

高 斯 腔 模 的 稳 定 性

樊 锡 君

(山东师范大学物理系)

摘要—

在单

横模假设模型范围内讨论了定态及纯吸收情况下的稳定性问题, 结果表明可能出现失稳。

一、引 言

Lugiato 和 Milani^[1,2] 讨论了 TEM₀₀ 模的场注入带球面反射镜单向环形腔中的光学双稳态问题, 腔中原子样品的二能级原子体系是均匀展宽的。他们在单横模假设模型范围内分析了色散和吸收两种情况下的定态及纯吸收条件下的稳定性, 发现当圆柱型原子样品的半径远大于高斯光束束腰时, 定态曲线的正斜率部分不发生失稳。这一结果提示人们: 为观察吸收性光学双稳态的自脉动现象, 应尽可能满足平面波条件。

本文假设注入电场为高斯光束的 TEM₁₀ 模, 在单横模假设模型范围内讨论了定态及纯吸收情况下的稳定性问题。

二、带球面镜单向环形腔的横模方程

我们考虑一个长度为 \mathcal{L} 的单向环形腔(参看图 1), 频率为 ω_i 的相干光束注入腔中。腔中的圆柱形原子样品长度为 L , 面积为 πd^2 , 体积为 $V = \pi d^2 L$ 。样品中含有大量(N 个)偶极矩为 μ 的二能级原子, 假定原子体系是均匀展宽的, 跃迁频率为 ω_0 , 纵向和横向的衰变率分别是 γ_{\parallel} 和 γ_{\perp} 。我们同时假定入射场有柱对称性, 径向和纵向坐标分别用 r 和 z 表示。 $\mathcal{E}(r, z, t)$ 为电场, $\mathcal{P}(r, z, t)$ 为原子极化强度, $\mathcal{D}(r, z, t)$ 是下能级和上能级布居数差的一半。

令

$$\mathcal{E}(r, z, t) = \frac{\hbar\sqrt{\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}}}{\mu} E(r, z, t) \exp[-i(\omega_i t - kz)] + O.O., \quad (1a)$$

$$\mathcal{P}(r, z, t) = i \frac{\mu}{V} \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}}} \frac{N}{2} P(r, z, t) \exp[-i(\omega_i t - kz)] + O.O., \quad (1b)$$

本文 1986 年 6 月 27 日收到, 最后修改稿 1987 年 9 月 4 日收到。

$$\mathcal{D}(r, z, t) = \frac{N}{2} D(r, z, t), \quad (1c)$$

$$k_i = \omega_i / c. \quad (1d)$$

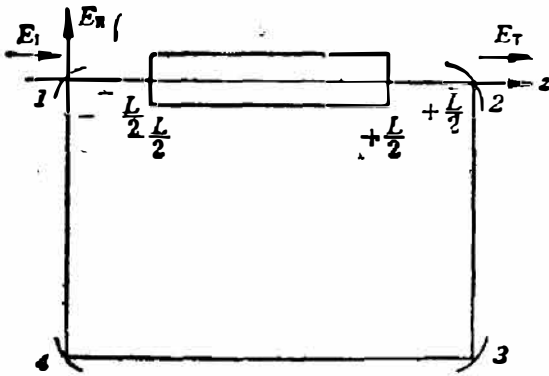


图1 带球面镜的单向环形腔
Fig. 1 Unidirectional ring cavity
with spherical mirrors.

E_i, E_r, E_r 分别为入射、透射和反射场; 镜3、4的
反射率为100%; 镜1、2的透射系数为 T

在麦克斯韦方程中略去含有 $\partial^2 E / \partial z^2$ 、 $\partial^2 D / \partial t^2$ 、 $\partial^2 P / \partial t^2$ 和 $\partial P / \partial t$ 的项, 使用偶极近似和旋波近似, 则 E, P 和 D 服从下面的麦克斯韦-布洛赫方程组^[3];

$$\frac{1}{2ik_i} \nabla_{\perp}^2 E + \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\alpha P, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma_{\perp} \{DE - P(1 + i\Delta)\}, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2} [PE^* + EP^*] + D - X_{\nu}(r, z) \right\}. \quad (2c)$$

