

# 高斯光束驱动的单输出环形腔光学双稳系统

樊锡君

(山东师范大学物理系, 山东, 济南)

田淑芬

(山东师范大学半导体所, 山东, 济南)

**摘要**——研究了高斯光束驱动的单输出环形腔光学双稳系统。用平均场近似方法得到纯吸收和共振情况下的定态方程, 并进行了线性稳定性分析。结果表明, 输入输出光强定态曲线仍呈现反向 S 型, 但高斯光束驱动情况中的失稳范围与平面波光束驱动情况有明显不同。

**关键词**——高斯光束, 光学双稳态, 平均场近似。

## 1. 引 言

最近罗利国和陈继述<sup>[1]</sup>提出了一种新的环形腔光学双稳系统——单输出环形腔双稳系统, 并讨论了输入光场为平面波时的双稳行为和定态稳定性。这种系统与双输出系统<sup>[2,3]</sup>的主要区别是把反射输出和透射输出叠加成一个输出。本文将进一步分析这种单输出系统在更实际的光场——高斯(TEM<sub>00</sub>模)光束驱动下的行为。

## 2. 定 态 方 程

考虑总长为  $\mathcal{L}$ 、具有球面镜的环形腔, 如图 1 所示。图中  $F_I$  和  $F_{RI}$  分别为输入和输出光场, 镜 1 的强度反射率为  $R$ , 镜 2、3、4 均为全反射镜。图 1(b) 与 (a) 除入射光与出射光位置调换外, 其余均相同。

设图 1(a) 中长度为  $L$ 、半径为  $d_0$  的圆柱形介质含有  $N$  个二能级原子, 原子系统是均匀展宽的, 其跃迁频率为  $\omega_a$ , 入射光束为 TEM<sub>00</sub> 模, 频率为  $\omega_0$ , 腔内光场亦为 TEM<sub>00</sub> 模。在

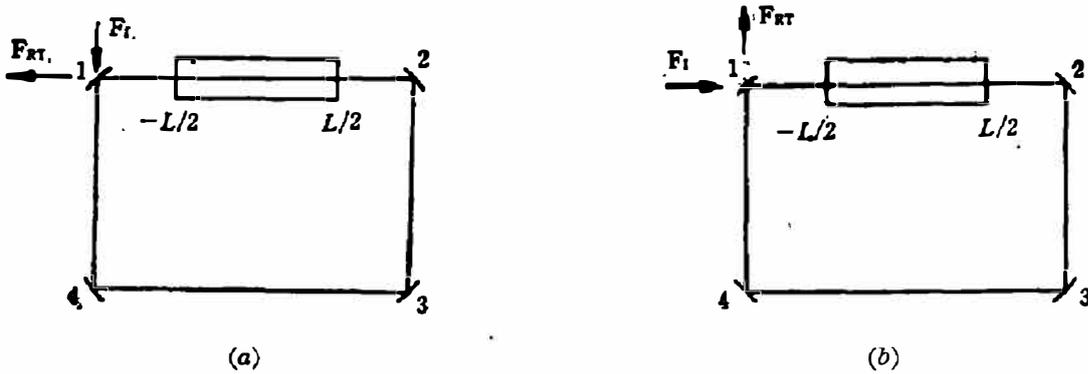


图 1 单输出系统

Fig. 1 The ring cavity with single output.

纯吸收且  $\omega_a, \omega_0$  与一个腔模频率  $\omega_0$  相等的情况下,应用偶极近似和旋波近似,可得单横模麦克斯韦-布洛赫方程组<sup>[4]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F(z, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F(z, t) &= -\alpha \int_0^{a_0} dr \frac{4r}{w_0^2} A(r, z) P(r, z, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} P(r, z, t) &= \gamma_1 \{ D(r, z, t) F(z, t) A(r, z) - P(r, z, t) \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} D(r, z, t) &= -\gamma_{11} \{ A(r, z) F(z, t) P(r, z, t) + D(r, z, t) - 1 \}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $F$  为介质中归一化的慢变化电场振幅(简称光场),  $P$  为原子的极化量,  $D$  为原子处在上下能级的几率之差,  $\alpha$  为非饱和吸收系数,  $\gamma_1, \gamma_{11}$  分别为  $P, D$  的弛豫速率,  $c$  为光速. 并且

