

# 红外激光束经卡塞格伦系统 衍射后的远场分布\*

李正直 倪振宇

(杭州大学物理系, 浙江, 杭州, 310028)

**摘要**——把卡塞格伦系统等效为圆环光阑, 利用高斯光束的贝塞尔级数展开, 首次得到了红外激光束经卡塞格伦系统衍射后的远场分布表达式, 对所得结果进行了讨论, 并和均匀光波场的情形进行了比较.

**关键词**——高斯光束传播, 衍射图样, 卡塞格伦系统.

## 1. 引 言

近年来在文献中多次讨论过高斯光束经圆孔光阑衍射后在非涅耳区和夫琅和费区的光场特性<sup>[1~5]</sup>, 然而, 较少讨论高斯光束经圆环的衍射特性. 由于红外激光束传播时, 常应用卡塞格伦系统, 本文把卡塞格伦系统等效为圆环光阑, 并将高斯光束用贝塞尔级数展开, 得到了高斯光束经卡塞格伦系统衍射后的远场分布表达式. 对所得结果进行了讨论, 并和均匀光波场的情形作了比较.

## 2. 原 理

对于垂直于光轴平面上的圆对称光波场, 当它表示为沿径向变化的函数, 即  $V(\rho, \theta) = f(\rho)$  时, 就可以简化为一维处理. 在给定区间  $(0, a)$ , 如果  $f(\rho)$  满足狄里希利条件,  $P_k (k = 1, 2, 3, \dots)$  为超越方程  $J_n(P_k a) = 0$  的所有正根, 那末对于任一  $n (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 贝塞尔函数系  $J_n(P_k \rho)$  构成一个正交完备空间, 光波场  $f(\rho)$  就可以展开为<sup>[6]</sup>

$$f(\rho) = \frac{2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_n(P_k)}{[J'_n(P_k a)]^2} J_n(P_k \rho); \quad (1)$$

式(1)中,  $\tilde{F}_n(P_k)$  是  $f(\rho)$  的有限贝塞尔变换, 即

$$\tilde{F}_n(P_k) = \int_0^a f(\rho) J_n(P_k \rho) \rho d\rho, \quad (2)$$

本文 1989 年 2 月 17 日收到.

\* 浙江省自然科学基金资助课题.

对于在半径为  $a$  的圆孔光阑平面上具有常数位相因子的高斯光束,它可以表示为

$$U(\rho) = \begin{cases} e^{-(\rho/W)^2}, & 0 \leq \rho \leq a; \\ 0, & \rho > a; \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中,  $W$  是高斯光束的半宽度.

我们所做的工作表明,若按式(1)把高斯光束  $U(\rho)$  直接用贝塞尔级数来展开,则对于半宽度较大的高斯光束,需要用许多项的贝塞尔级数才能精确表示,这在实际计算中是不方便的.但是,如果把受截的圆对称高斯光束看成是均匀光波场和分布为  $f(\rho)$  的圆对称光波场的迭加,即

$$U(\rho) = C + f(\rho); \quad (4)$$

这里,  $C = e^{-(\frac{a}{W})^2}$ ; 那末,用零级贝塞尔级数的前 4 项就能够精确地表示  $f(\rho)$ , 这时

$$f(\rho) = \frac{2}{a^2} \sum_{k=1}^4 \frac{\tilde{F}_0(P_k)}{[J_1(P_k a)]^2} J_0(P_k \rho) = \sum_{k=1}^4 B_k J_0(P_k \rho); \quad (5)$$

式(5)中,

$$\tilde{F}_0(P_k) = \int_0^a f(\rho) J_0(P_k \rho) \rho d\rho = \int_0^a [e^{-(\rho/W)^2} - C] J_0(P_k \rho) \rho d\rho; \quad (6)$$

$$B_k = \frac{2}{a^2} \frac{\tilde{F}_0(P_k)}{[J_1(P_k a)]^2}; \quad (7)$$

$P_k (k=1, 2, 3, \dots)$  是方程  $J_0(P_k a) = 0$  的所有正根. 利用式(4)~(7), 我们就可以讨论任意半宽度的受截高斯光束.

