

宽光谱间隔普朗克函数积分的近似算法

汪宏七 赵高祥

(中国科学院大气物理研究所, 北京)

摘要——提出了一种计算宽光谱间隔的普朗克函数积分值的简单近似方法。

关键词——普朗克函数, 积分近似计算。

1. 引 言

在气象学上, 很多情况需要计算有限光谱间隔的普朗克函数积分值, 在光谱间隔很窄的情况下, 有时可以通过计算平均波长上的普朗克函数值近似, 在利用卫星进行的红外大气温度和成分遥感的反演中, 各通道辐射传输方程中的普朗克函数值即可这样得到。但在光谱间隔很宽的情况下, 就不能应用这种近似, 这时, 当然可以用数值积分方法求值, 但这很费时间。Widger 和 Woodall^[1] 提出了一种精确的近似计算方法, 把有限光谱间隔的普朗克函数的积分化成收敛级数的形式来计算, 这样, 从波数 ν 到 ∞ 的普朗克函数在温度为 T 时的积分值可以表示为

$$B(T) = C_1 C_2^{-4} T^4 \left[-x^3 \ln(1 - e^{-x}) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} (3x^2 n^{-2} + b x n^{-3} + 6n^{-4}) \right], \quad (1)$$

其中 $C_1 = 1.1909 \times 10^{-12} \text{ Wcm}^{-2}\text{sr}^{-1}$ 为第一辐射常数, $C_2 = 1.438833 \text{ Kcm}$ 为第二辐射常数, $x = C_2 \nu / T$ 。式(1)中求和所需的项数 N 与所要求的精度和 x 值的大小有关, 表 1 给出了精确到 10 位有效数字时, 对不同的 x 值所需的项数 N , 在只需精确到 5 位有效数字的情况下, 所需的项数大约可以减少到表 1 的一半, 光谱间隔 $\nu_1 \sim \nu_2$ 的普朗克函数的积分值, 可由式(1)计算 $x_1 = C_2 \nu_1 / T$ 和 $x_2 = C_2 \nu_2 / T$ 的两个函数积分值之差得到。

表 1 对应于不同 x 值的 N 值

Table 1 The values of N corresponding to different values of x .

N	91	56	42	35	29	25	22	18	12	8	6	5	3	2	1
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0	25.0

在大气环流模式中进行红外辐射传输计算时, 常把整个红外光谱区域划分成几个宽的光谱间隔, 并需要反复计算各大气层的普朗克函数的积分值, 因此, 利用式(1)比用数值积分方法大大节省计算时间。目前, 在大气环流模式中, 都使用简化的辐射计算方案。即使是这样, 辐射计算仍费时过长, 以致为了节省时间, 往往只得用较大的时间步长和较稀的空间

格点进行完全辐射计算,这也表明了仍有必要进一步减少辐射计算时间。

2. 近似方法和结果

从表 1 可知,在 x 很小的光谱间隔上,用式(1)进行计算所需的项数是很多的,这就意味着需要较多的计算时间,由于普朗克函数值随温度的升高比较平缓地增加,因而有可能用一个关于温度的简单的多项式来近似计算宽波段的普朗克函数积分值。Hense 等^[2]用下面的式子进行近似计算:

$$B(T) = \sum_{n=0}^N A_n T^n, \quad (2)$$

式(2)比式(1)更简单。用式(2)对参考文献[3]的辐射模式采用的 6 个红外波段在大气温度范围进行的计算结果表明,要精确到 6 位有效数字,大约需要 8 项。但对有的波段,误差最大时,只能精确到 4~5 位有效数字。由于某些波段在大气温度范围(180~330 K)中的普朗克函数的积分值可以相差很大(如参考文献[3]中的第 6 个波段(1255~2600 cm⁻¹),其 $B(330\text{ K})/B(180\text{ K}) \approx 225$, 在这种情况下,把式(2)用到整个大气温度范围中进行计算时,就可能产生较大的误差。考虑到这种情况,我们把整个大气温度范围划分成两个间隔分别处理,即

$$B(T) = \begin{cases} B(180) + \sum_{n=1}^N A_n (T-180)^n, & (180\text{ K} \leq T < 255\text{ K}) \\ B(255) + \sum_{n=1}^N B_n (T-255)^n, & (255\text{ K} \leq T \leq 330\text{ K}) \end{cases} \quad (3)$$

这里,与式(2)不同之处是采用了关于温度差的多项式来近似,其中, $B(180)$ 和 $B(255)$ 分别为在温度 180 K 和 255 K 时,宽光谱间隔上的普朗克函数积分值,而 $n \geq 1$ 的项则是由温度差 $(T-180\text{ K})$ 或 $(T-255\text{ K})$ 构成的修正项。系数 A_n 和 B_n 是由对不同波段精确计算出各种温度下的普朗克函数积分值,用最小二乘法求解相应的方程组来确定的。表 2 给出了相应于参考文献[3]中的 6 个红外波段在 $N=6$ 时得到的系数 A_n 和 B_n , 以及 $B(180\text{ K})$ 和 $B(255\text{ K})$ 。用表 2 的数值通过式(3)来计算时,可以精确到 6~7 位有效数字,误差最大时,也能精确到第 6 位有效数字,因而明显好于式(2)的计算结果。对于表 2 同样的 6 个波段,在一些温度下,用式(3)计算的相对误差示于表 3。在很多实际应用中,具有 6 位有效数字的精度已经足够了。这时,式(3)只需 7 项,而式(1)一般都要求更多的项,而且,式(3)中只包含简单的四则运算,而式(1)还要求对数和指数运算;因此,用式(3)计算比用式(1)更节省时间,特别是在 x 值较小的情况下,为了验证这一点,我们在 180~300 K 温度范围分别用式(1)和式(3)计算了 6 个红外波段(100~500, 500~835, 835~1000, 1000~1110, 1110~1255 和 1255~2600 cm⁻¹)的普朗克函数积分值,对每个波段都精确到 6 位有效数字。结果表明,用 IBM 4331 计算机进行计算时,式(3)(这时需要 7 项)所需的时间不到式(1)的五分之一。在环流模式中进行辐射计算时,对整个红外区域的各个宽波段上的普朗克函数积分值的计算是反复进行的,因而,这种计算时间的节省是十分有意义的。这种简单近似计算宽波段普朗克函数积分值的方法可以应用于环流模式的辐射传输计算,也可以用到其他需要反复计算宽波段普朗克函数积分值的情况。

