

入射端与透射端半透反射镜透射率 不等的环形腔双稳系统分析

罗 利 国

(山东大学光学系)

陈 继 述

(宁波大学物理系)

摘要——研究了入射端与透射端半透反射镜透射率不相同的均匀加宽双能级原子介质环形腔的双稳系统。在平均场近似下给出了定态方程,分析了定态线性稳定性。发现当入射端与透射端半透反射镜的透射率之比 T_1/T_2 改变时,双稳范围随之改变,甚至使系统的行为由双稳模式转为放大模式。本文还指出,在平均场近似下,既能有 $\bar{K} \equiv cT_1/\mathcal{L}\gamma \ll 1$ 的系统,也能有 $\bar{K} \gg 1$ 的系统,前者可以观察到自脉动行为。

一、引 言

光学双稳性已发展成光学研究中的一个重要领域。Bonifacio 和 Lugiato 等的理论模型^[1,2](包括他们常用的平均场近似)已被用于描述实验事实的基本特点,他们还预言过某些当时未知的效应^[3,4]。

对于光学双稳态的动态研究, Lugiato 等曾预言:在定态曲线的正斜率部分失稳时会出现自脉动^[5,6],但这种自脉动在实验中却很难观察到。Lugiato 等后来又指出在高斯光束直径远小于介质截面直径或者在纯色散的条件下,正斜率自脉动区域将全部变成稳定的定态^[7,8]。

我们研究了入射端与透射端半透反射镜的透射率不相等的一般环形腔双稳系统,主要分析入射与透射两反射镜的透射率之比 T_1/T_2 对双稳性质的影响。本文给出吸收兼色散的光学双稳定态方程,分析了纯吸收条件下,双稳范围随着透射率之比 T_1/T_2 变化的情况。还分析了定态线性稳定性,确定了定态的失稳范围,对实验中常常观察不到自脉动的原因,提出新的看法。

二、定态方程

设图1中长度为 L 的介质由均匀加宽的双能级原子组成, 光场与介质的相互作用用麦克斯韦-布洛赫方程来描述^[9]:

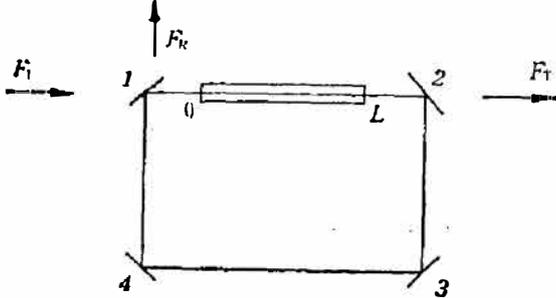


图1 一般环形腔双稳系统

Fig. 1 General ring cavity bistable system.
镜1,2的透射率分别为 T_1 和 T_2 , 镜3,4为全反射镜

频率和入射激光频率, γ_{\perp} 和 γ_{\parallel} 分别表示 P 和 D 的弛豫速率, $\Delta = (\omega_a - \omega_0)/\gamma_{\perp}$ 称为原子失调参量。光场下满足的边界条件为

$$F(0, t) = \sqrt{T_1} F_i(t) + \sqrt{R_1 R_2} e^{-i\omega_0 t} F(L, t - \Delta t). \quad (2)$$

反射与透射输出光场分别为

$$F_R(t) = -\sqrt{R_1} F_i(t) + F(L, t - \Delta t) \sqrt{R_2 T_1} e^{-i\omega_0 t}, \quad (3a)$$

$$F_T(t) = \sqrt{T_2} F(L, t). \quad (3b)$$

在式(2)、(3)中 $\Delta t = (\mathcal{L} - L)/c$, 其中 \mathcal{L} 为环形腔总长度, c 为光速, $\delta_0 = \frac{\mathcal{L}}{c} (\omega_a - \omega_0)$ 为腔失调参量, 其中 ω_c 为最靠近 ω_0 的环形腔共振频率。

令方程组(1)中 $\dot{F} = \dot{P} = \dot{D} = 0$, 得定态解

$$D_s(z) = -\frac{1 + \Delta^2}{1 + \Delta^2 + |F_s(z)|^2}, \quad (4a)$$

$$P_s(z) = -\frac{(1 - i\Delta) F_s(z)}{1 + \Delta^2 + |F_s(z)|^2}, \quad (4b)$$

$$\frac{d}{dz} F_s(z) = -\frac{\alpha(1 - i\Delta) F_s(z)}{1 + \Delta^2 + |F_s(z)|^2}, \quad (4c)$$