$$\left. \begin{aligned} A(r, z) &= \exp[-r^2/w^2(z)] / [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}, \\ w(z) &= w_0 [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}, \quad (z_0 = \pi w_0^2 / \lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中  $w_0$  是高斯光束束腰,  $z_0$  是瑞利长度,  $\lambda_0$  是光波波长. 光场满足以下边界条件:

$$F(-L/2, t) = \sqrt{T} F_I(t) + \sqrt{R} F(L/2, t - \Delta t), \quad (3a)$$

$$F_{RT}(t) = -\sqrt{R} F_I(t) + \sqrt{T} F(L/2, t - \Delta t). \quad (3b)$$

式中  $\Delta t = (\mathcal{L} - L)/c$ ,  $F_I, F_{RT}$  分别表示输入和输出光场.

在定态情况 ( $\partial F/\partial t = \partial P/\partial t = \partial D/\partial t = 0$ ) 下,由方程组(1)得到定态解为

$$P_S(r, z) = \frac{F_S(z) A(r, z)}{1 + A^2(r, z) F_S^2(z)}, \quad (4a)$$

$$D_S(r, z) = \frac{1}{1 + A^2(r, z) F_S^2(z)}, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_S(z) = -\alpha \int_0^{a_0} dr \frac{4r}{w_0^2} A(r, z) \frac{F_S(z) A(r, z)}{1 + A^2(r, z) F_S^2(z)}. \quad (4c)$$

对定态情况,边条件(3a)和(3b)分别变为

$$F_S(-L/2) = \sqrt{T} F_{IS} + \sqrt{R} F_S(L/2), \quad (5a)$$

$$F_{RTS} = -\sqrt{R} F_{IS} + \sqrt{T} F_S(L/2). \quad (5b)$$

引入

$$\eta = F_S(L/2), \quad y = F_{IS}/\sqrt{T}, \quad x = F_{RTS}/\sqrt{T}, \quad (6)$$

则(5a)和(5b)可写成

$$F_S(-L/2) = \sqrt{R} x + y, \quad (7a)$$

$$F_S(L/2) = x + \sqrt{R} y. \quad (7b)$$

取费涅尔数  $\mathcal{F}[\pi w_0^2/(\lambda_0, L)] \gg 1$ ,  $d_0 \gg w_0$ , 考虑到平均场近似

$$\alpha L \rightarrow 0, T \rightarrow 0, \frac{\partial L}{\partial T} = C \text{ (常数)}, \quad (8)$$

并利用式(7), 则仿照参考文献[1]的方式可由(4e)导出

$$y = x + \frac{4C}{x+y} \ln[1 + (x+y)^2]. \quad (9)$$

在式(8)成立的条件下, 由式(6)和(7b)可导出

$$x = \eta - y, \quad (10)$$

据此, 由式(9)可得到  $x, y$  的定态参量方程为

$$y = \frac{1}{2} \eta + \frac{2C}{\eta} \ln(1 + \eta^2), \quad (11a)$$

$$x = \frac{1}{2} \eta - \frac{2C}{\eta} \ln(1 + \eta^2). \quad (11b)$$

在平均场近似条件式(8)成立的情况下, 我们可以认为腔内各处的光场都近似为  $\eta$ , 而对于每一给定的腔内光场  $\eta$  都可确定唯一的输入  $y$  与唯一的输出  $x$ . 对应于不同  $C$  值的光场输入输出定态曲线如图 2 所示. 图 3 则给出了  $C=5$  时输入光强  $y^2$  与输出光强  $x^2$  的定态曲线, 与平面波情况类似, 曲线呈反向 S 型.

