数项:

$$\frac{\hat{\epsilon}f_k}{\partial \tau_i} = \left\{ \frac{C_2}{\lambda T_k} \left(e^{-\frac{c_3}{\lambda T}} - 1 \right) \frac{b_k}{T_k} + \left[\frac{1}{1 - \varepsilon_{\lambda k}} \frac{M_{bb,\lambda}(\zeta_k, T_k)}{M_{bb,\lambda}(T_0)} - \frac{\varepsilon_{ak}}{1 - \varepsilon_{\lambda k}} \right] \frac{\partial \varepsilon_{\lambda k}}{\partial T_k} \right\} \frac{\partial T_k}{\partial \tau_i}, \quad (7)$$

式(7)中可略去腔体尺寸项的作用,因为该项影响甚小.

辐射腔温度分布和材料发射率函数中都显含 ξ,且 g_{ii} 中也显含 ξ, 所以在求 f_i 对 ξi 的 偏导式中,均包含了上述三项内容,即

$$\frac{\partial f_{k}}{\partial \xi_{i}} = (\varepsilon_{\lambda k} - 1) \frac{\partial g'_{k}}{\partial \xi_{i}} \cdot \varepsilon_{a} + \frac{C_{2}}{\lambda T_{k}} (e^{-\frac{c_{i}}{\lambda T_{k}}} - 1) \frac{b_{k}}{T_{k}} \frac{\partial T_{k}}{\partial \xi_{i}} + \left[\frac{1}{1 - \varepsilon_{\lambda k}} \frac{M_{bb, \lambda}(\xi_{k}, T_{k})}{M_{bb, \lambda}(T_{0})}\right] \frac{\partial \varepsilon_{\lambda k}}{\partial \xi_{i}},$$
(8)

式 (8) 中 $\frac{\partial g'_k}{\partial \xi_i}$ 的计算非常繁复,并且在腔体中的若干奇异点上,如腔体侧壁与腔体底面或腔体侧壁与腔体盖面的交接处, $\frac{\partial g}{\partial \xi_i}$ 的求解不能采用通常的求偏导法,而应该用极限法求解.

综上所述,式(5a)中的常数项已有式(6)、(7)和(8)给出,将它们分别代入式(5b)就能求 得α、τ及ξ的传递系数.

2.3 相关性和相关系数

在**ζ**中并非所有变量元都是相互独立的,也就是说,其中至少有部份变量元是相互关联的.正因为这样,在求这组变量组成的函数——辐射腔的有效发射率的方差或不确定度时,要使用相关量的广义误差传递公式.

在**ζ**中的一些相关元素的相关形式和相关程度都可以通过相关系数反映出来. 分析**ζ** 中的元素会发现,它们往往是一些参量拟合的回归系数.而回归系数的相关系数可由误差 理论的相应公式直接求得.

3. 计算结果及分析

漫射辐射腔的有效发射率的不确定度(数值) σ_{e_a} 与有效发射率 e_a 类似, 在腔体中都呈 非均匀分布状态,且其分布规律或变化趋势与 e_a 的分布情况相反. 在一个确定的腔体中, 有效发射率 e_a 越大的部位,其不确定度数值 $|\sigma_{e_a}|$ 越小. 从 σ_{e_a} 的分布曲线中还可以看到, 在腔体的底面上, σ_{e_a} 的分布较均匀;但有些情况下,在近底和侧壁的交接处, σ_{e_a} 的数值略 小,不过这种现象往往不很明显;侧壁上从近底部的位置向开口部位, $|\sigma_{e_a}|$ 呈由小到大的变 化趋势,且这种变化的幅度一般可以有 2~3 个数量级. 如果腔体有盖,则在接近侧壁和盖 的交界处, $|\sigma_{e_a}|$ 又会有一个较明显的减小趋势,并且减小的程度直接受到盖开口的大小 的影响.

3.1 可变参量的不确定度的影响及分配

有射发射率的不确定度 σ_ε 取决于许多因素,但从误差分配的角度来分析,影响有效发射 率分布和大小的诸多可变参量的不确定度 σ_ε 对 σ_ε 具有最直接的影响和作用.

(1) 图 1 反映的是 σ_{εα} 随着材料发射率的不确定度 σ_{ελ} 的变化的规律.可以看到: |σ_{εα}| 随着腔体材料发射率的不确定度 |σ_{ελ}| 减小而减小,在这种变化中,σ_{εα} 在腔体中的分布形状 没有很显著的变化. 但是, σ_{ϵ_a} 随 σ_{ϵ_a} 的变化都往往不是线性的,显然 $\frac{\partial |\sigma_{\epsilon_a k}|}{\partial |\sigma_{\epsilon_a}|}$ 是 $|\sigma_{\epsilon_a}|$ 的递 减函数.