式(4)中 $F_s(z)$ 为复量, 可记作 $F_s(z) = \rho(z) e^{i\theta(z)}$ 。由(4c)得

$$\frac{d\rho(z)}{dz} = -\frac{\alpha\rho(z)}{1 + \Delta^2 + \rho^2(z)}, \quad (5a)$$

$$\frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{\alpha\Delta}{1 + \Delta^2 + \rho^2(z)}. \quad (5b)$$

由式(5)得

$$\frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho(z)}{dz} = -\frac{1}{\Delta} \frac{d\theta(z)}{dz}, \quad (6)$$

对式(6)积分, 得

$$\ln \left[\frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right] = -\frac{1}{\Delta} [\theta(z) - \theta(0)]. \quad (7)$$

再对式(5a)积分,得另一超越方程

$$(1+\Delta^2)\ln\left[\frac{\rho(z)}{\rho(0)}\right]+\frac{1}{2}[\rho^2(z)-\rho^2(0)]=-az. \quad (8)$$

根据式(2),定态的边界条件可以写成复数方程

$$\rho(0)e^{i\theta(0)}=\sqrt{T_1}F_{1s}+\sqrt{R_1R_2}\rho(L)e^{i\theta(L)}e^{-i\delta_0}. \quad (9)$$

将式(7)、(8)中的 z 换成 L ,与式(9)联立,注意到 $R_1=1-T_1$, $R_2=1-T_2$,原则上便可以对任意 αL 、 T_1 、 T_2 和 F_{1s} 求解 $\rho(L)$ 、 $\rho(0)$ 、 $\theta(L)$ 、 $\theta(0)$ 4 个实数量。但实际上由于遇到超越方程很难得到解析解,为此引入平均场近似,即取

$$\alpha L \rightarrow 0; T_1, T_2 \rightarrow 0; \delta_0 \rightarrow 0;$$

$$C \equiv \frac{\alpha L}{2T_1} = \text{常数}, \theta \equiv \frac{\delta_0}{T_1} = \text{常数}. \quad (10)$$

以下记 $N \equiv T_1/T_2$,并用下式表示定态输入与定态输出光场:

$$y \equiv \frac{F_{1s}}{\sqrt{T_1}}, x_T \equiv \frac{F_{Ts}}{\sqrt{T_1}} = \frac{F_s(L)}{\sqrt{N}}, x_R \equiv \frac{F_{Rs}}{\sqrt{T_1}}. \quad (11)$$

在条件(10)下对式(4c)积分,近似到一级小量,得

$$F_s(0) - F_s(L) = \frac{\alpha L(1-i\Delta)F_s(L)}{1+\Delta^2+|F_s(L)|^2}. \quad (12)$$

利用式(11),在条件(10)下边界条件(2)变成

$$F_s(0) = yT_1 + \left[1 - \frac{1}{2}(T_1+T_2) - i\delta_0\right]F(L). \quad (13)$$

由式(12)和式(13)可推导出输入光场与透射光场的定态模振幅 y 与 $|x_T|$ 的关系式

$$y = \sqrt{N}|x_T| \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \right) + \frac{2C}{1+\Delta^2+N|x_T|^2} \right]^2 + \left[\theta - \frac{2C\Delta}{1+\Delta^2+N|x_T|^2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

特别是在纯吸收和腔共振(即 $\Delta=\theta=0$)的简单情况下,式(14)中 x_T 以及反射光场 x_R 均为实数,式(14)可变成更简洁的形式:

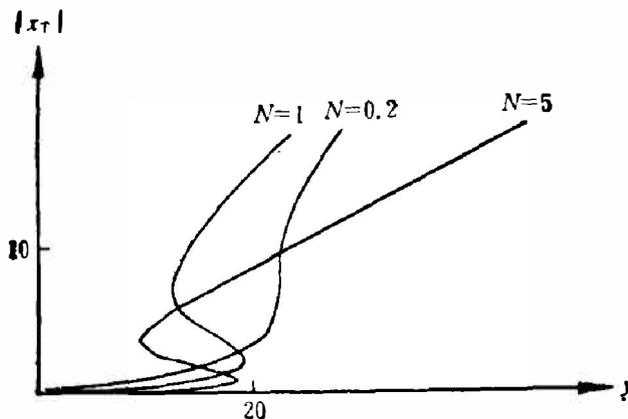


图2 透射输出输入定态关系曲线
($C=20, \Delta=2, \theta=1$)

Fig. 2 Transmission steady state curves of output versus input amplitudes for $C=20, \Delta=2, \theta=1$.