在红外光学系统中,常常遇到中心遮蔽的双反射镜系统,如卡塞格伦系统.在考虑它对红外激光束的衍射效应时,我们可以把它等效为一个内、外半径分别为  $b$  和  $a$  的圆环光阑.这时,如果我们把在光阑平面上分布为  $U(\rho)$  的高斯光束用贝塞尔级数来展开,那么,由此产生的能量偏差为

$$\varepsilon = 2\pi \int_b^a [ |U(\rho)|^2 - |C + \sum_{k=1}^N B_k J_0(P_k \rho)|^2 ] \rho d\rho \quad (8)$$

用进入光阑的光束能量对上式归一化,就得到能量相对偏差

$$R_e = 1 - \frac{4}{W^2} \frac{\int_b^a |C + \sum_{k=1}^N B_k J_0(P_k \rho)|^2 \rho d\rho}{e^{-2(\frac{b}{W})^2} - e^{-2(\frac{a}{W})^2}}. \quad (9)$$

表 1 是  $N=4$  时对应于不同的内半径  $b$  和高斯光束的半宽度  $W$ , 按式(9)计算得到的能量相对偏差. 显然,随着内半径的增大,由于透过的光能量的减小,能量相对偏差相应地增加,因而跟圆孔光阑的情形有所不同. 对于半宽度较小的高斯光束,这种偏差更为显著. 当然,当内半径  $b$  很大时,由于透过光阑的光能量很小,这时,讨论半宽度很小的高斯光束的衍射是没有实际意义的,所以可以不加考虑. 表 2 列出了对应于不同半宽度的高斯光束,当  $b=0.5, 0.8, 0.9$  时所取贝塞尔级数的项数  $N$ , 由此得到的能量相对偏差  $R_e < 7 \times 10^{-4}$ .

当高斯光束垂直入射到圆环光阑上时,如果忽略常数因子,那么在远场区观察到的衍射场分布可以用孔径上光场分布本身的傅里叶变换来表示,即

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_b^a e^{-(\rho/W)^2} J_0(2\pi\omega\rho) 2\pi\rho d\rho \\ &= G_1(\omega) + G_2(\omega); \end{aligned} \quad (10)$$

表 1 对应于不同内半径和高斯光束半宽度的能量相对偏差

Table 1 Some relative energy deviation data corresponding to different inner radii and waist radii of Gaussian beams.

$B_r$		$b$				
		0.1	0.3	0.5	0.8	0.9
$W/a$	2.00	$1.7947 \times 10^{-4}$	$2.4217 \times 10^{-4}$	$2.8093 \times 10^{-4}$	$1.0661 \times 10^{-3}$	$1.5734 \times 10^{-3}$
	1.00	$9.5367 \times 10^{-6}$	$2.0027 \times 10^{-5}$	$2.9087 \times 10^{-5}$	$1.0395 \times 10^{-4}$	$1.3471 \times 10^{-4}$
	0.67	$3.7670 \times 10^{-5}$	$4.4370 \times 10^{-4}$	$8.2870 \times 10^{-4}$	$9.9330 \times 10^{-3}$	$2.0819 \times 10^{-2}$
	0.50	$1.6969 \times 10^{-4}$	$1.8382 \times 10^{-4}$	$8.3327 \times 10^{-4}$	$2.1151 \times 10^{-2}$	$6.8329 \times 10^{-2}$
	0.33	$1.6681 \times 10^{-3}$	$1.8249 \times 10^{-3}$	$2.5654 \times 10^{-3}$	$4.8640 \times 10^{-2}$	$6.1612 \times 10^{-2}$

表 2 对于不同内半径  $b$  所取的贝塞尔级数的项数Table 2 The terms of the Bessel series chosen for different values of  $b$ .

$N$		$b$			
		0.1	0.3	0.5	0.8
$W/a$	2.00	4	4	4	6
	1.00	4	4	4	4
	0.67	4	4	6	8
	0.50	4	4	6	8
	0.33	6	6	6	—

式(10)中,

$$G_1(\omega) = \int_b^a C J_0(2\pi\omega\rho) 2\pi\rho d\rho$$

$$= \frac{C}{\omega} [a J_1(2\pi\omega a) - b J_1(2\pi\omega b)]; \quad (11)$$

显然,它是均匀光波场经圆环光阑衍射后在远场区的复振幅分布<sup>[7]</sup>. 为了方便起见,这里用了空间频率坐标  $\omega$ , 它与空间坐标  $\alpha$  的关系是  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda f} \alpha$ ,  $f$  是透镜的焦距, 而  $G_2(\omega)$  为:

$$G_2(\omega) = \int_b^a \left[ \sum_{k=1}^N B_k J_0(P_k \rho) \right] J_0(2\pi\omega\rho) 2\pi\rho d\rho;$$