其中 $\nabla_{\perp}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$ 是横向拉普拉斯算符, $\alpha = \pi \mu^2 k_i N / (\hbar \gamma_{\perp} V)$ 是共振时的不饱和吸收系数, $\Delta = (\omega_0 - \omega_i) / \gamma_{\perp}$ 是原子调谐参量, 原子样品的特征函数(参见图1)为,

$$X_{\nu}(r, z) = \begin{cases} 1, & (|z| < \frac{L}{2}, r < d) \\ 0, & (|z| > \frac{L}{2}, \text{ 或 } r > d) \end{cases}$$

利用腔的横模展开电场^[4]

$$E(r, z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p(z, t) A_p(r, z), \quad (3)$$

其中

$$A_p(r, z) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{W(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{W^2(z)} \right] L_p \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \exp [i\phi_p(r, z)]. \quad (4)$$

式(4)中 L_p 表示拉盖尔多项式(p 阶), 有

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$\phi_p(r, z) = k_i \frac{r^2}{R(z)} + (2p-1) \text{tg}^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right), \quad (6)$$

$$R(z) = \frac{1}{z} (z^2 + z_0^2), \quad (7)$$

这里 W_0 是束腰, 由瑞利长度 $z_0 = \pi W_0^2 / \lambda$. 由式(4)得到等式

$$\nabla_{\perp}^2 A_p + 2ik_i \frac{\partial A_p}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

和正交关系

$$2\pi \int_0^{\infty} dr r A_p^*(r, z) A_{p'}(r, z) = \delta_{p, p'}. \quad (9)$$

将式(3)代入式(2a)并考虑式(8), 乘以 $2\pi r A_p^*(r, z)$, 再对 r 积分, 通过式(9)得到振幅 $f_p(z, t)$ 的时间演化方程

$$\frac{\partial f_p}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial f_p}{\partial t} = -\alpha \int_0^\infty dr 2\pi r A_p^*(r, z) P(r, z, t). \quad (10)$$

假设入射场对应于腔的 TEM₁₀ 模, 即

$$E_r(r) = E_0 \frac{\sqrt{2/\pi}}{W\left(-\frac{L}{2}\right)} \exp\left[-\frac{r^2}{W^2\left(-\frac{L}{2}\right)}\right] \cdot \left[1 - \frac{2r^2}{W^2\left(-\frac{L}{2}\right)}\right] \exp\left[i\phi_1\left(r, -\frac{L}{2}\right)\right], \quad (11)$$

因此式(10)的边界条件可写为^[4]:

$$\begin{cases} f_p\left(-\frac{L}{2}, t\right) = T y_0 \delta_{p,1} + (1-T) e^{-\omega_p t} (-i\delta_p) f_p\left(\frac{L}{2}, t - \frac{\mathcal{L}-L}{c}\right), \\ y_0 = E_0 / \sqrt{T}. \end{cases} \quad (12)$$

式中 T 是镜 1 和镜 2 的强度透射率系数, δ_p 是 p 模的腔调谐参量, 并有

$$\delta_p = 2\pi m - k_r \mathcal{L} - 2(2p+1) \operatorname{tg}^{-1} \frac{L}{2z_0}, \quad (13)$$

在式(13)中, 选择的整数 m 使得 $|\delta_p| < 2\pi$ 。方程(12)推广了著名的环形腔边界条件^[5], 使其包括了电场的径向结构。

对于定态情况, 有

$$\partial f_p / \partial t = \partial P / \partial t = \partial D / \partial t = 0.$$

由式(2b)和(2c)可导出

$$P(r, z) = \frac{(1-i\Delta) E(r, z)}{1+\Delta^2 + |E(r, z)|^2} X_V(r, z). \quad (14)$$

将式(14)引入式(10), 若使用以下变量

$$\xi = z/L, \quad (15a)$$

$$\sigma = 2 \left[\frac{r}{W(z)} \right]^2, \quad (15b)$$

$$\tilde{f}_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{W_0} f_p, \quad (16)$$

并假定对 $-\frac{L}{2} < z < +\frac{L}{2}$ 区间的所有 $W(z)$ 都有 $W(z) \ll d$, 则得到以下方程 $\left(-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \tilde{f}_p &= -\alpha L (1-i\Delta) \int_0^{2d^2/W^2(z)} d\sigma e^{-\sigma} L_p(\sigma) \cdot \\ &\cdot \sum_{p'} L_{p'}(\sigma) \exp[i\bar{\phi}_{p'-p}(\xi)] \frac{\tilde{f}_{p'}(\xi)}{1+\Delta^2 + |\tilde{E}(\sigma, \xi)|^2}, \end{aligned} \quad (17a)$$

$$|\tilde{E}(\sigma, \xi)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2/\sigma_f^2} e^{-\sigma} \left| \sum_{p'} \tilde{f}_{p'}(\xi) L_{p'}(\sigma) e^{i\bar{\phi}_{p',(\xi)}} \right|^2, \quad (17b)$$