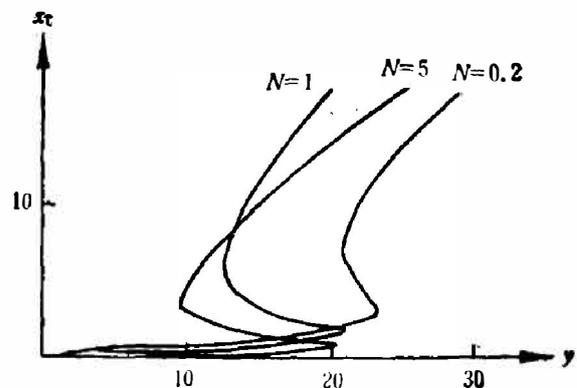


图3 透射输出输入定态关系曲线
($C=20, \Delta=\theta=0$)

Fig. 3 Transmission steady state curves of output versus input amplitudes for $C=20, \Delta=\theta=0$.

$$y = x_T \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \right) \sqrt{N} + \frac{2C\sqrt{N}}{1 + Nx_T^2} \right]. \quad (15)$$

图2为 $C=20$ 且 Δ, θ 非零的情况下不同 N 值对应的透射定态曲线。图3为 $C=20$ 和纯吸收腔共振 ($\Delta=\theta=0$) 情况下不同 N 值对应的透射定态曲线。由图2、3可以看出, 改变入射透射两端半透镜的透射率之比 N , 可以使双稳区域的位置和大小发生明显的变化。减小 N 使双稳范围缩小, 甚至使透射定态曲线变成完全无双稳区的光放大曲线。这表明仅仅调节 N 值便能使双稳器件在双稳区域或放大区域工作。

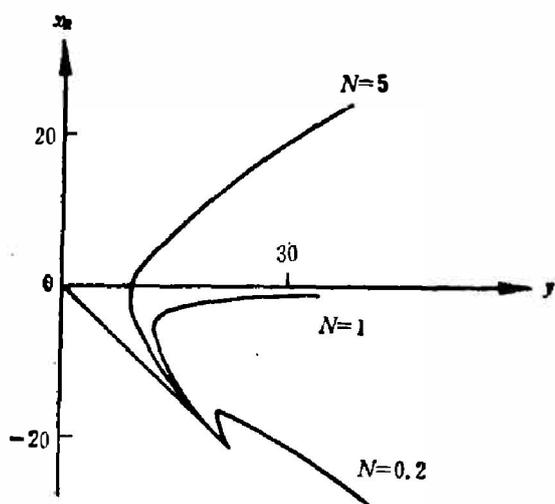


图4 反射输入输出定态关系曲线
($C=20, \Delta=\theta=0$)

Fig. 4 Reflection steady state curves of input versus output amplitudes for $C=20, \Delta=\theta=0$.

对于反射输出 x_R , 在纯吸收情况下由式(3a)和(11)得

$$x_R = -y + \sqrt{N} x_T. \quad (16)$$

由式(15)和(16)消去 x_T , 得反射输出 x_R 与输入 y 的定态关系式

$$y = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \right) (x_R + y) + \frac{2C(x_R + y)}{1 + (x_R + y)^2}. \quad (17)$$

图4为不同 N 值的反射定态曲线。式(15)和(17)为纯吸收情况下任意 N 值的定态输入输出关系式, 取 $N=1$ 时即得熟知的 $T_1=T_2$ 的双稳系统定态方程:

$$y = x_T + \frac{2Cx_T}{1 + x_T^2}, \quad (18a)$$

$$x_R = -\frac{2C(x_R + y)}{1 + (x_R + y)^2}. \quad (18b)$$

若取 $N \rightarrow \infty$, 则得到我们称之为单输出双稳系统的定态关系^[10]

$$y = \frac{1}{2} (x_R + y) + \frac{2C(x_R + y)}{1 + (x_R + y)^2}. \quad (19)$$

三、定态讨论

我们用式(15)求 $\Delta=\theta=0$ 时的双稳临界 C 值。对式(15)求导, 并令

$$\frac{dy}{dx_T} = 0, \quad (20)$$

可得

$$N^2 x_T^4 + 2N x_T^2 - \frac{4CN}{1 + \frac{1}{N}} x_T^2 + 1 + \frac{4C}{1 + \frac{1}{N}} = 0. \quad (21)$$

由于在 $C=C_{\text{crit}}$ 时满足式(20)的 x_T^2 值只有一个, 故有

$$\left[2N - \frac{4NC_{\text{crit}}}{1 + \frac{1}{N}} \right]^2 - 4 \left[1 + \frac{4C_{\text{crit}}}{1 + \frac{1}{N}} \right] N^2 = 0. \quad (22)$$

