

# 折迭式湍流大气路径中双频光束协方差

宋正方 马 骏\* 刘晓春

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 安徽, 合肥, 230031)

**摘要**——讨论了双频光束在用平面镜反射的折迭式湍流大气路径中传播时的相关性质, 利用 Kolmogorov 湍流模型导出了相关系数的理论表达式, 证明这种光路中双频光束所用的两个波长相差越大, 其相关性越差; 同直接光路相比, 在菲涅尔数较小时, 折迭光路上的相关系数较大; 而在菲涅尔数较大时, 则相反. 孔径平滑因子也具有类似的性质.

**关键词**——湍流大气中波的传播, 双频光束协方差, 孔径平滑效应.

## 1. 引 言

在污染监测、精密测距等红外与激光工程中, 为了提高接收灵敏度和测量精度, 常常使用双频光束, 并利用反射器(平面镜或角反射器)使光束两次通过同一湍流大气路径. 这种光路称为折迭光路, 与此相对的就是直接光路. 实验表明, 在折迭光路中多频光学工程频率的选择以及所用反射器的类型对测量结果颇有影响. 单频光束在折迭光路中扩展、闪烁与抖动的研究<sup>[1~3]</sup>都表明, 这种光路中存在放大(平面镜反射)或自补偿(角反射器反射)效应, 其它的许多工作<sup>[4]</sup>也证实上述现象是个普遍规律. 而双频光束传播问题迄今研究得较多的是直接光路上的性质<sup>[5,6]</sup>. 本文以球面波为例, 讨论在平面镜反射的情况下, 双频光束的相关性与孔径平滑效应, 以期为多频光学工程的设计与应用提供有益的资料.

## 2. 直接光路上的双频协方差

直接光路上的双频对数振幅协方差  $B_x(L, \rho, k_1, k_2)$  的普遍形式可以写为<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned}
 B_x(L, \rho, k_1, k_2) &\equiv \langle \chi(L, \rho, k_1) \chi(L, \rho, k_2) \rangle \\
 &= 2\pi^2 k_1 k_2 \int_0^\infty K dK \int_0^L d\eta \cdot \Phi_n(K) J_0(\gamma \rho K) \\
 &\quad \times R_x \left\{ \exp \left[ -\frac{i}{2} \nu (L - \eta) K^2 \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

本文1989年10月25日收到.

\* 中国科学院物理研究所.

$$\begin{aligned} & \times \left\{ 3.732b_n \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] + (1.047b_n + 2.590c_n) \left[ z^{2n+1} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{\Omega} \right)^{2n+1} \right] \right\} \\ & - \frac{1}{4n+23/3} B \left( \frac{4n+26/3}{2}, \frac{3}{2} \right) \left\{ 5.541 \left( \frac{z}{2} \right)^{11/6} c_n \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{-1} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] \right. \\ & \left. + 1.555z^{11/6} c_n \left[ z^{2n+1} - \Omega^{-1} \left( \frac{z}{\Omega} \right)^{2n+1} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)中,  $z = kD^2/4L$ ,  $B(a, b)$  为贝塔函数.

为了进行比较, 下面写出直接光路孔径平滑因子的表达式:

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{1}{\pi(1-\Omega^2)^{5/12}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{4n+2} B \left( \frac{4n+3}{2}, \frac{3}{2} \right) \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n} \right] \right. \\ & - 3.732 \frac{b_n}{4n+4} B \left( \frac{4n+5}{2}, \frac{3}{2} \right) \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] \\ & \left. - 5.541 \frac{c_n}{4n+23/3} \cdot B \left( \frac{4n+26/3}{2}, \frac{3}{2} \right) \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{-1} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] \left( \frac{z}{2} \right)^{11/6} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

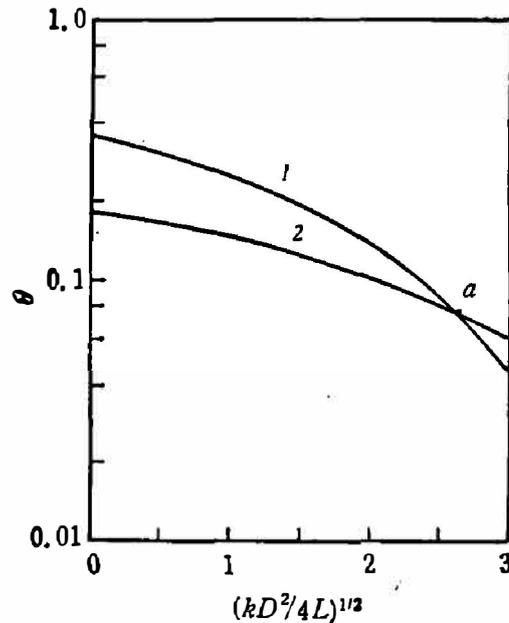


图 4 两类光路上孔径平滑因子的比较( $\Omega=0.887$ )