表 2 6 个波段下式(3)的常数 B(180)和 B(255)及系数 A_n和 B_n(N=6)Table 2 Constants B(180) and B(255) and coefficients A_n and B_n (N=6) in Eq. (3) for six spectral intervals.

波 段 (CM- μ)	100~500	500~835	835~1000	1000~1110	1110~1255	1255~2600
B(180)	34.3510093	18.4937609	3.18157004	1.06413013	.721386892	.555115548
B(255)	83.0613842	86.4507432	27.1401940	12.6236833	11.4419973	17.1352121
A ₁	.537155094	.17951459e-2	-.43013765e-5	.25798796e-8	.34855734e-10	-.13289395e-12
A ₂	.526408460	.47655742e-2	.80201814e-5	-.64243788e-7	.13507084e-9	-.75288375e-14
A ₃	.128236083	.13798516e-2	.10299184e-4	-.10585600e-7	-.13711576e-9	.46129724e-12
A ₄	.49622132e-1	.88282426e-3	.66960081e-5	.99320259e-8	-.13449547e-9	.29237536e-12
A ₅	.37579306e-1	.77229650e-3	.72730720e-5	.25646299e-7	-.14913362e-9	.18037042e-12
A ₆	.35001753e-1	.92328618e-3	.12789086e-4	.93105156e-7	.24849677e-9	-.95387262e-12
B ₁	.741827406	.99634634e-3	-.24562459e-5	.17800605e-9	.63475043e-10	-.33118235e-12
B ₂	1.28942370	.49668638e-2	-.38027857e-5	-.17879668e-7	.11115583e-9	-.32235215e-12
B ₃	.551042223	.34768254e-2	.34479807e-5	-.29891409e-7	.10553015e-9	-.27720452e-12
B ₄	.294680069	.22975355e-2	.45085776e-5	-.14585636e-7	-.18612381e-10	.15435789e-12
B ₅	.298424031	.27289701e-2	.82465068e-5	-.17772014e-7	-.27517289e-11	-.13326442e-13
B ₆	.572174289	.75376981e-2	.46797926e-4	.10406319e-6	-.11853791e-9	-.54255836e-12

表 3 用式(3)算得的 6 个波段的普朗克通量密度的相对误差

Table 3 Relative errors of Planck flux densities calculated with Eq.(3) for six IR spectral intervals.

温度(K)	波 段					
	1	2	3	4	5	6
190	.44e-6	.32e-6	.11e-5	-.81e-7	.17e-6	.11e-5
200	-.61e-6	-.80e-6	-.17e-5	.18e-6	-.25e-5	-.21e-5
210	.58e-6	.10e-5	-.55e-7	.41e-6	.29e-5	.20e-5
220	-.53e-6	-.66e-6	-.69e-6	-.52e-6	-.18e-5	-.11e-5
230	-.36e-6	.40e-7	-.11e-5	.11e-5	-.18e-6	-.50e-6
240	.19e-6	.24e-6	.78e-6	.19e-9	.95e-6	.70e-6
250	.66e-7	-.12e-6	.22e-7	-.19e-6	-.35e-6	-.72e-6
260	-.50e-7	.50e-6	.10e-5	.13e-5	.36e-6	.57e-6
270	.11e-5	.64e-6	.76e-6	-.38e-6	.17e-5	.16e-5
280	-.69e-7	-.65e-6	-.30e-6	.91e-6	-.91e-6	-.61e-6*
290	.10e-5	.54e-6	.75e-6	.97e-6	.10e-5	.15e-5
300	-.71e-6	-.20e-7	-.14e-5	-.25e-6	-.66e-6	-.11e-5
310	.12e-5	.11e-5	.11e-5	.10e-5	.24e-5	.18e-5
320	-.35e-6	-.55e-8	-.75e-6	.58e-6	-.12e-6	.38e-6
330	-.20e-6	-.15e-6	-.24e-6	-.30e-7	-.25e-6	-.16e-6

参 考 文 献

- [1] Widger W. K., Jr., Woodall M. P., *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **57** (1976), 10: 1217.
[2] Hense A. et al., *Quart. J. R. Met. Soc.*, **108** (1982), 231~252.
[3] 赵高祥等, *科学通报*, **32** (1987), 19: 1479.

**APPROXIMATE CALCULATION OF INTEGRATION
OF THE PLANCK FUNCTION OVER
BROAD SPECTRAL INTERVALS**

WANG HONGQI, ZHAO GAOXIANG

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica, Beijing, China)

ABSTRACT

A simple approximate method for calculating the values of integration of the Planck function over broad spectral intervals is presented.