由式(22)得双稳临界 C 值为

$$C_{\text{crit}} = 2\left(1 + \frac{1}{N}\right). \quad (23)$$

产生光放大作用的临界 C 值 C_{amp} 亦可由式(15)求得。对式(15)求导, 并令 $\frac{dy}{dx_T} = 1$ 可得

$$\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\sqrt{N} - 1\right]N^2\omega_T^4 + 2N\omega_T^2\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\sqrt{N} - 1 - C\sqrt{N}\right] + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\sqrt{N} - 1 + 2C\sqrt{N} = 0, \quad (24)$$

在 $C = C_{\text{amp}}$ 时满足式(24)的 ω_T^2 值仅有一个, 由此得到产生光放大作用的临界 C 值

$$C_{\text{amp}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2. \quad (25)$$

由式(23)和(25)可见, 临界值 C_{crit} 和 C_{amp} 都直接受到 N 值的影响。图5为 C_{crit} 、 C_{amp} 随 N 的变化关系, 取 $N=1$ 时, 便得到熟知的双稳临界 C 值 $C_{\text{crit}} = 4$ ^[2]。此时 $C_{\text{amp}} = 0$, 即除双稳区域外, 其他均为放大区。当 $N \rightarrow \infty$ 时, 得到最小的双稳临界 C 值 $C_{\text{crit}} = 2$, 就是我们在参考文献[10]中分析过的单输出双稳系统的临界双稳 C 值。

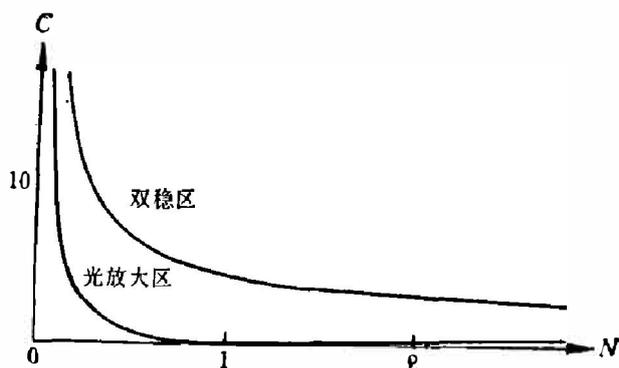


图5 $C-N$ 平面上的三种区域($\Delta = \theta = 0$)

Fig. 5 Three different regions on the $C-N$ plane for $\Delta = \theta = 0$.

下面我们研究 $\Delta \approx \theta = 0$ 时 N 值与输入输出定态曲线的关系。将式(23)与(25)改写为

$$N_{\text{crit}} = \frac{2}{C-2}, \quad (26)$$

$$N_{\text{amp}} = \begin{cases} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{C}{2}}\right)^2} & (C \text{ 为任意值}), \\ \frac{1}{\left(1 - \sqrt{\frac{C}{2}}\right)^2} & (C < 2). \end{cases} \quad (27)$$

对于一定 C 值的系统, 只有当 $N > N_{\text{crit}}$ 时定态曲线才有双稳区。若 $N_{\text{amp}} < N < N_{\text{crit}}$, 定态曲线便只有放大区。如果 $N < N_{\text{amp}}$, 则定态曲线既无双稳区也无放大区, 在 $T_1 = T_2$ 的系统中不存在这一区域。图5示出在 $N-C$ 平面上的这3个区域。

双稳范围与 N 值的定量关系可由式(21)求出, 把式(21)改写为

$$\omega_T^4 + 2\omega_T^2\left[\frac{1}{N}\left(1 - \frac{2C}{1 + \frac{1}{N}}\right)\right] + \left(1 + \frac{4C}{1 + \frac{1}{N}}\right)\frac{1}{N^2} - (\omega_{T_1}^2 - \omega_{T_2}^2)(\omega_T^2 - \omega_{T_1}^2) = 0, \quad (28)$$

其中 $\omega_{T_1}^2$ 与 $\omega_{T_2}^2$ 为式(28)的两个根, 亦即式(21)的两个根。各为

$$\omega_{T_1}^2 = -\frac{1}{N}\left(1 - \frac{2C}{1 + \frac{1}{N}}\right) + \frac{2}{1 + N}\sqrt{C^2 - 2C\left(1 + \frac{1}{N}\right)}, \quad (29a)$$

$$x_{T_1}^2 = -\frac{1}{N} \left(1 - \frac{2C}{1 + \frac{1}{N}} \right) - \frac{2}{1+N} \sqrt{C^2 - 2C \left(1 + \frac{1}{N} \right)}. \quad (29b)$$