1—折迭光路, 2—直接光路

Fig. 4 Comparison of aperture averaging factors for two paths ( $\Omega=0.887$ ).

1—folded path; 2—direct path

图 4 以  $\Omega=0.887$  为例, 对弱起伏情况作了比较. 由图 4 可见, 折迭光路上的  $\theta$  在非涅尔数小于  $a$  时, 要比直接光路上的大. 这同图 3 所表明的事实是一致的. 我们知道, 孔径平滑效应的实质是接收孔径范围内诸多非相干元叠加平均的结果. 相干性好, 也即相当于接收孔径范围内的非相干元少, 平均的结果自然对起伏没有多大的改善(即  $\theta$  值大). 这就是我们在折迭光路上所看到的情况. 这种情况也出现在单频光束情况下<sup>[9]</sup>, 所不同的是双频光束在非涅尔数大到一定程度后折迭光路上的  $\theta$  反而比直接光路上的小, 并且出现转折的非涅尔数还同  $\Omega$  有关.

当  $\rho=0$  时, 式(6)简化为

$$b_x(2L, 0, k_1, k_2) = \frac{1 - \Omega^{5/6}}{(1 - \Omega^2)^{5/12}}. \quad (7)$$

对于平面波或准直光束也可得到同样的结果<sup>[7]</sup>.

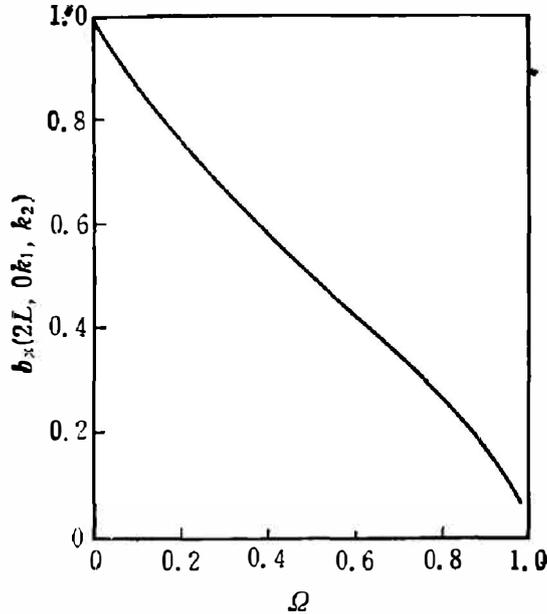


图 1 相关系数与  $\Omega$  的关系

Fig. 1 The correlation coefficient as a function of  $\Omega$ .

图 1 示出按式(7)计算的结果。从图 1 可以看出相关系数随着  $\Omega$  的增大而单调下降, 也即两个波长相差越大, 其相关性越差。因此多波长光学工程不宜采用相差太大的两个波长。我们曾用同轴传输的  $\text{CO}_2$  和 He-Ne 激光作了相关系数的测量, 实验结果是支持上述结论的<sup>[8]</sup>。

### 3. 折迭光路上的双频对数振幅协方差

经平面镜反射的球面波在接收端 ( $L=0$ ) 的对数振幅协方差可以写成

$$\begin{aligned} B_x^-(0, \rho, k_1, k_2) = & B_x(2L, \rho, k_1, k_2) + 0.066\pi^2 k^2 O_n^2 (1 - \Omega^2)^{-1} \\ & \cdot \text{Re} \left( \int_0^\infty dK \int_0^L d\eta K^{-8/3} J_0 \left( \frac{\rho\eta K}{L} \right) \left\{ \exp \left[ -\frac{i\Omega}{k} \frac{\eta(L-\eta)}{L} K^2 \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \exp \left[ -\frac{i}{k} \frac{\eta(L-\eta)}{L} K^2 \right] - \exp \left[ -\frac{i\Omega}{k} \eta K^2 \right] + \exp \left[ -\frac{i}{k} \eta K^2 \right] \right\} \right); \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)中, 第一部分  $B_x(2L, \rho, k_1, k_2)$  代表直接传播  $2L$  距离的贡献; 而第二部分即为往返光束重迭对相关性的贡献。积分中的第一和第二项可用上述步骤来处理, 而第三、第四项也很容易解出, 经过整理后得到