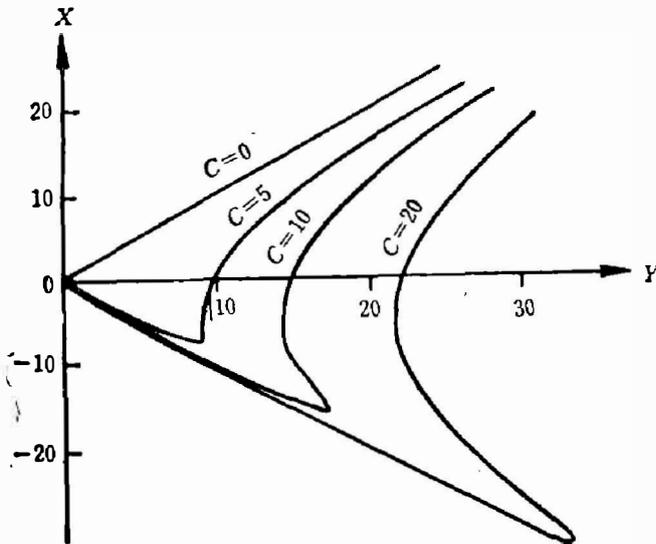


图 2 对应于不同  $C$  值的输入输出定态曲线

Fig. 2 Steady state input-output amplitude curves for different  $C$  values.

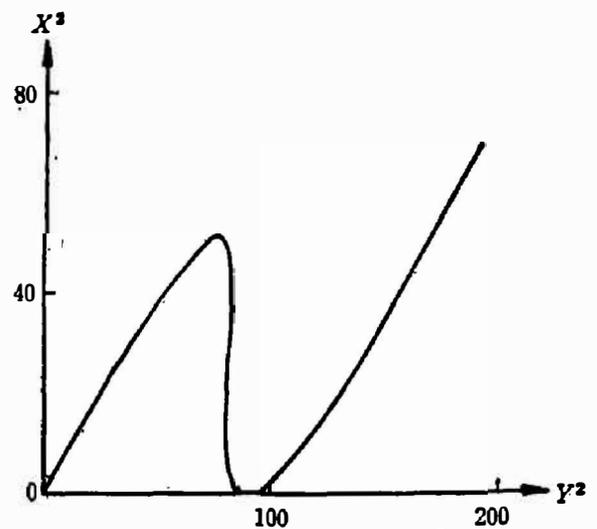


图 3 输入-输出光强定态曲线( $C=5$ )

Fig. 3 Steady state curve of output versus input light intensities for  $C=5$ .

### 3. 定态的线性稳定性分析

为了检查定态解的稳定性, 我们引入偏离量

$$\delta F(z, t) = F(z, t) - F_S(z), \quad (12a)$$

$$\delta P(r, z, t) = P(r, z, t) - P_S(r, z), \quad (12b)$$

$$\delta D(r, z, t) = D(r, z, t) - D_s(r, z). \quad (12c)$$

将式(12)代入方程组(1)并进行线性化处理, 则可得偏离量  $\delta F(z, t)$ 、 $\delta P(r, z, t)$  和  $\delta D(r, z, t)$  所满足的方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta F &= -c \frac{\partial}{\partial z} \delta F - \alpha c \int_0^{d_s} dr \frac{4r}{w_0^2} A(r, z) \delta P, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta P &= \gamma_{\perp} \{ A(r, z) [D_s \delta F + F_s \delta D] - \delta P \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta D &= -\gamma_{\parallel} \{ A(r, z) [P_s \delta F + F_s \delta P] + \delta D \}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中, 偏离量  $\delta F(z, t)$  服从边界条件

$$\delta F\left(-\frac{L}{2}, t\right) = \sqrt{R} \delta F\left(\frac{L}{2}, t\right). \quad (14)$$

为简化求解过程, 以下取  $\mathcal{L} \gg 1$ ,  $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \gamma$ . 将定态偏离量写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \delta F(z, t) &= e^{\lambda t} \delta F_{\lambda}(z) + O.O., \\ \delta P(r, z, t) &= e^{\lambda t} \delta P_{\lambda}(r, z) + O.O., \\ \delta D(r, z, t) &= e^{\lambda t} \delta D_{\lambda}(r, z) + O.O.. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将式(15)代入(13), 仿照参考文献[5], 利用定态解(4)和边界条件(14)可得  $\lambda$  满足的方程

$$\lambda = -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R} - \frac{\alpha c}{\mathcal{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a dr \left\{ \frac{4r}{w_0^2} \cdot \frac{\exp(-r^2/w_0^2)}{[1 + \exp(-2r^2/w_0^2)] F_s^2} \cdot \frac{[1 + \lambda/\gamma - \exp(-2r^2/w_0^2) F_s^2]}{[(1 + \lambda/\gamma)^2 + \exp(-2r^2/w_0^2) F_s^2]} \right\}. \quad (16)$$

其中  $\alpha_n = \frac{c}{\mathcal{L}} 2n\pi$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). 为了求出式(16)的本征值  $\lambda$  的解析形式, 我们仅考虑以下两种近似情况.