于是双稳定态曲线高透射与低透射两分支的最小光强差(或称为双稳对比度)应等于

$$\Delta x_T^2 = x_{T_1}^2 - x_{T_2}^2 = \frac{4}{1+N} \sqrt{C^2 - 2C \left(1 + \frac{1}{N} \right)}, \quad (30)$$

由式(30)可以看出 Δx_T^2 随着 N 的变化趋势是: 当 $N < N_0$ 时, 增大 N , 使 Δx_T^2 变大; 当 $N = N_0$ 时, Δx_T^2 达到极大值; 当 $N > N_0$ 时, N 增大反而使 Δx_T^2 变小, 这里

$$N_0 = (3 + \sqrt{4C+1}) / (2C-4).$$

用式(15)可求得 $x_{T_1}^2$ 、 $x_{T_2}^2$ 对应的双稳区域两端的输入光强值分别为

$$y_1^2 = N x_{T_1}^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \right) + \frac{2C}{1 + N x_{T_1}^2} \right]^2, \quad (31a)$$

$$y_2^2 = N x_{T_2}^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \right) + \frac{2C}{1 + N x_{T_2}^2} \right]^2. \quad (31b)$$

于是输入光强的双稳区宽度为

$$\begin{aligned} \Delta y^2 &= y_2^2 - y_1^2 \\ &= N \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \right) (x_{T_1} + x_{T_2}) + 2C \left(\frac{x_{T_1}}{1 + N x_{T_1}^2} + \frac{x_{T_2}}{1 + N x_{T_2}^2} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N} \right) (x_{T_1} - x_{T_2}) + 2C \left(\frac{x_{T_1}}{1 + N x_{T_1}^2} - \frac{x_{T_2}}{1 + N x_{T_2}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

图6给出了双稳对比度 Δx_T^2 随 N 的变化关系。图7给出了双稳区宽度 Δy^2 随 N 的变化情况, 可以看出 Δy^2 随 N 单调变化, 增大 N 值相当于增大反馈, 使双稳区域扩大, 但 N 值增大到一定时, Δy^2 的增长逐渐饱和。

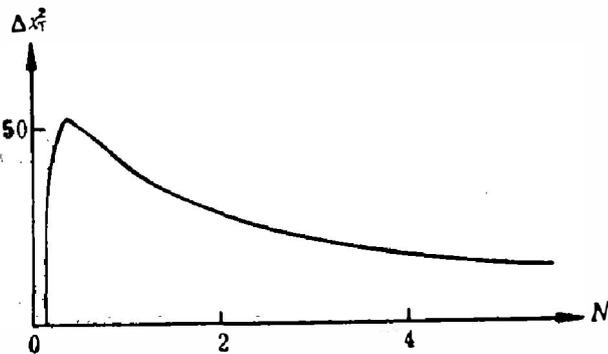


图6 输出光强双稳对比度 Δx_T^2 随 N 值的变化 ($C=22$)

Fig. 6 Variation of Δx_T^2 vs N for $C=22$.

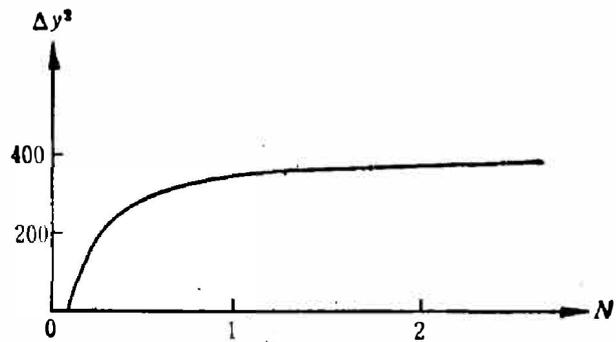


图7 输出光强双稳区宽度 Δy^2 随 N 值的变化 ($C=22$)

Fig. 7 Variation of Δy^2 vs N for $C=22$.

也可用经典理论研究 N 值与双稳区的关系, 但经典理论不如我们的方法全面、透彻, 而且也不比我们的方法简单。

四、定态稳定性分析

取

$$\begin{cases} F(z, t) = F_s(z) + \delta F(z, t), \\ P(z, t) = P_s(z) + \delta P(z, t), \\ D(z, t) = D_s(z) + \delta D(z, t). \end{cases} \quad (33)$$

然后代入 $M-B$ 方程(1) (令其中 $\Delta=0$), 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \delta F(z, t) = \alpha \delta P(z, t), \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta P(z, t) = & \gamma_{\perp} [D_s(z) \delta F(z, t) + F_s(z) \delta D(z, t) - \delta P(z, t)] + \\ & + \gamma_{\perp} \delta F(z, t) \delta D(z, t), \end{aligned} \quad (34b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta D(z, t) = & -\gamma_{\parallel} [F_s(z) \delta P(z, t) + P_s(z) \delta F(z, t) + \delta D(z, t)] - \\ & - \gamma_{\parallel} \delta F(z, t) \delta P(z, t). \end{aligned} \quad (34c)$$