利用积分变量替换和贝塞尔函数的积分公式<sup>[8]</sup>, 上述积分结果为

$$G_2(\omega) = 2\pi \sum_{k=1}^N B_k \frac{[a P_k J_1(P_k a) J_0(2\pi\omega a) - b P_k J_1(P_k b) J_0(2\pi\omega b)]}{P_k^2 - (2\pi\omega)^2}$$

$$+ \frac{2\pi\omega b J_1(2\pi\omega b) J_0(P_k b)}{P_k^2 - (2\pi\omega)^2}; \quad (12)$$

式(10~12)即为高斯光束经圆环光阑衍射后在远场区的复振幅分布.

当内、外半径无限接近, 即  $b \rightarrow a$  时,  $\rho$  可视为常数, 且  $\sum_{k=1}^N B_k J_0(P_k \rho) \rightarrow 0$ , 因此

$$G(\omega) = e^{-(a/W)^2} \cdot 2\pi \cdot J_0(2\pi\omega a); \quad (13)$$

此时, 它和振幅为  $e^{-(a/W)^2}$  的均匀光波场经圆环光阑衍射后的远场分布相一致.

### 3. 结果和讨论

我们用式(10)~(12)计算了当 $a=1$ ,  $b=0.5, 0.6, 0.8, 0.9$ 时, 几种不同半宽度 $W$ 的高斯光束经圆环光阑衍射后的远场分布 $G(\omega)$ , 并跟均匀光波场的情形相比较, 对于给定的 $a$ ,  $G(\omega)$ 不仅与内半径 $b$ 有关, 而且还随着高斯光束半宽度的改变而变化。

(1) 当高斯光束的半宽度很大时( $W/a \geq 2.0$ ), 由于 $G_2(\omega) \ll G_1(\omega)$ , 因此,  $G(\omega)$ 和均匀光波场经圆环光阑衍射后的远场分布特性相类似。图1是 $b=0.5, 0.8$ 时的远场分布曲线, 由图可见, 在卡塞格伦系统的后焦面上的光强出现极大和极小的交替变化, 而且由各个光强极大组成的包络也呈现极大和极小的交替变化。当 $b$ 增大时, 在包络极小处附近, 光强分布的变化较其他地方更为显著。

包络的第一个极小与衍射花样中央极大之间所含的圆环数和相邻极小间所含的圆环数

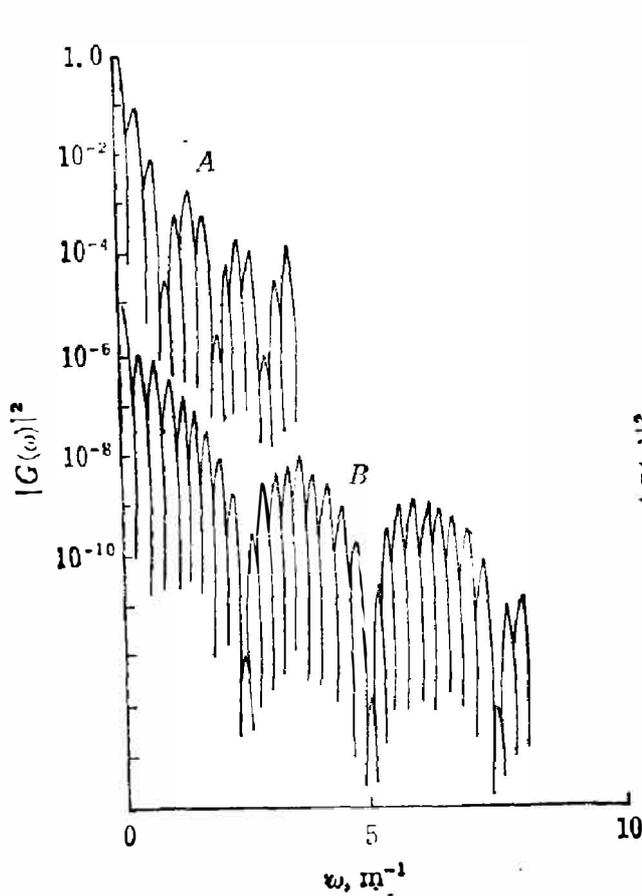


图1 半宽度为 $W/a=2.00$ 的高斯光束经圆环光阑衍射后在轴上某点横截面上的归一化光场分布。这里 $b$ 取(A)0.5, (B)0.8。为了清楚起见, 图中曲线B有个相对偏移。