### 3.1 空腔近似

此时  $\alpha=0$ , 由式(16)得

$$\lambda_n = -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R}. \quad (17)$$

由于  $R < 1$ ,  $\ln \sqrt{R} < 0$ , 所以式(17)表明对应于不同  $n$  值的所有  $\lambda_n$  的实部都是负的, 因而空腔总是稳定的, 式(17)还表明场对定态的偏离量以指数  $\exp\left(\frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R} t\right)$  随时间而衰减, 这些结论与入射光场为平面波的情况类似.

### 3.2 “优质腔”下的平均场近似

在平均场近似条件式(8)成立时, 可取

$$\left. \begin{aligned} \ln \sqrt{R} &= \ln \sqrt{1-T} = -T/2, \\ F_s(z) &= F_s(L/2) = \eta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

再令空腔阻尼常数

$$k = cT/\mathcal{L}, \quad (19)$$

则由式(16)可得

$$\lambda_n = -i\alpha_n - k \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2C}{\eta^2} \int_0^{\eta^2} \frac{v}{\exp(-2v/w_0^2)} \cdot \frac{1 + \lambda_n/\gamma - v}{(1 + \lambda_n/\gamma)^2 + v} \right\}. \quad (20)$$

其中

$$v = \eta^2 \exp(-2r^2/w_0^2), \quad (21)$$

若我们只考虑优质腔情况, 即  $k \ll \gamma$ , 则式(20)可立即用迭代法求解, 结果为

$$\lambda_n = -i\alpha_n - k \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2C}{\eta^2} \int_{\eta^2 \exp(-2r^2/w_0^2)}^{\eta^2} \frac{dv}{1+v} \cdot \frac{1 - i\bar{\alpha}_n - v}{(1 - i\bar{\alpha}_n)^2 + v} \right\}. \quad (22)$$

其中

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_n / \gamma. \quad (23)$$

跟系统失稳与否相关的是本征值的实部 ( $\text{Re}\lambda_n$ ), 它可表示成

$$\text{Re}\lambda_n = \frac{k}{2} [-1 + G^{(n)}(\eta^2)]. \quad (24)$$

其中

$$G^{(n)}(\eta^2) = \frac{4C}{\eta^2} \int_{\eta^2 \exp(-2d_0^2/w_0^2)}^{\eta^2} dv G_{p.w.}^{(n)}(v), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} G_{p.w.}^{(n)}(v) &= \frac{1}{1+v} \text{Re} \frac{i\bar{\alpha}_n + v - 1}{(1 - i\bar{\alpha}_n)^2 + v} \\ &= \frac{1}{1+v} \cdot \frac{(v-1)(1+v-\bar{\alpha}_n^2) - 2\bar{\alpha}_n^2}{(1+v-\bar{\alpha}_n^2)^2 + 4\bar{\alpha}_n^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

当  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  的取值中至少有一个使得

$$\text{Re}\lambda_n > 0 \quad (27)$$

即

$$G^{(n)}(\eta^2) > 1 \quad (28)$$

时, 则定态是不稳定的. 所以式(28)便为失稳条件表达式. 上式左端可看作第  $n$  个腔模的“增益”, 而右边则表示已归一化的损耗; 当至少有一个腔模的增益超过损耗时, 失稳就要发生.

对于一般的  $d_0/w_0$  值来说, 式(25)的积分结果为

$$\begin{aligned} G^{(n)}(\eta^2) &= \frac{4C}{\eta^2} \left\{ \frac{1}{2} \ln[(1+\eta^2)^2 - 2\bar{\alpha}_n^2(1+\eta^2) + \bar{\alpha}_n^2(\bar{\alpha}_n^2+4)] \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln[(1+\theta)^2 - 2\bar{\alpha}_n^2\{1+\theta\} + \bar{\alpha}_n^2(\bar{\alpha}_n^2+4)] \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha_n} \arctg \left( \frac{1-\bar{\alpha}_n^2+\eta^2}{2\alpha_n} \right) + \frac{1}{\alpha_n} \arctg \left( \frac{1-\bar{\alpha}_n^2+\theta}{2\alpha_n} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

式中

$$\theta = \eta^2 \exp(-2d_0^2/w_0^2).$$

现在我们依据对式(28) (其中  $G^{(n)}(\eta^2)$  采用(29)的形式) 和(11) 进行数值计算得到的结果, 简要讨论失稳范围并与平面波光束驱动的情况加以比较.

