

PTR 技术中振幅和相位公式的推导及验证

管国兴 郑小明 李佩赞

(苏州大学物理系)

摘要——由一维热传导方程出发求出样品表面温度改变量 δT 的表达式, 导出 PTR 信号的振幅和相位公式, 并通过实验验证了公式的正确性。

一、引 言

光热辐射测量(PTR)技术, 是近年来十分引人注目的新技术, 作为测量光学和热物理学参量的方法, 或作为检测和分析手段, 国外在六、七十年代已有报道^[1,3]。随着各种激光光源和致冷红外探测器的应用, 八十年代后, PTR 技术在表面科学、层状复合材料检测、光热光谱分析和特殊环境下的非接触测量^[1,2,3,4]等许多方面得到了重要的应用。

运用 PTR 技术进行分析或检测时, 总是通过测量光热信号的振幅或相位来获取信息。由于光热信号的振幅受样品表面的光学反射特性和吸收特性影响, 而相位则与表面状态无关, 所以测量相位法比测量振幅法更可靠^[2]。而以往文献中均未导出 PTR 的振幅和相位解析式, 参考文献[2]对相位的论述仅限于实验方面, 参考文献[5]只给出了几种特殊情况下的相位值, 未揭示其物理意义。

PTR 的原理是: 一束调制光照射到样品上导致样品表面温度上升 δT , 根据斯忒藩-玻耳兹曼定律 $w = \varepsilon \sigma T^4$, 样品热辐射的增量为 $\delta w = 4\varepsilon \sigma T_0^3 \delta T$ ($\sigma = 5.67 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, ε 为样品发射率, $T_0 = T + \delta T$, T 是环境温度), 在 $\delta T \ll T$ 的情况下, $T_0 \doteq T$, PTR 探测的信号就是样品热辐射的改变量 δw 。

表面温度的改变量 δT 不仅与样品的光学吸收系数和热物理参量有关, 而且与光辐射调制频率有关。本文先求出 δT 的表达式, 从而推导出光热信号的振幅与相位公式, 最后通过实验证明振幅和相位公式的正确性。

二、理 论 推 导

参见图 1, 仅考虑一维热传导情形^[4]。推导过程中记 k_i 为热导率, ρ_i 为密度, C_i 为比热, $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i C_i}$ 为热扩散常数, $\mu_i = \left(\frac{2\alpha_i}{\omega}\right)^{1/2}$ 为热扩散长度, ω 为调制光圆频率, $i = s, g$ 分别代表

样品和样品周围的空气。

设调制光强度 $I = I_0(1 + \cos \omega t)/2$, I_0 是未调制的入射光强, 样品对环境温度 T 的温度变化记为 $\phi(x, t)$, 为便于计算, ϕ 用复数表示。于是得到一维热扩散方程

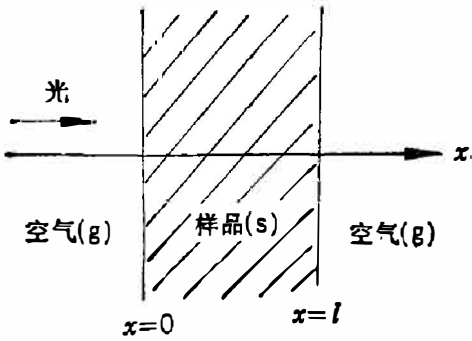


图1 一维结构原理图

Fig. 1 Schematic diagram of the one-dimensional configuration.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_g^- = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g^-, & x < 0 & (1a) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_g^+ = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g^+, & x > l & (1b) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_s = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial t} \phi_s - \frac{Q_s(x, t)}{k_s}, & 0 < x < l & (1c) \end{cases}$$

式中 $Q_s(x, t) = \beta(1 - \beta')I_0 e^{-\beta x} e^{j\omega t}$ 是在 x 处的吸收能量密度, 其中 β' 是样品表面光学吸收系数, β 是样品体光学吸收系数, 计算中略去直流分量。

假定样品边界处温度连续(不考虑存在热阻的情况), 得到两个边界条件

$$\begin{cases} \phi_s(0, t) = \phi_g^-(0, t), \\ \phi_s(l, t) = \phi_g^+(l, t). \end{cases} \quad (2a)$$