L/D=4. $R_1/R_2=0.5$, $\epsilon_{\lambda}=0.7$, $t_0=1000^{\circ}$ C $\sigma_{\xi}=\pm0.05\%$, $\sigma_{\tau}=\pm0.2\%$ Fig. 1 The effect of $\sigma_{\epsilon_{\lambda}}$ on $\sigma_{\epsilon_{\alpha}}$ for the isothermal diffuse cylindrical cavity.

在图 1 中, L 和 D 分别是腔体的长度和直径, 且 $D=2R_2$, R_1 表示腔体开口的半径.并 分别用 $x_x y$ 和 z 来表示腔体中侧壁轴向、底面及盖上的坐标. 图中的纵坐标 σ_{e_a} 即为有效 发射率的不确定度数值 $|\sigma_{e_a}|$.





(2) 腔体温度的不确定度 σ_r 对 σ_{s_a} 也有影响,但是很小.图 2 所示的就是两种具有特殊温度分布的腔体中 σ_{s_a} 的分布情况.图 2 中假定的腔体温度从底面到开口 呈线性 变化,其变化率分别为 1%和 -1%.可以看到,通常情况下的温度不确定度 σ_r 的变化对 σ_{s_a} 没,有明显的影响.当然,非等温腔体的情况稍有不同,特别是那种开口处温度高于底部温度的腔体, σ_{s_a} 的分布很不均匀,受 σ_r 的影响也较明显.

(3) 在 σ_{ea} 中也包括了腔体几何量的不确定度 σ_{e} 的作用. 同 σ_{r} 对 σ_{ea} 的影响相似, σ_{e}



Fig. 4 Transfer coefficient distributions of size, temperature and emissivity for the isothermal diffuse cylindrical cavity.

对 σ_{e_a} 的影响也很弱. 在图 3 所设定的坐标中, σ_e 为 ±1% 和 ±0.1% 时 σ_{e_a} 的分布曲线还 能够分辨,而 σ_e 为 ±0.1% 和 ±0.01% 时对应的 σ_{e_a} 分布曲线就难以分辨了. 在通常的情 况下,几何量的测量不确定度 σ_e 要达到 ±0.01% 或 ±0.1% 是不困难的,因此,在所讨论 的发射率误差问题中可略掉 σ_e 的影响、

(4) 由上述可知, σ_{ex},σ_T 和 σ_f 对 σ_{se} 的作用和影响是各不相同的.为了便于问题的讨 论,设想影响腔体发射率的各可变参量是相互独立的,在这种情况下,σ_f 对 σ_{se} 的贡献可以 由 σ: 及其传递系数 m_f 来表征.通常情况下,实际中的 σ_{ex},σ_T 和 σ_f 往往不是同数量级的, 这是因为对各个量测量的水平不同.它们之间的数量级关系大至为 1: <u>1</u>, 1, m 它们 的传递系数也一样,具有不同的比例.由图 4 可以看到,传递系数间的差异更大,其数量级 比例约为 1:10⁻⁶:10⁻³.所以,在通常情况下,材料发射率误差的传递作用最强,其它项误差 的传递性较弱,往往可以忽略不计.

3.2 可变量对有效发射率的不确定度的作用和影响

如前所述,对有效发射率的不确定度起作用的不仅是各可变参量的不确定度,而且还有 它们的传递系数.从公式(5a)或(5b)可以看到,传递系数也都是可变参量的函数,所以,传 递系数对有效发射率的不确定度的影响和作用实际就是各可变参量对它们的作用和影响. 这就是为什么对于不同的腔体,即使腔体中的各物理参量的误差不变,它们的有效发射率的 不确定度仍会不一样的原因.

(1) 图 5 显示了 σ_ε, 随材料发射率 ε_λ 变化的情况、可以看到, 腔壁材料的发射率 ε_λ 越高, |σ_ε, |越小. 在近开口处, ε_λ 的变化几乎不会对该处的 σ_ε, 起作用, 这一特性几乎与有效 发射率分布的性质相似.