在推导式(17)时, 使用了式(3)、(4)、(5)和(6)。这里 \mathcal{F} 是费涅尔系数, 其定义为

$$\mathcal{F} = \pi W_0^2 / (\lambda L).$$

而 $\bar{\phi}_p(\xi) = 2p \operatorname{tg}^{-1}(\xi/\mathcal{F})$, 若定义

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0 / W_0,$$

那么边界条件式(12)变成

$$\tilde{f}_p\left(-\frac{1}{2}\right) = T y \delta_{p,1} + (1-T) e^{-\omega_p} \tilde{f}_p\left(\frac{1}{2}\right). \quad (12')$$

由式(17)和(12)可以看出我们的问题仅与 αL , Δ , \mathcal{F} , T 和 δ_p 相关。除单横模近似外, 这些方程都只能数值求解。

三、单横模模型的定态解

我们再假定腔内场为 TEM_{10} 模, 并有可饱和的吸收器。在放大介质的情况下, 如果 TEM_{10} 模的增益超过了所有其它横模的增益, 这个假设就是相当合理的。

本文应用单横模假设来计算定态并讨论它的稳定性, 这个假设意味着在式(3)中舍去所有 $p \neq 1$ 的项。通过令 $p = p' = 1$, 由式(17)得到

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \xi} = -\alpha L(1-i\Delta) \tilde{f}_1 \int_0^\infty d\sigma \theta^{-\sigma} (1-\sigma)^2 \frac{1}{1+\Delta^2 + |\tilde{E}(\sigma, \xi)|^2}, \\ |\tilde{E}(\sigma, \xi)|^2 = \frac{1}{1+(\xi/\mathcal{F})^2} \theta^{-\sigma} (1-\sigma)^2 |\tilde{f}_1(\xi)|^2, \end{cases} \quad (18)$$

这里的 σ 是由式(15b)定义的。

下面我们仅讨论 $\mathcal{F} \gg 1$ 的情况, 这时式(18)可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \xi} = -\alpha L(1-i\Delta) \tilde{f}_1 \int_0^\infty d\sigma \theta^{-\sigma} (1-\sigma)^2 \frac{1}{1+\Delta^2 + |\tilde{E}'(\sigma, \xi)|^2}, \\ |\tilde{E}'(\sigma, \xi)|^2 = \theta^{-\sigma} (1-\sigma)^2 |\tilde{f}_1(\xi)|^2. \end{cases} \quad (18')$$

对变量 σ 积分, 导出

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \xi} = -\alpha L(1-i\Delta) B(\xi) \tilde{f}_1(\xi), \quad (19)$$

其中

$$B(\xi) = \frac{1}{1+\Delta^2 + |\tilde{f}_1(\xi)|^2} \left\{ 1 + \frac{0.25 |\tilde{f}_1(\xi)|^2}{1+\Delta^2 + |\tilde{f}_1(\xi)|^2} - \frac{0.381 |\tilde{f}_1(\xi)|^4}{[1+\Delta^2 + |\tilde{f}_1(\xi)|^2]^2} \right\}. \quad (20)$$

我们定义

$$\tilde{f}_1(\xi) = g(\xi) e^{i\varphi(\xi)}, \quad (21)$$

由方程(19)可得到

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \xi} = -\alpha L g B(g), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \alpha L \Delta B(g), \\ B(g) = \frac{1}{1+\Delta^2 + g^2} \left\{ 1 + \frac{0.25 g^2}{1+\Delta^2 + g^2} - \frac{0.381 g^4}{[1+\Delta^2 + g^2]^2} \right\}. \end{cases} \quad (22)$$

我们在平均场近似条件

$$\begin{cases} \alpha L \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \\ \alpha L/T = 2O \quad (O \text{ 为常数}) \end{cases} \quad (23)$$