Fig. 1 Normalized irradiance vs image radius  $\omega$  for obscured aperture with the Gaussian beam of waist radius  $W/a=2.00$ . The values of  $b$  are (A) 0.5, (B) 0.8. Curve B is displaced for clarity.

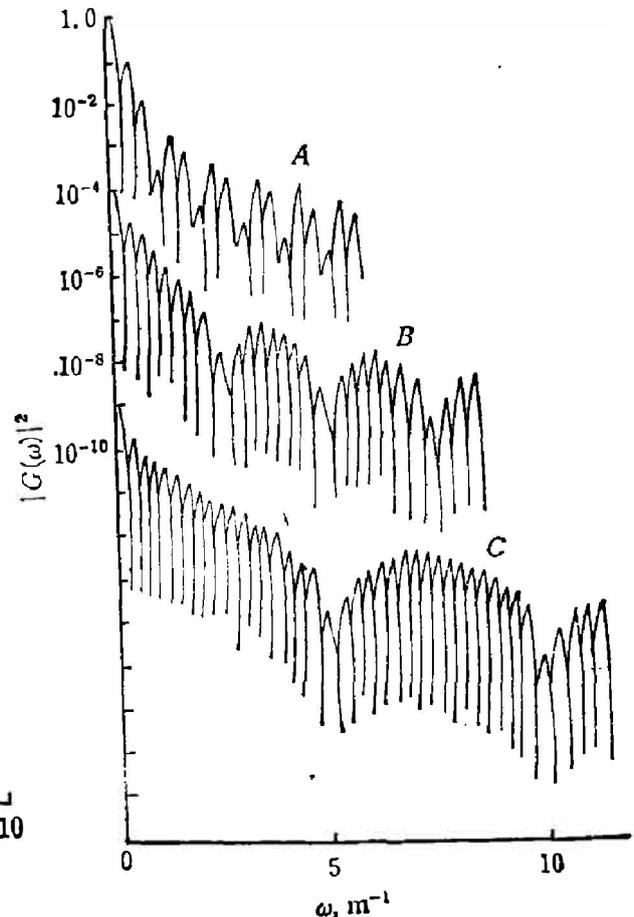


图2 半宽度为 $W/a=1.00$ 的高斯光束经圆环光阑衍射后在轴上某点横截面上的归一化光场分布。这里 $b$ 取(A)0.5, (B)0.8, (C)0.9。为了清楚起见, 图中曲线B和C有相对偏移。

Fig. 2 Normalized irradiance vs image radius  $\omega$  for obscured aperture with the Gaussian beam of waist radius  $W/a=1.00$ . The values of  $b$  are (A) 0.5, (B) 0.8, (C) 0.9. Curve B and Curve C are displaced for clarity.

$n$  相同, 都由下式决定

$$n = \frac{2a}{a-b}. \quad (14)$$

此外, 尽管包络的极大沿径向呈现不规则的分布, 但包络中相邻极小的间距相等, 且等于包络的第一个极小到衍射花样中心的距离, 在数值上它是所含圆环数  $n$  的一半, 即

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{a-b} = \frac{n}{2}. \quad (15)$$

(2) 当高斯光束的半宽度减小时, 如图 2 所示, 在包络极小处附近, 光强分布发生变化, 而离包络极小较远处光强极大的位置和大小保持不变, 从而包络沿径向的分布更加缓慢, 而包络中相邻极小的距离仍由式(15)决定, 但所含的圆环数小于  $n$ . 从图中还可以看出, 对于相同半宽度的高斯光束, 随着  $b$  的增大, 包络极小附近的光强度变化更为迅速. 当  $b$  很大

时,  $G(\omega)$  与均匀光波场经圆环光阑衍射后的远场分布相接近, 其极限就是均匀光波场的衍射, 正如式(13)所指出的那样.