当  $C$  和  $d_0/w_0$  的取值确定时, 满足失稳条件式(28)的  $\bar{\alpha}_n$  和  $\eta$  的取值范围即在  $\bar{\alpha}_n - \eta$  平面上的失稳区如图 4(a)~4(b) 所示.

由图 4 可以看出:  $C$  值不变时, 失稳区随  $d_0/w_0$  的值减小而减小; 当  $d_0/w_0$  值不变时, 失稳区随  $C$  值的增大而增大; 失稳区的范围及边界的形状与平面波情况<sup>[1]</sup>明显不同.

对于  $n=0$  (从而  $\bar{\alpha}_0=0$ ) 的共振模, 与图 4(a) 所示的失稳区相应的振幅定态曲线上的失稳区和输入输出光强定态曲线上的失稳区分别由图 5 和图 6 中的虚线部分表示. 很明显, 振幅定态曲线上输出与输入反向 ( $x < 0$ ) 的部分全部失稳, 而输入-输出光强定态曲线反向 S 形中间段及左侧分支全部失稳. 以上结论显然与平面波光束驱动下的结果不同, 在那种情

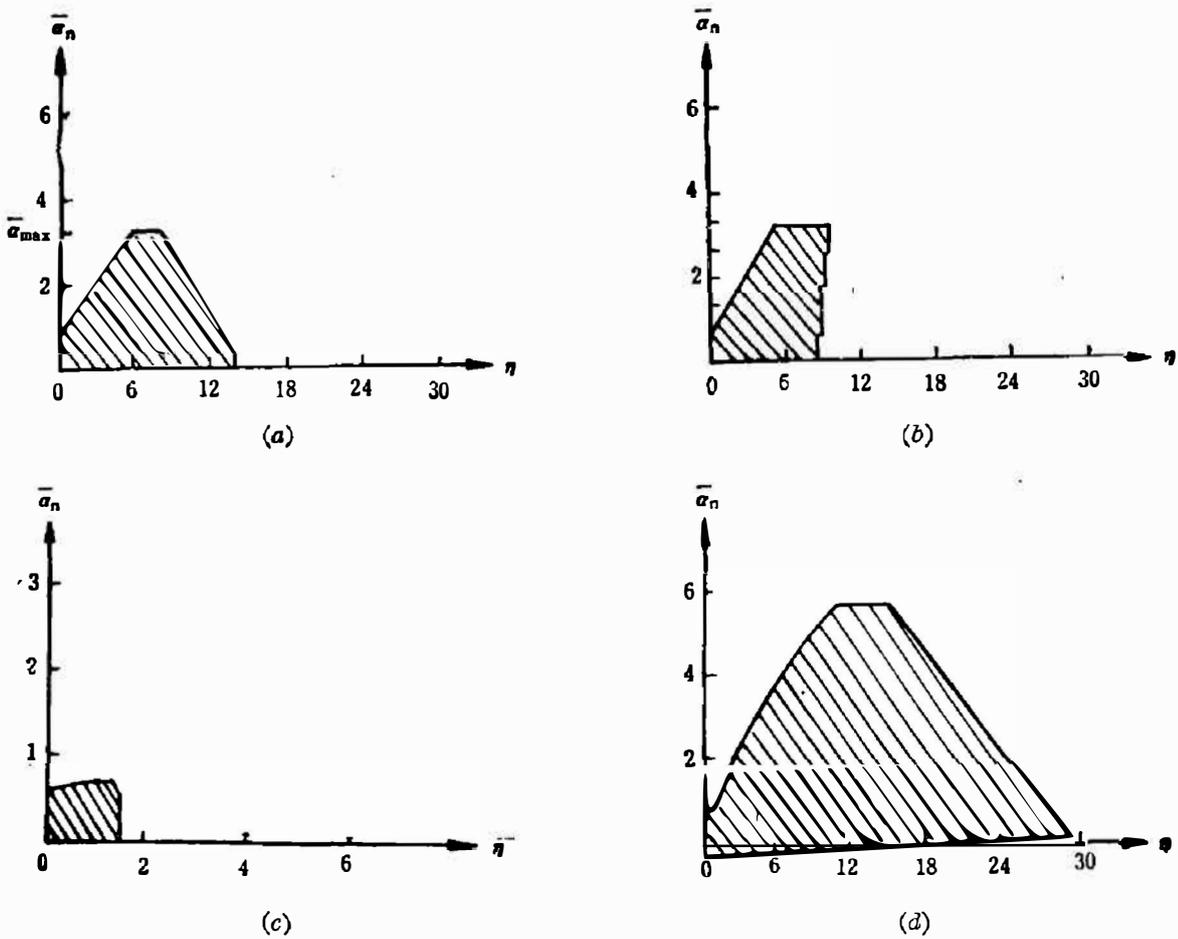


图 4 在变量  $\bar{\alpha}_n$  和  $\eta$  的平面上的失稳区

(a)  $C=10, d_0/w_0=20$ ; (b)  $C=10, d_0/w_0=1$ ; (c)  $C=10, d_0/w_0=0.2$ ; (d)  $C=30, d_0/w_0=20$