令 $\delta_0=0$ 边界条件式(2)变为

$$\delta F(0, t) = \sqrt{R_1 R_2} \delta F(L, t - \Delta t). \quad (35)$$

为简单起见, 我们只分析 $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \gamma$ 的情况, 此分析不难推广到 $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel}$ 的系统。

方程组(34)去掉非线性项后, 有下列解

$$\delta F(z, t) = e^{\lambda t} \delta F_{\lambda}(z) + \text{c.c.}, \quad (36a)$$

$$\delta P(z, t) = e^{\lambda t} \delta P_{\lambda}(z) + \text{c.c.}, \quad (36b)$$

$$\delta D(z, t) = e^{\lambda t} \delta D_{\lambda}(z) + \text{c.c.} \quad (36c)$$

将式(36)代入线性化后的式(34), 然后与式(35)联立, 得到 λ 的超越方程

$$\begin{aligned} \lambda = & -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R_1 R_2} \\ & + \frac{c\alpha}{\mathcal{L}} \int_0^L dz \frac{\gamma[\gamma F_s^2(z) - (\lambda + \gamma)]}{[(\lambda + \gamma)^2 + \gamma^2 F_s^2(z)][1 + F_s^2(z)]}, \end{aligned} \quad (37)$$

式中 $\alpha_n = 2\pi n c / \mathcal{L}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

式(37)并没有引入平均场近似, 由式(37)求解 λ 计算过于复杂。本文只限于在两种近似下求解式(37), 并由此进行定态的稳定性分析。对于空腔近似($\alpha=0$), 由式(37)得

$$\lambda_n = -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R_1} + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R_2}, \quad (38)$$

式(38)表明, 空腔中对应不同 n 值的所有 λ_n 的实部都是负值, 因而空腔必定是稳定的。由式(38)还可看出, 光场对定态的偏离量在空腔内的指数衰减系数为

$$\left| \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R_1} + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R_2} \right|,$$

是两个半透反射镜的损耗之和。

对于平均场近似可设 $F_s(z) = F_s(L) = \sqrt{N} x_T$, 对式(37)的积分结果为

$$\begin{aligned} & (\tilde{\lambda} + i\tilde{\alpha}_n) [(\tilde{\lambda} + 1)^2 + N x_T^2] \\ & = -\tilde{K} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N}\right) [(\tilde{\lambda} + 1)^2 + N x_T^2] + 2c \cdot \frac{(\tilde{\lambda} + 1) - N x_T^2}{1 + N x_T^2} \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

式中 $\tilde{\lambda} \equiv \lambda/\gamma$, $\tilde{\alpha}_n \equiv \alpha_n/\gamma$, $\tilde{K} = K/\gamma = cT_1/\mathcal{L}\gamma$ 。

以前一些文献(如参考文献[4]、[8])都将 \bar{K} 简单地看做是无穷小量,其实由于 c/\mathcal{L} 一般小于 10^9s^{-1} 数量级,而只要 T_1 小到 $10^{-1}\sim 10^{-2}$ 数量级,真实定态曲线就能符合平均场近似定态曲线,故平均场近似下 \bar{K} 仍能达到 10^7 数量级以上,而 γ 则可达 10^6Hz 数量级,并能在较大幅度内变化。因此,平均场近似下存在着 $\bar{K}\gg 1$ 和 $\bar{K}\ll 1$ 两种系统,下面分别讨论这两种极端情况。

1) $\bar{K}\ll 1$, 此时可用逐级近似法解方程(39), 即设解为 $\tilde{\lambda}_{nj} = \tilde{\lambda}_{nj}^{(0)} + \bar{K}\lambda_{nj}^{(1)}$, 容易求得近似到 \bar{K} 的线性项的一组解($j=1$)为

$$\begin{cases} \lambda_{n1}^{(0)} = -i\tilde{\alpha}_n, \\ \lambda_{n1}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right) + \frac{2c(Nx_T^2 - 1 + i\tilde{\alpha}_n)}{(1 + Nx_T^2)[(1 - i\tilde{\alpha}_n)^2 + Nx_T^2]} \end{cases} \quad (40)$$