成立情况下求解方程组(22)。令

$$x = g\left(\frac{1}{2}\right), \quad (24)$$

将式(22)左端展为级数。因为 $\alpha L \ll 1$, 所以可略去 $(\alpha L)^2$ 及含 (αL) 的更高次方的项, 从而得到

$$\begin{cases} x - g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\alpha L x B(x^2), \\ \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha L \Delta B(x^2), \end{cases} \quad (25)$$

其中

$$B(x^2) = \frac{1}{1 + \Delta^2 + x^2} \left[1 + \frac{0.25x^2}{1 + \Delta^2 + x^2} - \frac{0.381x^4}{(1 + \Delta^2 + x^2)^2} \right]. \quad (26)$$

定义 $Y = y^2$ 、 $X = x^2$ ，利用式(12)、(25)及条件(23)，可得到状态方程

$$Y = X \{ [1 + 2CB(X)]^2 + [\eta - 2C\Delta B(X)]^2 \}, \quad (27)$$

其中 $\eta = \delta_1/T$ 。在纯吸收的情况下 ($\Delta = \eta = 0$)，方程(27)可简化为

$$y = x + \frac{2Cx}{1+x^2} \left[1 + \frac{0.25x^2}{1+x^2} - \frac{0.381x^4}{(1+x^2)^2} \right]. \quad (28)$$

图2给出了 $C=20$ 、 $\Delta = \eta = 0$ 时由状态方程(28)所确定的 $x-y$ 关系曲线。

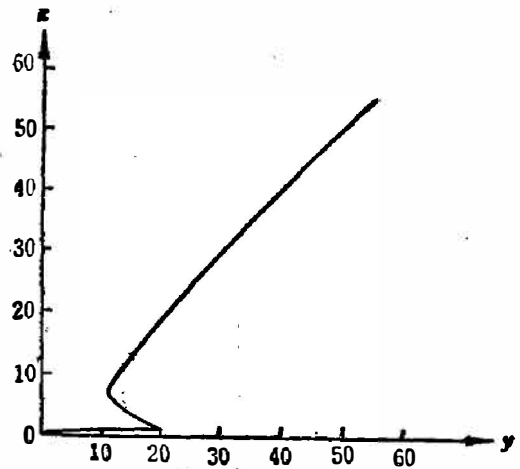


图2 定态情况下，透射场 x 与入射场 y 的关系曲线 ($d \gg W_0$ ， $\mathcal{F} \gg 1$ ， $\Delta = \eta = 0$ ， $C = 20$)

Fig. 2 Variation of normalized transmitted field x with normalized incident field y at steady state for $d/W_0 \gg 1$ ， $\Delta = \eta = 0$ ， $\mathcal{F} \gg 1$ ， $C = 20$.

四、单横模模型线性稳定性分析

如果我们定义

$$\bar{f}_1(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{W_0} f_1(z, t), \quad (29a)$$

$$K(r, z) = \frac{1}{[1 + (z/z_0)^2]^{1/2}} \left[1 - \frac{2r^2}{W^2(z)} \right] \exp\left[-\frac{r^2}{W^2(z)}\right], \quad (29b)$$

$$\bar{P}(r, z, t) = \exp[-i\phi_1(r, z)] P(r, z, t), \quad (29c)$$

则可从式(10)、(2b)和(2c)得到单横模模型的方程组：

$$\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial t} = -\alpha \int_0^\infty dr \frac{4r}{W_0^2} K(r, z) \bar{P}(r, z, t), \quad (30a)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \gamma_{\perp} \{ D \bar{f}_1 K(r, z) - \bar{P}(1 + i\Delta) \}, \quad (30b)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2} K(r, z) [\bar{f}_1^* \bar{P} + \bar{f}_1 \bar{P}^*] + D - X_{\nu}(r, z) \right\}. \quad (30c)$$

注意式(30)包括了所有腔的纵模，单模假设只涉及横模。式(30a)的边界条件是

$$\bar{f}_1\left(-\frac{L}{2}, t\right) = T y + (1-T)e^{-i\omega_1} \bar{f}_1\left(\frac{L}{2}, t - \frac{\mathcal{L}-L}{c}\right). \quad (31)$$