Fig. 4 The unstable part on the plane of the variables  $\bar{\alpha}_n$  and  $\eta$ .

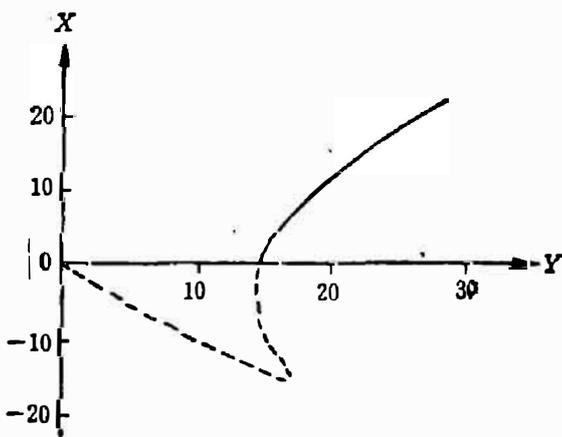


图 5 振幅定态曲线上对应的失稳区  
( $C=10, \bar{\alpha}_0=0$ )

Fig. 5 Steady state curve of output versus input amplitudes for  $C=10, \bar{\alpha}_0=0$  with stable and unstable parts denoted by solid and dashed curves respectively.

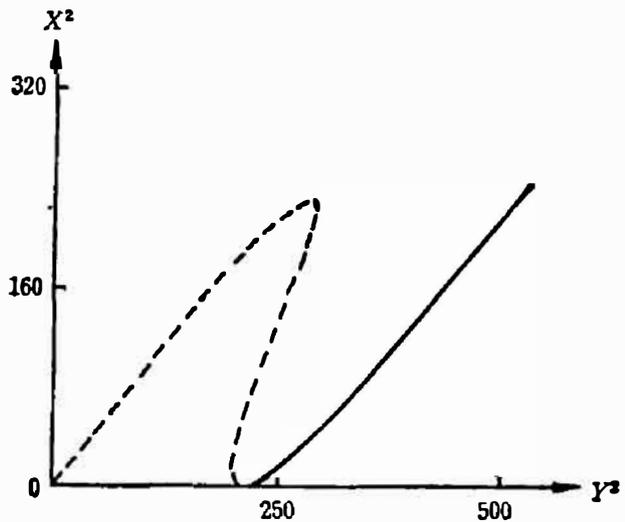


图 6 输入-输出光强定态失稳区  
( $C=10, \bar{\alpha}_0=0$ )

Fig. 6 Curve of output versus input intensities for  $C=10, \bar{\alpha}_0=0$  with stable and unstable parts denoted by solid and dashed curves respectively.