在样品边界处, 根据能流守恒, 得到另外两个边界条件(其中 h 是自然对流系数)

$$\begin{cases} k_s \frac{\partial \phi_s}{\partial x}(0, t) = k_g \frac{\partial \phi_g^-}{\partial x}(0, t) - \beta' I_0 e^{j\omega t} + (4\epsilon\sigma T_0^3 + h)\phi_s(0, t), & (2b) \\ k_s \frac{\partial \phi_s}{\partial x}(l, t) = k_g \frac{\partial \phi_g^+}{\partial x}(l, t) + \beta'(1 - \beta')I_0 e^{-\beta l} e^{j\omega t} - (4\epsilon\sigma T_0^3 + h)\phi_s(l, t). & (2c) \end{cases}$$

设方程的试解为

$$\begin{cases} \phi_s(x, t) = (Ue^{\sigma_s x} + Ve^{-\sigma_s x} - Ee^{-\beta x})e^{j\omega t}, & 0 < x < l & (3a) \\ \phi_g^+(x, t) = \theta_1 e^{-\sigma_g x} e^{j\omega t}, & x > l & (3b) \\ \phi_g^-(x, t) = \theta_2 e^{\sigma_g x} e^{j\omega t}, & x < 0 & (3c) \end{cases}$$

式中 $\sigma_i = \left(\frac{j\omega}{\alpha_i}\right)^{1/2} = (1 + j)\mu_i^{-1}$, U 、 V 、 θ_1 、 θ_2 都是待定复常量。

把式(3a)代入式(1c), 得 $E = \frac{(1 - \beta')\beta I_0}{k_s(\beta^2 - \sigma_s^2)}$, 把式(3)代入边界条件(2), 并作 $e^{-\beta l} \rightarrow 0$ 的近似, 得

$$\begin{aligned} U &= \frac{(g + s + r)(1 - g - s)Ee^{-\sigma_s l}}{(1 + g + s)^2 e^{\sigma_s l} - (1 - g - s)^2 e^{-\sigma_s l}} + \frac{(1 - g - s)r'I_0 e^{-\sigma_s l}}{(1 + g + s)^2 e^{\sigma_s l} - (1 - g - s)^2 e^{-\sigma_s l}}, \\ V &= \frac{(1 + g + s)(g + s + r)Ee^{\sigma_s l}}{(1 + g + s)^2 e^{\sigma_s l} - (1 - g - s)^2 e^{-\sigma_s l}} + \frac{(1 + g + s)r'I_0 e^{\sigma_s l}}{(1 + g + s)^2 e^{\sigma_s l} - (1 - g - s)^2 e^{-\sigma_s l}}. \end{aligned}$$

由于 $\phi(x, t) = \phi(x) e^{j\omega t}$, 所以计算过程中略去时间参数 t 不影响最后结果。样品前、后表面的温度改变量分别为 $\phi_s(0) = U + V - E$ 、 $\phi_s(l) = Ue^{\sigma_s l} + Ve^{-\sigma_s l}$, 即

$$\begin{aligned} \phi_s(0) &= \left[\frac{(1 + g + s)(r - 1)e^{\sigma_s l} + (1 - g - s)(r + 1)e^{-\sigma_s l}}{(1 + g + s)^2 e^{\sigma_s l} - (1 - g - s)^2 e^{-\sigma_s l}} \right] E \\ &\quad + \left[\frac{(1 + g + s)e^{\sigma_s l} + (1 - g - s)e^{-\sigma_s l}}{(1 + g + s)^2 e^{\sigma_s l} - (1 - g - s)^2 e^{-\sigma_s l}} \right] \frac{\beta'I_0}{k_s \sigma_s}, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\phi_s(l) = \left[\frac{2(g + s + r)E}{(1 + g + s)^2 e^{\sigma_s l} - (1 - g - s)^2 e^{-\sigma_s l}} + \frac{2r'I_0}{(1 + g + s)^2 e^{\sigma_s l} - (1 - g - s)^2 e^{-\sigma_s l}}, \right] \quad (4b)$$

式中

$$r = \frac{\beta}{\sigma_s}, \quad r' = \frac{\beta'}{k_s \sigma_s}, \quad g = \frac{k_g \sigma_g}{k_s \sigma_s}, \quad s = \frac{4\varepsilon \sigma T_0^3 + h}{k_s \sigma_s}.$$