其他两组解($j=2, 3$)的 $[\bar{K}]^0$ 项实部都为 $-\gamma$, 不产生失稳, 故可略去。式(40)中, 因为 $R_e(\lambda_{n1}^{(0)}) = 0$, 故只须考虑 $R_e(\lambda_{n1}^{(1)})$ 的正负号即可确定失稳区域。计算得到

$$\text{Re}(\lambda_{n1}^{(1)}) = -\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right) + \frac{2C}{1 + Nx_T^2} \cdot \frac{(1 - Nx_T^2)(1 + Nx_T^2 - \tilde{\alpha}_n^2) + 2\tilde{\alpha}_n^2}{(1 + Nx_T^2 - \tilde{\alpha}_n^2)^2 + 4\tilde{\alpha}_n^2}\right] \quad (41)$$

对于 $n=0$ 的共振模, 由条件 $\text{Re}(\lambda_{01}^{(1)}) > 0$ 可得到透射定态输出 x_T 的不稳定范围为 $x_{T_1} < x_T < x_{T_2}$ 。其中

$$x_{T_1}^2 = \frac{1}{1 + N} \left[2C - \left(1 + \frac{1}{N}\right) + 2\sqrt{C^2 - 2C\left(1 + \frac{1}{N}\right)} \right], \quad (42a)$$

$$x_{T_2}^2 = \frac{1}{1 + N} \left[2C - \left(1 + \frac{1}{N}\right) - 2\sqrt{C^2 - 2C\left(1 + \frac{1}{N}\right)} \right] \quad (42b)$$

注意到式(42)与式(29)完全相同, 故知其共振模使透射定态曲线的负斜率部分失去稳定性。对于 $n \neq 0$ 的高阶模, 同样可从条件 $\text{Re}(\lambda_{n1}^{(1)}) > 0$, 由式(41)得到 n 模的 $\tilde{\alpha}_n$ 值的失稳范围为 $\tilde{\alpha}_{\min} < \tilde{\alpha}_n < \tilde{\alpha}_{\max}$, 这里

$$\tilde{\alpha}_{\min}^2 = \left(Nx_T^2 - 1 - \frac{2C}{1 + \frac{1}{N}} \right) - 2\sqrt{\frac{C^2}{\left(1 + \frac{1}{N}\right)^2} - Nx_T^2}, \quad (43a)$$

$$\tilde{\alpha}_{\max}^2 = \left(Nx_T^2 - 1 - \frac{2C}{1 + \frac{1}{N}} \right) + 2\sqrt{\frac{C^2}{\left(1 + \frac{1}{N}\right)^2} - Nx_T^2} \quad (43b)$$

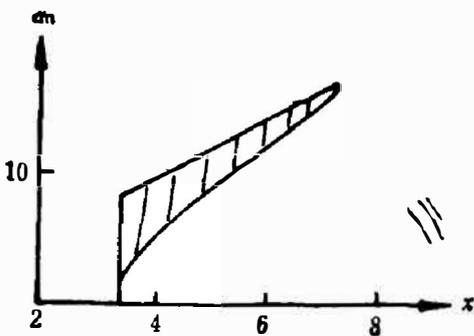


图8 高透射率分支失稳区
($C=20, N=5$)

Fig. 8 Instability region of high transmission branch of the steady state curve for $C=20, N=5$.

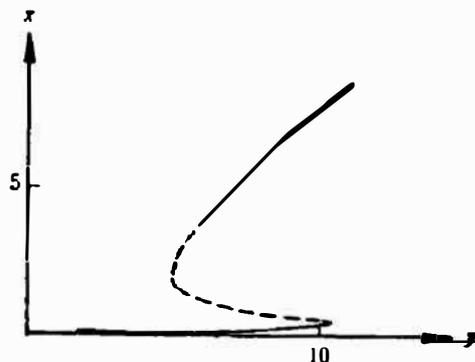


图9 双稳曲线上的稳定区(实线)与不稳定区(点线)($C=20, N=5$)

Fig. 9 Stable states(solid line)and unstable states(dotted line) on the bistable curve.

这类高阶模失稳可导致双稳定态曲线的高透射率分支的一部分失去稳定性。图 8 为高阶模使高透射分支失稳的范围。图 9 为双稳定态曲线上对应的全部失稳区域。在以上的分析中如取 $N=1$, 便得到参考文献 [4]、[6] 中的失稳情形, 失稳后的行为为自脉动。

2) $\bar{K} \gg 1$, 此时可取式(39)右边大括号为零, 这相当于近似到 $(1/\bar{K})^0$ 级项。于是有

$$\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda} \left[\frac{4C}{(1+Nx_T^2) \left(1 + \frac{1}{N}\right)} + 2 \right] + (1+Nx_T^2) + \frac{4C(1-Nx_T^2)}{(1+Nx_T^2) \left(1 + \frac{1}{N}\right)} = 0. \quad (44)$$