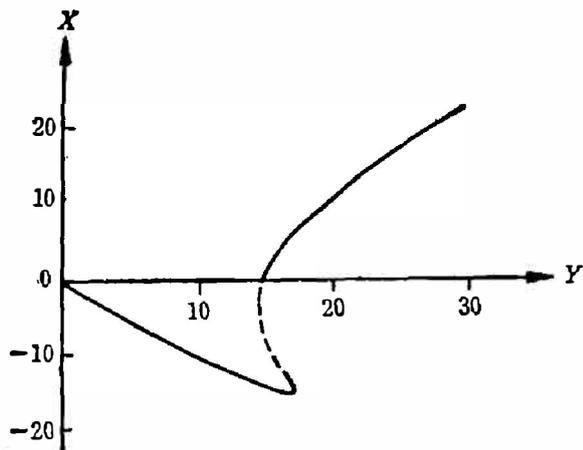


图7 振幅定态曲线上对应的失稳区  
( $C=10, \bar{\alpha}_n=2$ )

Fig. 7 Steady state curve of output versus input amplitudes for  $C=10, \bar{\alpha}_n=2$  with stable and unstable parts denoted by solid and dashed curves respectively.

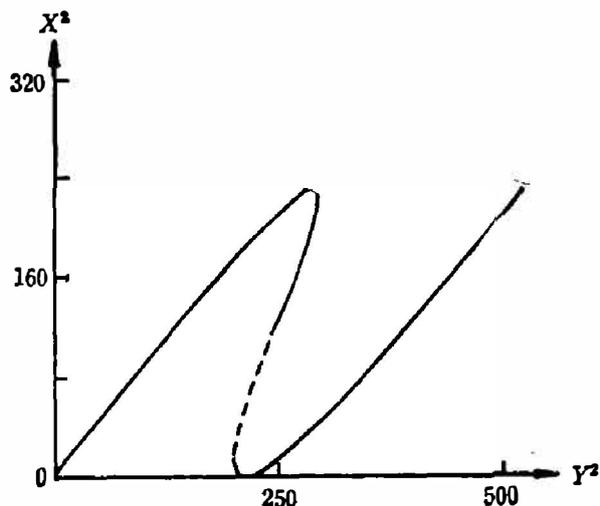


图8 输入-输出光强定态失稳区  
( $C=10, \bar{\alpha}_n=2$ )

Fig. 8 Curve of output versus input intensities for  $C=10, \bar{\alpha}_n=2$  with stable and unstable parts denoted by solid and dashed curves respectively.

况下,共振模只是使定态曲线反向S形的中间段失稳。

对于  $n \neq 0$  (从而  $\bar{\alpha}_n \neq 0$ ) 的高阶模,例如  $\bar{\alpha}_n=2$  的模,与图4(a)所示的失稳区相应的振幅定态曲线上的失稳区和输入-输出光强定态曲线上的失稳区分别由图7和图8中的虚线给出,实线则表示稳定区。由图可见,这时振幅定态曲线上中间段只有一部分是不稳定的,相应地,在输入-输出光强定态曲线上,只有反向S形中间段下半部分是失稳的,而反向S形中间段上半部分及左、右侧分支都是稳定的,这与平面波的情况亦不相同。在驱动光束为平面波时,对  $n \neq 0$  的高阶模,除反向S形曲线中间段失稳外,其右侧分支的一部分定态也出现了失稳。

在图4(a)所示的情况下,  $\bar{\alpha}_n > \bar{\alpha}_{\max}$  的高阶模的振幅定态曲线及输入-输出光强定态曲线全部都是稳定的。

#### 4. 向平面波情况的过渡

当  $d_0/w_0 \rightarrow 0$  时,我们可以立即导出平面波光束驱动的单输出环形腔光学双稳系统<sup>[1]</sup>的重要结论。

当  $\mathcal{F} \gg 1$  时,  $A(r, z) \approx \exp(-r^2/w_0^2)$ , 定态解式(4c)可写为

$$\frac{\partial}{\partial z} F_S(z) = \alpha \int_1^{\exp(-2r^2/w_0^2)} du \frac{F_S(z)}{1 + F_S^2(z)u}, \quad (30)$$

其中  $u = \exp(-2r^2/w_0^2)$  当  $d_0/w_0 \rightarrow 0$  时,对式(30)积分并作幂级数展开,取一级近似,可得

$$\frac{\partial}{\partial z} F_S(z) = -\frac{\alpha'}{1 + F_S^2(z)}, \quad (31)$$