三、振幅公式和相位公式

对于金属和强吸收样品 ($\beta > 10^3 \text{ cm}^{-1}$), 由于 $|r| \gg 1$, 故 $g = \frac{k_g \sigma_g}{k_s \sigma_s} = \frac{k_g \alpha_s^{1/2}}{k_s \alpha_s^{1/2}} \sim 10^{-3}$, $s = \frac{4\varepsilon \sigma T_0^3 + h}{k_s \sigma_s} \sim 10^{-4}$, 与 1 相比, 可以认为 g 、 s 都是零, 即得

$$\begin{aligned} \phi_s(0) &= \left[\frac{e^{\sigma_s l} + e^{-\sigma_s l}}{e^{\sigma_s l} - e^{-\sigma_s l}} \right] r E + \left[\frac{e^{\sigma_s l} + e^{-\sigma_s l}}{e^{\sigma_s l} - e^{-\sigma_s l}} \right] \frac{\beta' I_0}{k_s \sigma_s}, \\ \phi_s(l) &= \frac{2r E}{e^{\sigma_s l} - e^{-\sigma_s l}} + \frac{2r' I_0}{e^{\sigma_s l} - e^{-\sigma_s l}}. \end{aligned}$$

由于 $\phi_s(0)$ 、 $\phi_s(l)$ 都是复数, 经过一系列复数运算, 可化为 $\phi_s(0) = A_s(0) e^{i\varphi_s(0)}$ 、 $\phi_s(l) = A_s(l) e^{i\varphi_s(l)}$, 所以有 $\delta T(0) = A_s(0) \cos \varphi_s(0)$ 、 $\delta T(l) = A_s(l) \cos \varphi_s(l)$, 由此可得到反射光热信号的振幅和相位表达式分别为

$$A_s(0) = \frac{\sqrt{2} I_0}{2k_s \mu_s^{-1}} \left[\frac{e^{2l\mu_s^{-1}} + e^{-2l\mu_s^{-1}} + 2\cos(2l\mu_s^{-1})}{e^{2l\mu_s^{-1}} + e^{-2l\mu_s^{-1}} - 2\cos(2l\mu_s^{-1})} \right]^{1/2}, \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_s(0) &= \tan^{-1} \left[\left(\frac{e^{l\mu_s^{-1}} - e^{-l\mu_s^{-1}}}{e^{l\mu_s^{-1}} + e^{-l\mu_s^{-1}}} \right) \tan(l\mu_s^{-1}) \right] \\ &\quad - \tan^{-1} \left[\left(\frac{e^{l\mu_s^{-1}} + e^{-l\mu_s^{-1}}}{e^{l\mu_s^{-1}} - e^{-l\mu_s^{-1}}} \right) \tan(l\mu_s^{-1}) \right] - \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (5b)$$

透射光热信号的振幅和相位公式分别为

$$A_s(l) = \frac{\sqrt{2} I_0}{k_s \mu_s^{-1}} [e^{2l\mu_s^{-1}} + e^{-2l\mu_s^{-1}} - 2\cos(2l\mu_s^{-1})]^{-1/2}, \quad (5a')$$

$$\varphi_s(l) = -\tan^{-1} \left[\left(\frac{e^{l\mu_s^{-1}} + e^{-l\mu_s^{-1}}}{e^{l\mu_s^{-1}} - e^{-l\mu_s^{-1}}} \right) \tan(l\mu_s^{-1}) \right] - \frac{\pi}{4}. \quad (5b')$$

在以上推导中, 由于假定 $e^{-\beta l} \rightarrow 0$ 、 $|r| \gg 1$, 因而在振幅表达式中, 忽略了振幅与表面状态的关系。而相位与样品的表面状态无关, 仅与透射光路的热扩散特性(即 $l\mu_s^{-1}$)有关, 所以, 以上近似对相位公式没有影响, 式(5b)、(5b')是普适公式。这就是 PTR 技术中相位测量优于振幅测量的道理。

四、实验装置

我们以频率为参数, 通过实验验证公式(5a')、(5b')的正确性, 光热信号与厚度 l 的关系将另文论述。本文的实验装置如图 2 所示。波长 $10.6 \mu\text{m}$ 、功率为 2 W 的 CO_2 激光, 经调制后照射到金属铝样品上, 在透射方向用致冷 HgCdTe 红外探测器探测样品的热辐射变化量。将光热信号与参考信号一起输入锁相分析器, 在锁相器上同时读出振幅值和相位值, 振幅值以电压值表示, 相位值以角度表示。将不同频率的振幅读数与相位读数输入计算机进行曲线拟合, 并与理论公式进行比较, 得到图 3 和图 4。图 3 是厚度为 0.5 mm 铝片的光热

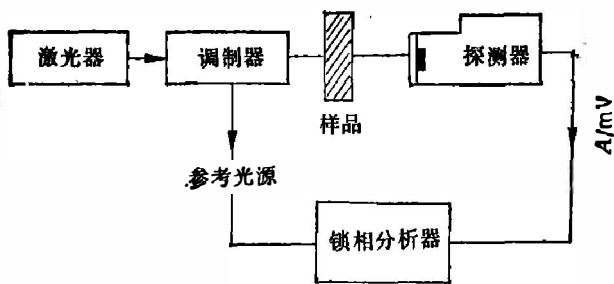


图2 PTR实验装置图

Fig. 2 Experimental arrangement for PTR.