$$\begin{aligned} B_x^-(0, \rho, k_1, k_2) = & B_x(2L, \rho, k_1, k_2) + B_x(2L, 0, k) (1 - \Omega^2)^{-1} \\ & \cdot \left\{ 0.2806 \text{Re} \left[ {}_1F_1 \left( \frac{11}{6}; 1; -iX \right) - \Omega^{5/6} {}_1F_1 \left( \frac{11}{6}; 1; \frac{-iX}{\Omega} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1.047I_m \left[ {}_1F_1\left(\frac{11}{6}; 1; -iX\right) - \Omega^{5/6} {}_1F_1\left(\frac{11}{6}; 1; \frac{-iX}{\Omega}\right) \right] \\
& + 1.555X^{11/6}I_m \left[ {}_2F_2\left(\frac{11}{3}, 1, \frac{17}{6}, \frac{17}{6}; -iX\right) - \Omega^{-1} {}_2F_2\left(\frac{11}{3}, 1, \frac{17}{6}, \frac{17}{6}; \frac{-iX}{\Omega}\right) \right] \\
& + 0.6941R_s \left[ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}; 1; iX\right) - \Omega^{5/6} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}; 1; \frac{iX}{\Omega}\right) \right] \\
& - 2.590I_m \left[ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}; 1; iX\right) - \Omega^{5/6} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}; 1; \frac{iX}{\Omega}\right) \right] \Big\}; \quad (9)
\end{aligned}$$

当  $\rho=0$  时, 式(9)简化为

$$B_x^{-1}(0, \rho, k_1, k_2) = 1.97B_x(2L, 0, k) \frac{1 - \Omega^{5/6}}{1 - \Omega^2}; \quad (10)$$

由此可求出  $\rho=0$  时, 折迭光路上由平面镜反射的球面波对数振幅起伏方差的放大倍数

$$A \equiv \frac{B_x^{-1}(0, 0, k_1, k_2)}{B(2L, 0, k)} = 1.97 \frac{1 - \Omega^{5/6}}{1 - \Omega^2}; \quad (11)$$

图 2 给出了式(11)的计算结果. 在  $\Omega=0$  (即单频) 时,  $A=1.97$ ; 这与文献[3]所得

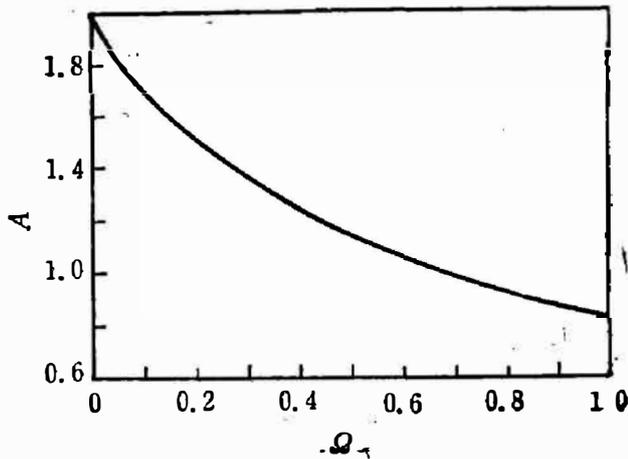


图 2 双频对数振幅起伏方差在折迭光路上的放大倍数

Fig. 2 Amplification factor of the log-amplitude variance for bifrequency beam on folded path.

的结果很一致. 我们曾利用 He-Ne 激光在  $L=370$  m 光路上测量了放大倍数, 在  $\rho \approx 0$  时, 得到  $A=1.9 \pm 0.1$ ; 这完全证实了上述理论. 当  $\Omega$  较大时, 放大倍数单调下降, 甚至可以降到小于 1 (当  $\Omega \geq 0.7$  时). 就这一点而言, 所用的两个波长相差越大越好, 湍流的影响将会降低.