式中

$$\alpha' = \alpha \cdot 2d_0^2/w_0^2. \quad (32)$$

将式(31)对  $z$  从  $-L/2$  到  $L/2$  积分, 则有

$$\ln \frac{F_B(-L/2)}{F_B(L/2)} + \frac{1}{2} [F_B^2(-L/2) - F_B^2(L/2)] = \alpha' L. \quad (33)$$

使用边界条件式(5)~(7)以及平均场近似条件

$$\alpha' L \rightarrow 0, T \rightarrow 0, \frac{\alpha' L}{2T} = O' \quad (\text{常数}), \quad (34)$$

则可得到定态方程

$$y = x + \frac{4O'(x+y)}{1+(x+y)^2}, \quad (35)$$

式(35)与文献[1]中的定态方程

$$y = x + \frac{4O(x+y)}{1+(x+y)^2} \quad (36)$$

在形式上是完全相同的, 其中  $O' = O \cdot 2d_0^2/w_0^2$ .

另一方面, 当  $d_0/w_0 \rightarrow 0$  时, 式(26)表示为

$$G_{p.w.}^{(n)}(\eta^2) = \frac{1}{1+\eta^2} \cdot \frac{(\eta^2-1)(1+\eta^2-\bar{\alpha}_n^2) - 2\bar{\alpha}_n^2}{(1+\eta^2-\alpha_n^2) + 4\alpha_n^2}. \quad (37)$$

将式(37)代入式(25), 再将积分结果代入式(24), 则可得到

$$\text{Re}\lambda_n = -k \left[ \frac{1}{2} + \frac{2O'}{1+\eta^2} \cdot \frac{(1-\eta^2)(1+\eta^2-\bar{\alpha}_n^2 + 2\bar{\alpha}_n^2)}{(1+\eta^2-\alpha_n^2) + 4\alpha_n^2} \right]. \quad (38)$$

而此式与文献[1]中本征值的实部表达式

$$\text{Re}\lambda_n = -k \left[ \frac{1}{2} + \frac{2O}{1+\eta^2} \cdot \frac{(1-\eta^2)(1+\eta^2-\bar{\alpha}_n^2) + 2\bar{\alpha}_n^2}{(1+\eta^2-\alpha_n^2) + 4\alpha_n^2} \right] \quad (39)$$

在形式上也是完全相同的.

我们在导出式(35)和(38)时所使用的平均场近似条件式(34)与文献[1]中所使用的平均场近似条件即本文式(8)是等效的. 因为  $d_0/w_0 \rightarrow 0$ , 所以  $\alpha L \rightarrow 0$  时, 必有  $\alpha' L = \alpha \cdot 2d_0^2/w_0^2 \rightarrow 0$ . 若我们定义

$$\frac{\alpha' L}{2T} = \frac{\alpha \cdot 2d_0^2/w_0^2 L}{2T} = O \quad (\text{常数}),$$

则可将式(35)和(38)中的  $O'$  换成  $O$ , 从而分别得到式(36)和(39), 即得到平面波光束驱动下的环形腔光学双稳系统的定态方程及本征值实部表达式.

致谢——本文承蒙宁波大学陈继述教授审阅, 谨致衷心的感谢.

### 参 考 文 献

- [1] 罗利国、陈继述, 红外研究 6 (1987), 251.
- [2] Bonifacio R. and Lugiato L. A., *Lett. Nuovo Cimento*, 21 (1978), 505.
- [3] Lugiato L. A. et al., *Phys. Rev.*, A32 (1985), 1563.
- [4] Lugiato L. A., *Z. Phys.*, B50 (1983), 171.
- [5] Bonifacio R. and Lugiato L. A., *Lett. Nuovo Cimento*, 21 (1978), 510.

## RING CAVITY OPTICAL BISTABLE SYSTEM WITH SINGLE OUTPUT DRIVEN BY A GAUSSIAN BEAM

FAN XIJUN

*(Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan, Shandong, China)*

TIAN SHUFEN

*(Institute of semiconductors, Shandong Normal University, Jinan, Shandong, China)*

### ABSTRACT

The single output ring cavity optical bistable systems driven by a Gaussian beam are studied. The steady state equation is obtained and the linearized stability is analysed under the purely absorptive and resonant conditions using mean field approximation. The results show that the steady state light intensity curves still exhibit a reverse S shape but the unstable range in the case of Gaussian beam drive is manifestly different from that of plane wave beam drive.