在定态情况 ($\partial \bar{f}_1 / \partial t = 0$ ， $\partial \bar{P} / \partial t = 0$ ， $\partial D / \partial t = 0$) 下，我们有

$$\begin{cases} \bar{P}_{st}(r, z) = \frac{(1-i\Delta)\bar{f}_1 K(r, z)}{1+\Delta^2+K^2(r, z)|\bar{f}_1|^2} X_V(r, z), \\ D_{st}(r, z) = \frac{1+\Delta^2}{1+\Delta^2+K^2(r, z)|\bar{f}_1|^2} X_V(r, z). \end{cases} \quad (32)$$

以下我们集中讨论纯吸收情况($\Delta=\eta=0$), 这时可以合理地假设 \bar{f}_1 和 \bar{P} 为实函数。为了考查定态解的稳定性, 我们引进三个偏离量:

$$\begin{cases} \delta f(z, t) = \bar{f}_1(z, t) - \bar{f}_{1,st}(z), \\ \delta P(r, z, t) = \bar{P}(r, z, t) - \bar{P}_{st}(r, z), \\ \delta D(r, z, t) = D(r, z, t) - D_{st}(r, z). \end{cases} \quad (33)$$

将式(30)线性化, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta f}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta f}{\partial t} = -\alpha \int_0^\infty dr \frac{4r}{W_0^2} K(r, z) \delta P, \\ \frac{\partial \delta P}{\partial t} = \gamma_\perp \{K(r, z) [D_{st} \delta f + \bar{f}_{1,st} \delta D] - \delta P\}, \\ \frac{\partial \delta D}{\partial t} = -\gamma_\parallel \{K(r, z) [\bar{P}_{st} \delta f + \bar{f}_{1,st} \delta P] + \delta D\}. \end{cases} \quad (34)$$

其中偏离量 δf 服从边界条件

$$\delta f\left(-\frac{L}{2}, t\right) = (1-T) \delta f\left(\frac{L}{2}, t - \frac{\mathcal{L}-L}{c}\right). \quad (35)$$

我们寻找如下形式的解

$$\begin{cases} \delta f(z, t) = e^{\lambda t} \bar{\delta f}(z) + O. O., \\ \delta P(r, z, t) = e^{\lambda t} \bar{\delta P}(r, z) + O. O., \\ \delta D(r, z, t) = e^{\lambda t} \bar{\delta D}(r, z) + O. O. \end{cases} \quad (36)$$

将式(36)引进式(34)并用式(33)消去 $\bar{\delta P}$ 和 $\bar{\delta D}$, 这样就得到关于 $\bar{\delta f}$ 的方程(推导方法类似于参考文献[6])

$$\frac{\partial \bar{\delta f}}{\partial z} = \left\{ -\alpha \int_0^\infty dr \left[\frac{4r}{W_0^2} K(r, z) F \right] - \frac{\lambda}{c} \right\} \bar{\delta f}, \quad (37a)$$

其中

$$\begin{aligned} F &\equiv F(D_{st}, \bar{f}_{1,st}, \bar{P}_{st}, K(r, z)) \\ &= \frac{1}{1+\lambda/\gamma_\perp} K(r, z) \left\{ D_{st} - \bar{f}_{1,st} \left[1 + \frac{K^2(r, z) \bar{f}_{1,st}^2}{(1+\lambda/\gamma_\parallel)(1+\lambda/\gamma_\perp)} \right]^{-1} \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{1}{1+\lambda/\gamma_\parallel} K(r, z) \bar{P}_{st} - \frac{K^2(r, z) \bar{f}_{1,st}^2}{(1+\lambda/\gamma_\parallel)(1+\lambda/\gamma_\perp)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (37b)$$

使用边界条件(35)及方程(36)和(37)可以找到决定 λ 值的方程

$$1 = (1-T) \exp \left\{ -\frac{\lambda \mathcal{L}}{c} - \alpha \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \left[\int_0^\infty dr \frac{4r}{W_0^2} K(r, z) F \right] \right\}. \quad (38)$$

取(38)的对数, 可得

$$\begin{aligned} 2\pi i n &= \ln(1-T) - \frac{\lambda \mathcal{L}}{c} - \alpha \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \left[\int_0^\infty dr \frac{4r}{W_0^2} K(r, z) F \right]. \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (39)$$