折迭光路上的双频球面波对数振幅起伏相关系数可以定义为

$$\begin{aligned}
& b_x^{-1}(0, \rho, k_1, k_2) \\
& \equiv B_x^{-1}(0, \rho, k_1, k_2) \\
& / [B_x(0, 0, k_1) B_x(0, 0, k_2)]^{1/2}; \quad (12)
\end{aligned}$$

由式(9)等所导出的公式可得

$$\begin{aligned}
& b_x^{-1}(0, \rho, k_1, k_2) \\
& = (1 - \Omega^2)^{-5/12} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \left[ \left( \frac{X}{2} \right)^{2n} - \Omega^{5/6} \left( \frac{X}{2\Omega} \right)^{2n} \right] \right. \\
& + 0.2806 \left[ X^{2n} - \Omega^{5/6} \left( \frac{X}{\Omega} \right)^{2n} \right] - 3.732b_n \left[ \left( \frac{X}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{5/6} \left( \frac{X}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] \\
& + 0.2806 \left[ X^{2n+1} - \Omega^{5/6} \left( \frac{X}{\Omega} \right)^{2n+1} \right] - 5.541c_n \left[ \left( \frac{X}{2} \right)^{11/6} \left[ \left( \frac{X}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{-1} \left( \frac{X}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] \right. \\
& + 0.2806X^{11/6} \left[ X^{2n+1} - \Omega^{-1} \left( \frac{X}{\Omega} \right)^{2n+1} \right] + 0.6941d_n \left[ X^{2n} - \left( \frac{X}{\Omega} \right)^{2n} \right] \\
& \left. - 2.590e_n \left[ X^{2n+1} - \Omega^{5/6} \left( \frac{X}{\Omega} \right)^{2n+1} \right] \right\}; \quad (13)
\end{aligned}$$

式(13)中, 系数  $a_n$ 、 $b_n$  和  $c_n$  的递推公式已由第二节给出,  $d_n$  和  $e_n$  的递推公式为

$$d_r = -d_{n-1} \frac{(2n-23/6)(2n-17/6)}{(2n)^2(2n+1)^2}, \quad d_0 = 1;$$

$$e_n = -e_{n-1} \frac{(2n-17/6)(2n-11/6)}{(2n)^2(2n+1)^2},$$

$$e_0 = -11/6;$$

当  $\rho = 0$  时, 式(13)简化为

$$b_x^-(0, 0, k_1, k_2) = 1.97b_x(2L, 0, k_1, k_2). \quad (14)$$

这就是说, 用平面镜反射的折迭光路上的双频球面波相关系数的放大倍数也是 1.97, 同单频球面波对数振幅起伏方差的放大倍数完全一致。

两种光路上的相关系数如图 3 所示。从图(3)可见, 当接收场的菲涅尔参数  $(k\rho^2/4L)^{1/2}$  较小时, 折迭光路上的相关系数比直接光路上的大, 而当菲涅尔参数大到一定程度后两者的相关系数则相反。这个事实意味着过大的接收孔径将会大大降低振幅起伏的相关性。

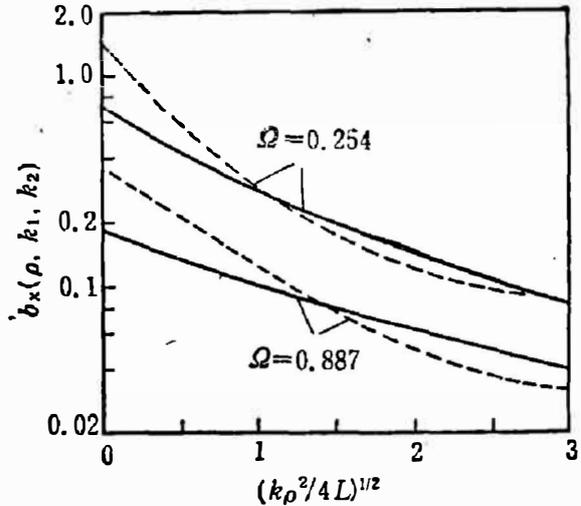


图 3 两种光路上相关系数的比较  
——直接光路; .....折迭光路

Fig. 3 Comparison of correlation coefficients for two paths.