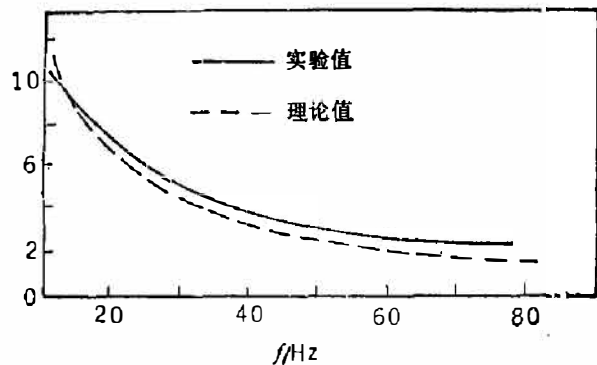


图3 振幅的实验曲线和理论曲线比较

Fig. 3 Comparison of the experimental and theoretical curves for amplitude.

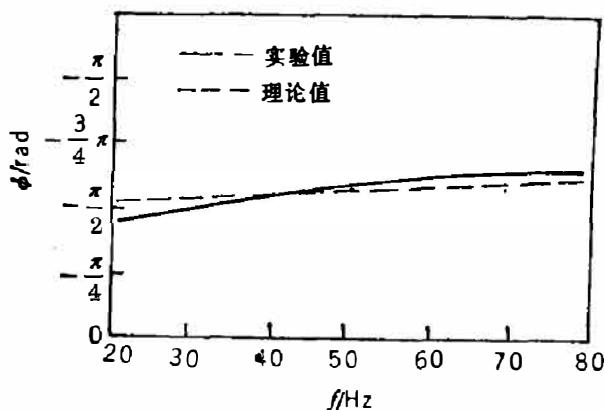


图4 相位的实验曲线和理论曲线比较

Fig. 4 Comparison of the experimental and theoretical curves for phase.

信号振幅实验值与(5a')理论值的比较,图4是相位实验值与(5b')理论值的比较。

五、结 论

图3和图4表明我们得到的振幅和相位公式是正确的。

从图3和振幅公式(5a')可知:当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $A_s(l) \rightarrow e^{2l\mu_s^{-1}}$ 。这说明低频部分振幅随频率按指数规律下降;当 ω 较大时, $A_s(l) \rightarrow 0$,所以在测量振幅时,为保证振幅值有足够的信噪比,调制频率不宜过大,一般不超过100 Hz。

从图4和相位公式(5b')可知,当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $\varphi_s(l) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$,这与参考文献[5]的结论一致;当 ω 较大时, $e^{-l\mu_s^{-1}} \rightarrow 0$, $\varphi_s(l) = -l\mu_s^{-1} - \frac{\pi}{4}$,所以频率较高时测量相位比测量振幅更可靠。

致谢——本工作得到上海技术物理研究所方家熊副研究员和徐国森高级工程师的帮助和支持,谨此表示谢意。

参 考 文 献

- [1] Nordal P. E. and Kanstad S. O., *Infrared Phys.*, **25**(1985), 295.
- [2] Busse G., *Infrared Phys.*, **20** (1980), 419.
- [3] Tam A. C., *Infrared Phys.*, **25** (1985), 305.
- [4] Santos R. and Miranda L. C. M., *J. Appl. Phys.*, **52** (1985), 4194.
- [5] Tom R. D., O'Hara E. P. and Benin D., *J. Appl. Phys.*, **53** (1982), 5392.
- [6] Busse G. and Eyerer P., *Appl. Phys. Lett.*, **43**(1983), 355.

DERIVATION AND DEMONSTRATION OF THE AMPLITUDE AND PHASE ANGLE FORMULAE IN PTR

GUAN GUOXIN, ZHENG XIAOMING, LI PEIZAN

(*Department of Physics, Suzhou University*)

ABSTRACT

A one-dimensional model for heat conduction in the solid-gas system is used to find the surface temperature fluctuation in the sample, from which the amplitude and phase angle formulae for signals in PTR are derived. These two formulae are well demonstrated by the experimental results.