令 $\alpha_n = 2\pi c n / \mathcal{L}$, $k = cT / \mathcal{L}$, 并且在(39)式中代入(32), 从而得到

$$\lambda = -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln(1-T) - 2Ck\gamma_{\perp} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\xi \Gamma, \quad (40a)$$

$$\Gamma \equiv \Gamma(\lambda, \xi, \bar{f}_{1,st}(\xi)) = \int_0^{\infty} dr X_{\nu}(r, \xi) 4r \frac{K^2(r, \xi)}{W_0^2} \cdot \frac{1}{1 + K^2(r, \xi) \bar{f}_{1,st}(\xi)} \cdot \frac{\gamma_{\perp} [1 - K^2(r, \xi) \bar{f}_{1,st}^2(\xi)] + \lambda}{(\gamma_{\perp} + \lambda)(\gamma_{\parallel} + \lambda) + \gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} K^2(r, \xi) \bar{f}_{1,st}^2(\xi)}. \quad (40b)$$

脚标 n 对应于腔的纵向频率, 而 $n=1$ 对应于与入射场共振的腔的频率。并且本征值是以脚标 n 来标记的, k 是空腔阻尼常数。

现在考虑 $\alpha L \ll 1, T \ll 1$ 的情况, 我们用 $-T$ 代替 $\ln(1-T)$ 。因为在这种情况下定态场 $\bar{f}_{1,st}(\xi)$ 在区间 $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ 内实际上是均匀的, 因此可以用 $\bar{f}_{1,st}(\frac{1}{2}) = x$ 来代替它(参见式(24)和(21))。我们只考虑 $k \ll \gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel}$ 的情况, 这样式(40a)的解立即可用迭代法求得。

$$\lambda_n = -i\alpha_n - k \left\{ 1 + 2C\gamma_{\perp} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\xi \Gamma(-i\alpha_n, \xi, x) + O\left(\frac{k}{\gamma_{\perp}}, \frac{k}{\gamma_{\parallel}}\right) \right\}. \quad (41)$$

为了简化问题, 仅考虑 $\mathcal{L} \gg 1$ 的情况, 可舍去 $K(r, \xi)$ 的表达式中 ξ/\mathcal{L}^2 项, 再令 $\bar{\alpha}_n = \alpha_n/\gamma_{\perp}, \beta = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$, 并定义 $\sigma_0 = 2(r/W_0)^2, \epsilon = x^2(1-\sigma_0)^2 e^{-\sigma_0}$, 这里 x 由式(24)给出, 并考虑到 $d \gg W_0$, 可得

$$\lambda_n = -i\alpha_n - k \left\{ 1 - \frac{2C}{x^2} \int_0^{2(d/W_0)^2} d\sigma_0 \cdot \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \frac{(\epsilon-1)\beta + i\bar{\alpha}_n}{(1-i\bar{\alpha}_n)(\beta-i\bar{\alpha}_n) + \beta\epsilon} \right\}. \quad (42)$$

当 $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的取值中至少有一个能使得 $\text{Re}\lambda_n > 0$ 时, 定态是不稳定的。因此失稳条件是

$$H^{(n)}(x^2) > 1, \quad (43a)$$

其中

$$H^{(n)}(x^2) = \frac{2C}{x^2} \int_0^{2(d/W_0)^2} d\sigma_0 \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \text{Re} \frac{\beta(\epsilon-1) + i\bar{\alpha}_n}{(1-i\bar{\alpha}_n)(\beta-i\bar{\alpha}_n) + \beta\epsilon} \\ = \frac{2C}{x^2} \int_0^{2(d/W_0)^2} d\sigma_0 \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \frac{\beta(\epsilon-1)(\beta - \bar{\alpha}_n^2 + \beta\epsilon) - \bar{\alpha}_n^2(\beta+1)}{(\beta - \bar{\alpha}_n^2 + \beta\epsilon)^2 + \bar{\alpha}_n^2(\beta+1)^2}. \quad (43b)$$

在方程(43a)中, 左边表示第 n 个腔模的“增益”, 而右边表示已归一化的损耗, 当至少有一个腔模增益超过损耗时, 则会发生失稳。(43b)中的 β 具有 1 的数量级, 为了简化运算, 我们取 $\beta=1$, 那么式(43b)变为