——direct path; - - - - folded path

### 4. 孔径平滑效应

在实际应用中, 总是使用具有一定面积的接收光学系统来接收辐射信号, 这时, 存在着众所周知的孔径平滑效应; 也即接收信号的起伏将随接收孔径的增大而减弱(当其它条件不变时)。减弱的程度由孔径平滑因子来表征, 其定义为

$$\theta = \sigma_r^2 / \left( \frac{1}{4} \pi D^2 \right)^2 B_r(0); \quad (15)$$

式(15)中,  $D$  为接收孔径的直径;  $B_r(0)$  为点接收情况下的光强起伏方差( $\sigma_r^2$ ),  $\sigma_r^2$  为接收信号的起伏方差。理论上已证明

$$\theta = \frac{1}{(\pi D)^2} \int_0^D d\rho \rho b_r(\rho) \left[ \cos^{-1} \left( \frac{\rho}{D} \right) - \frac{\rho}{D} \left( 1 - \frac{\rho^2}{D^2} \right)^{1/2} \right]; \quad (16)$$

式(16)中,  $b_r(\rho)$  为光强起伏相关系数, 它与对数振幅起伏协方差的关系是:

$$b_r(\rho) = \{ \exp[4B_x(\rho)] - 1 \} / \{ \exp[4B_x(0)] - 1 \}; \quad (17)$$

当起伏很弱 ( $B_x(0) \ll 1$ ) 时, 式(17)简化为

$$b_r(\rho) = b_x(\rho); \quad (18)$$

于是, 利用上节得到的结果很易求出折迭光路上双频球面波的孔径平滑因子, 在弱起伏时存在下述表达式:

$$\theta^- = \frac{16}{\pi(1-\Omega^2)^{5/12}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4n+2} B \left( \frac{4n+3}{2}, \frac{3}{2} \right) \left\{ a_n \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n} \right] + (0.2806a_n + 0.6941d_n) \left[ z^{2n} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{\Omega} \right)^{2n} \right] \right\} - \frac{1}{4n+4} B \left( \frac{4n+5}{2}, \frac{3}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ 3.732b_n \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] + (1.047b_n + 2.590e_n) \left[ z^{2n+1} - \Omega^{5/3} \left( \frac{z}{\Omega} \right)^{2n+1} \right] \right\} \\ & - \frac{1}{4n+23/3} B\left(\frac{4n+26/3}{2}, \frac{3}{2}\right) \left\{ 5.541 \left( \frac{z}{2} \right)^{11/6} c_n \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{-1} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] \right. \\ & \left. + 1.555z^{11/6} c_n \left[ z^{2n+1} - \Omega^{-1} \left( \frac{z}{\Omega} \right)^{2n+1} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)中,  $z = kD^2/4L$ ,  $B(a, b)$  为贝塔函数.

为了进行比较, 下面写出直接光路孔径平滑因子的表达式:

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{1}{\pi(1-\Omega^2)^{5/12}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{4n+2} B\left(\frac{4n+3}{2}, \frac{3}{2}\right) \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n} \right] \right. \\ & - 3.732 \frac{b_n}{4n+4} B\left(\frac{4n+5}{2}, \frac{3}{2}\right) \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{5/6} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] \\ & \left. - 5.541 \frac{c_n}{4n+23/3} \cdot B\left(\frac{4n+26/3}{2}, \frac{3}{2}\right) \left[ \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+1} - \Omega^{-1} \left( \frac{z}{2\Omega} \right)^{2n+1} \right] \left( \frac{z}{2} \right)^{11/6} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

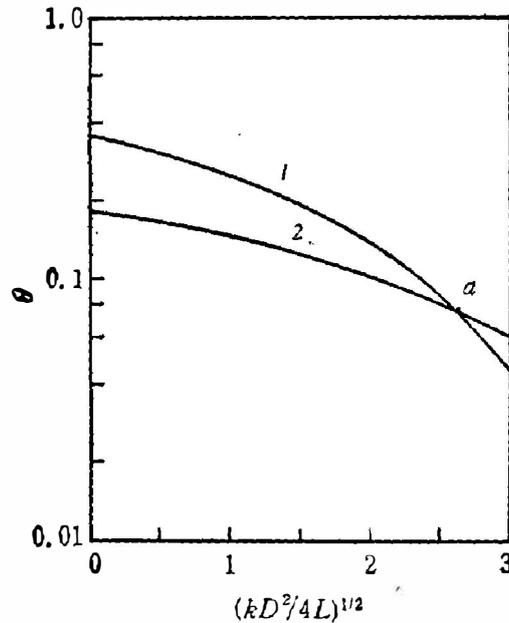


图4 两类光路上孔径平滑因子的比较( $\Omega=0.887$ )

1—折迭光路, 2—直接光路

Fig. 4 Comparison of aperture averaging factors for two paths ( $\Omega=0.887$ ).