(2)图6所示的是三种不同温度分布条件下的σεα的变化规律. 从计算的结果可以发现,辐射腔的温度分布对其有效发射率的不确定度的作用还是不小的,这一点在一些精密的黑体设计中应引起足够的重视. 从图中还可以看到,在全开口的腔体中近开口处的侧壁. 区域上由温场变化而引起的σεα的变化很小,且其分布形状也无明显的变化.



图6 腔体中温度分布对 σεα 的影响





Fig. 7 The effect of the length-to-diameter ratio (L/D) on σ_{ε} for the isothermal diffuse cylindrical cavity.



Fig. 8 The effect of aperture on σ_{e} for the isothermal diffuse cylindrical cavity.

(3) 腔体的几何特性同样会影响腔体的 σ_{e_a} ,如图 7、8 所示.由图 7 可以看到, L/D 增加会使 $|\sigma_{e_a}|$ 减小,且 $|\sigma_{e_a}|$ 减小的幅度会随 L/D 增加而减小.另一方面,随着 L/D 的增加,腔底上的 σ_{e_a} 分布渐趋均匀.对于全开口腔体,在腔口处,L/D 对 σ_{e_a} 的影响却明显减弱了.图 8 则描绘了腔体在加上不同开 = 盖后,腔体的 σ_{e_a} 的分布曲线.可见,最显著的特点 是腔体开口越小,其 $|\sigma_{e_a}|$ 越小,而且这种变化也不是线性的.

从以上的讨论中可以发现,凡是能使 ε_a 增加的条件,均能使 $|\sigma_{\varepsilon_a}|$ 减小;凡是在分布中, ε_a 随 ζ 没有明显变化的部位, σ_{ε_a} 同样不会有明显的变化;在 ε_a 较均匀的区域, σ_{ε_a} 分布也较 均匀; ε_a 变化剧烈处, σ_{ε_a} 的变化也很剧烈.但是, $|\sigma_{\varepsilon_a}|$ 和 ε_a 的变化方向却始终是相反的.总 之,腔体的物理和几何特性对 σ_{ε_a} 的作用和影响与对 ε_a 的作用和影响有很相似的规律.另 一方面,腔体的物理及几何特性是通过所有的误差传递系数作用到 σ_{ε_a} 上去的. 与 σ_c 的传 递作用不同, ζ 中各量对 σ_{ε_a} 的作用的大小往往很难直接地确定.

4.结 语

本文提供了一种对漫射圆筒腔体的有效发射率进行计算的方法,且文中的推导和分析 方法也同样可运用到其它各类腔体.

从文中提供的计算结果可以看到:(1)在一些比较常见的情况中, 腔体有效发射率在腔 · 底上的不确定度数值约为 0.01~0.1%;(2)凡是有利于腔体有效发射率增大的条件, 都会 有助于减小其不确定度, 反之也成立;(3)在误差传递中, 腔体材料发射率的误差的传递作 用最明显. 总之, 腔体发射率的不确定度与腔体的物理、几何特性及误差有关, 其中物性对 *G*., 的作用比其误差的传递作用更复杂, 有时也更明显. 值得一提的是:本文得到的有效发射率不确定度并不包括计算过程等因素引起的误差. 因此,实际上的有效发射率的不确定度应是本文得出的不确定度和由计算方法等引起的不确定度合成的结果.但是,由于计算方法等引起的不确定度往往可以经过人为的处理使其减小到不足以影响合成不确定度的程度.所以,本文提出的有效发射率的不确定度的计算方法和结果是有现实意义的.

参考文献

- [1] Bedford R. E. and Ma, O. K., J. O. S. A., 64(1974),339.
- [2] Sparrow E. M. and Cess R. D., Badiation Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1978, 辐射传热, 北京·高等教育出版社, 1982, 87.
- [3] 肖明耀,误差理论及应用,北京:计量出版社,1985,247.
- [4] Фихтенголыц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Физматгиз, Москва, 1959 微积分 学教程,北京:人民教育出版社, 1959, 第一卷, 第二分册, 450.
- [5] G. M. Phillips and P. J. Taylor, Theory and Application of Numerical Analysis, Academic Press, Inc. 1973.

UNCERTAINTY OF EFFECTIVE EMISSIVITY OF A DIFFUSE CYLINDRICAL CAVITY

JI XIAOYE

(Shanghai Institute of Metrological Technology, Shanghai 200040, China)

ABSTRACT

A formula for calculating the uncertainty of the effective emissivity of a diffuse cylindrical cavity is deduced by using the theory of general error propagation. An effective method for determining precisely the error of the emissivity of a cavity is given.