式(44)为实变量 $\tilde{\lambda}$ 的一元二次方程, 其中一个根大于零(使定态失稳)的充要条件为

$$(1+Nx_T^2) + \frac{4C(1-Nx_T^2)}{(1+Nx_T^2) \left(1 + \frac{1}{N}\right)} < 0. \quad (45)$$

由式(45)可求得处于 $x_{T_1} < x_T < x_{T_2}$ 范围中的定态 x_T 是不稳定的, 其中

$$x_{T_1}^2 = \frac{1}{1+N} \left[2C - \left(1 + \frac{1}{N}\right) + 2\sqrt{C^2 - 2C\left(1 + \frac{1}{N}\right)} \right], \quad (46a)$$

$$x_{T_2}^2 = \frac{1}{1+N} \left[2C - \left(1 + \frac{1}{N}\right) - 2\sqrt{C^2 - 2C\left(1 + \frac{1}{N}\right)} \right]. \quad (46b)$$

对比可知式(46)、(42)与(29)完全相同。所以, 在 $\bar{K} \gg 1$ 情况下, 只有定态曲线的负斜率部分失去稳定性。因此, 对于 $T_1 \approx 10^{-1} \sim 10^{-2}$ 能够满足平均场条件的双稳系统, 有一部分属于 $\bar{K} \ll 1$ 的情况, 但也有相当一部分(甚至可能是大部分)属于 $\bar{K} \gg 1$ 的情况。实验观察后一类双稳系统的定态性质时, 发现它们能够较好地用平均场近似理论来描述, 但却观察不到自脉动现象。

五、结 论

对于本文分析的双稳系统模型, 我们通过改变入射与透射两端半透反射镜的透射率比 N 可改变双稳态的多种性质, 包括双稳区与放大区的出现, 双稳回线圈的高度和宽度、临界双稳合作参数 C_{crit} 和临界放大合作参数 C_{amp} 的值等。尤其是在 N 值较小时, 调节 N 值对定态性质影响较大。

我们还论证了在 $T_1 < 10^{-1}$ 时可采用平均场近似, 此时一部分系统的 $\bar{K} \gg 1$, 而有些系统的 $\bar{K} \ll 1$ 。通过线性稳定性分析, 我们发现 $\bar{K} \ll 1$ 系统的失稳定态范围包含定态曲线的负斜率区和高透射分支中的一段, 对这类系统可以观察到自脉动行为。但 $\bar{K} \gg 1$ 的系统, 其失稳定态范围只限于定态曲线的负斜率区, 这类系统的定态行为虽然可用平均场近似理论讨论, 但却不能产生自脉动现象。

参 考 文 献

- [1] Bonifacio R., Lugiato L. A., *Opt. Commun.*, **19**(1976)172.
- [2] Bonifacio R., Lugiato L. A., *Lett. Nuovo Cim.*, **21**(1978), 505, 510, 517.
- [3] Bonifacio R., Lugiato L. A., *Phys. Rev.*, **A 18**(1978), 1129.
- [4] Narducci L. M. et al., *物理学进展* **3**(1983), 1.
- [5] Bonifacio R. et al., *Opt. Commun.*, **30**(1979), 129.
- [6] Benza V., Lugiato L. A., *Z. Phys.*, **B35**(1979), 383.
- [7] Lugiato L. A., Milani M., *Z. Phys.* **B50**(1983), 171.

- [8] Lugiato L. A., *Opt. Commun.*, **33**(1980), 108.
[9] Lugiato L. A., Narducci L. M., *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 1576, 1563.
[10] 罗利国, 陈继述, *红外研究*, **6A**(1987), 4; 251,

ANALYSIS OF RING CAVITY OPTICALLY BISTABLE SYSTEMS WITH TWO PARTIALLY REFLECTING MIRRORS OF UNEQUAL TRANSMISSIVITY

LUO LIGUO

(*Department of Optics, Shandong University*)

CHEN JISHU

(*Department of Physics, Ningbo University*)

ABSTRACT

The general ring cavity optically bistable systems with two partially reflecting mirrors of unequal transmissivity are analysed. In the mean field approximation, the steady state equation is given, and the linear stability analysis of the steady states is performed. It is found that when the ratio of transmissivity T_1/T_2 varies, the bistable loop changes its size and even the systematic behavior varies from the bi-stability mode into the amplification mode.

It is pointed out that in the mean field approximation there are many systems with $\bar{K} \equiv CT_1/\mathcal{L}\nu \gg 1$ and also many systems with $\bar{K} \ll 1$. The self-pulsing instability is observed in the latter systems.