1—folded path; 2—direct path

图4以 $\Omega=0.887$ 为例, 对弱起伏情况作了比较. 由图4可见, 折迭光路上的 $\theta$ 在非涅尔数小于 $\alpha$ 时要比直接光路上的大. 这同图3所表明的事实是一致的. 我们知道, 孔径平滑效应的实质是接收孔径范围内诸多非相干元叠加平均的结果. 相干性好, 也即相当于接收孔径范围内的非相干元少, 平均的结果自然对起伏没有多大的改善(即 $\theta$ 值大). 这就是我们在折迭光路上所看到的情况. 这种情况也出现在单频光束情况下<sup>[9]</sup>, 所不同的是双频光束在非涅尔数大到一定程度后折迭光路上的 $\theta$ 反而比直接光路上的小, 并且出现转折的非涅尔数还同 $\Omega$ 有关.

## 5. 小 结

本文从直接光路上的双频球面波对数振幅起伏协方差出发,讨论了折迭光路上的情形,证明这种光束的相关性同表征两个频率之间相对大小的参数  $\Omega$  紧密有关,  $\Omega$  越大,相关性将越差;平面镜反射的折迭光路上双频光束起伏的放大效应不再像单频时那样永远大于或等于 1,而在  $\Omega \geq 0.7$  时,可以小于 1;两类光路上相关系数的相对大小与非涅尔参数有关,因而导致孔径平滑因子也出现类似的情况。

上述结论是针对球面波求得的,但也适用于平面波(或准直光束)。相关性问题可以从这两类光束的双频相关系数具有相同的表达式得到证明,而折迭光路中孔径平滑效应与非涅尔参数的关系,我们已在文献[2]中讨论单频准直光束问题时得到过类似的结论。

这些结果可望对多频光学工程设计中选择频率有所裨益。例如,在相干性探测中,两个频率应当尽可能接近,以提高相关性;而在非相干探测中不妨选用相差较大的两个频率,以减少湍流造成的信号起伏的影响。

最后顺便指出,我们是在弱起伏范围内展开讨论的,在强起伏条件下,作为出发点的方程(1)不再适用,因此整个性质可能会产生变化。这个问题的解决有待强起伏湍流效应理论的进一步发展。

## 参 考 文 献

- [1] 宋正方,激光技术,12 (1988), 1: 1.
- [2] 宋正方、冯岳忠, *Intern. Symp. Radio Propagation*, Beijing, 1988, 338.
- [3] 张逸新、宋正方、龚知本,中国激光,14 (1987), 179.
- [4] Aksenov V. P. et al., *J. Opt. Soc. Am. A1* (1984), 263.
- [5] Ishimaru Akira, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, 1978, 19-5, 随机介质中波的传播和散射,黄润恒等译,北京:科学出版社,1986, 439.
- [6] Ben-Yosef N. et al., *Appl. Opt.* 25 (1986), 3486.
- [7] Gurvich A. S. et al., *Opt. Acta*, 26 (1979), 555.
- [8] 韩守春等,红外研究,7 (1988), 5~6: 457.
- [9] 宋正方等,中国激光,15 (1988), 350.

## COVARIANCE OF BIFREQUENCY BEAM PROPAGATING IN A FOLDED TURBULENT ATMOSPHERIC PATH

SONG ZHENGFANG, MA JUN, LIU XIAOCHUN

*(Anhui Institute of Optics and Mechanics, Academia Sinica, 230031, Hefei, Anhui, China)*

### ABSTRACT

Correlation of bifrequency beam propagating in a folded turbulent atmospheric path deflected from a plane mirror is discussed in this paper. Using Kolmogorov's turbulence model, a theoretic expression of correlation coefficient is derived. It is shown that the farther the difference between two wavelengths of the beam, the worse the correlation is. The correlation coefficient for folded path is larger than that for direct path as the Fresnel parameter is less than a certain number and vice versa. The same behavior exists for the aperture averaging factor.