(3) 当高斯光束的半宽度很小时 ( $W/a \leq 0.33$ ), 由于  $G_1(\omega) \ll G_2(\omega)$ , 衍射光场  $G(\omega)$  主要由  $G_2(\omega)$  决定, 这时各光强极大形成的各包络随着径向距离的增加而单调下降, 如图 3 所示. 对于原来离包络极小较远处的光强极大, 其位置和大小都不随高斯光束的半宽度的改变而变化, 它们在数值上彼此也比较接近.

综上所述, 把高斯光束用贝塞尔级数来展开, 可以方便而又精确地讨论高斯光束在中心遮蔽的圆对称光学系统中的衍射效应. 当在红外激光通讯, 雷达系统以及其他红外系统中用中心遮蔽的望远镜作为光学天线时, 利用本文方法可以研究中心遮蔽对天线增益和光束发散的影响, 这对于要求对远目标进行测量的系统设计, 具有重要参考价值.

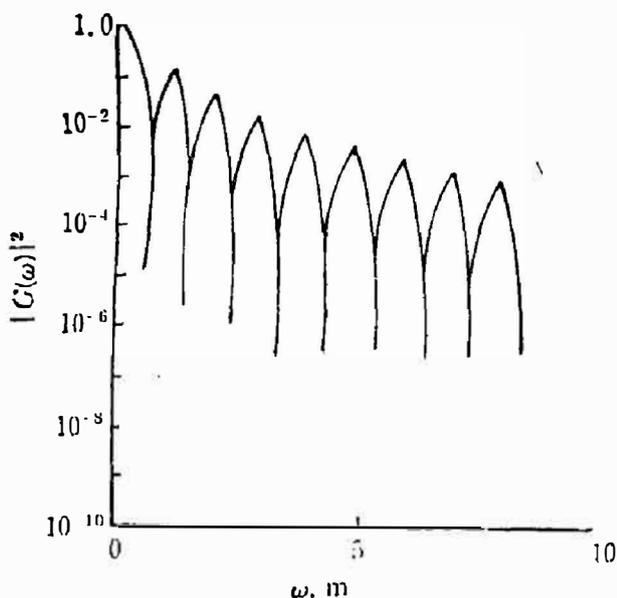


图 3 当  $b=0.5$  时, 半宽度为  $W/a=0.33$  的高斯光束经圆环光阑衍射后在轴上某点横截面上的归一化光场分布

Fig. 3 Normalized irradiance vs image radius  $\omega$  for  $b=0.5$  obscured aperture with the Gaussian beam of waist radius  $W/a=0.33$ .

### 参 考 文 献

- [1] Belland P. and Crenn J. P., *Appl. Opt.* **21** (1982), 3: 522.
- [2] Campbell J. P. and Deshazer L. G., *J. Opt. Soc. Am.*, **59** (1969), 11:1437.
- [3] Tanaka K. et al., *Appl. Opt.*, **24** (1985), 1102.
- [4] Olaofe G. O., *J. Opt. Soc. Am.*, **60** (1970), 12: 1654.
- [5] Li Y., *J. Opt. Soc. Am.*, **A4** (1987), 7: 1237.
- [6] 列别捷夫 H. H., 特殊函数及其应用. 北京: 高等教育出版社, 1957, p159~162.
- [7] 玻恩 M. 沃耳夫 E., 光学原理. 北京: 科学出版社, 1985, p543~545.
- [8] Watson G. N., *A treatise on the theory of Bessel functions.*, London: Cambridge U. Press. 1962, p134.

## FAR-FIELD DISTRIBUTIONS OF INFRARED LASER BEAM PASSING THROUGH CASSEGRAIN SYSTEM

LI ZHENGZHI NI ZHENYU

*(Department of Physics, Hangzhou University, 310028, Hangzhou, Zhejiang, China)*

### ABSTRACT

Using the Bessel series expansion of a Gaussian beam, the representation of far-field distributions of an infrared laser beam passing through the Cassegrain system, which is regarded as the obscured aperture, is presented for the first time. The results obtained are discussed and the situations for the incidences of both Gaussian and uniform beam are compared.