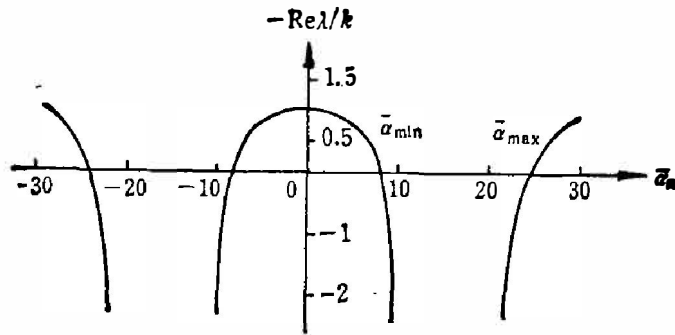
$$H_1^{(n)}(x^2) = \frac{2C}{x^2} \int_0^{\infty} d\sigma_0 \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \frac{(\epsilon-1)(1 - \bar{\alpha}_n^2 + \epsilon) - 2\bar{\alpha}_n^2}{(1 - \bar{\alpha}_n^2 + \epsilon)^2 + 4\bar{\alpha}_n^2}. \quad (43b')$$

将式(43b')中的被积函数作适当变换后按级数展开, 经过冗长的计算, 得到

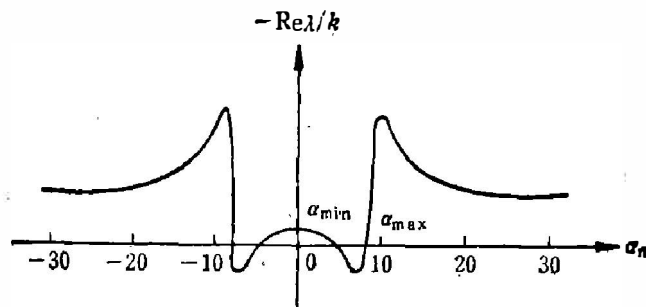
$$H_1^{(n)}(x^2) = -\frac{2C}{x^2} Q^{(n)}(x^2), \quad (44)$$

其中

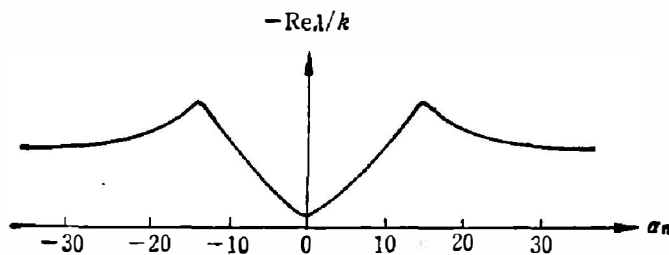
$$Q^{(n)}(x^2) = \frac{1}{G} (2+a)x^2 + \frac{x^2}{G^2} [(2+a)(0.5ax^2 + 0.881x^4) - (2-a)^2(2a - 0.75x^2)] + \\ + \frac{x^4}{G^3} [(2+a)(-1.523a^2x^2 + 0.849ax^4 + 0.693x^6) \\ - (2-a)^2(5a^2 + 0.523ax^2 + 1.418x^4)]. \quad (45)$$



(a) 入射场为高斯光束 TEM₁₀ 模 ($C=30, \Delta=\eta=0, \beta=1, \mathcal{F}\gg 1, W_0\ll d, x=14.5$)
 (a) For TEM₁₀ mode, $C=30, \Delta=\eta=0, \beta=1, \mathcal{F}\gg 1, W_0\ll d, x=14.5$.



(b) 入射场为高斯光束 TEM₀₀ 模 ($C=30, \Delta=\theta=0, \beta=1, \mathcal{F}\gg 1, W_0\gg d, x=8$)
 (b) For TEM₀₀ mode, $C=30, \Delta=\theta=0, \beta=1, \mathcal{F}\gg 1, W_0\gg d, x=8$.



(c) 情况如(b), 但 $C=30, W_0\ll d, x=14.5$
 (c) For TEM₀₀ mode, $C=30, W_0\ll d, x=14.5$.

图3 $\text{Re}\lambda$ 作为连续变化的 \bar{a}_n 的关系曲线
 Fig. 3 Variation of $\text{Re}\lambda$ with \bar{a}_n .

式(45)中 $G=(1-\bar{a}_n^2+x^2)^2+4\bar{a}_n^2, a=1-\bar{a}_n^2$ 。在这种情况下, $\text{Re}\lambda_n$ 可表达为

$$\text{Re}\lambda_n = -k \left\{ 1 + \frac{2C}{x^2} Q^{(n)}(x^2) \right\}. \quad (46)$$

现在考虑定态曲线 $x=x(y)$ 的高透射分支, 将 \bar{a}_n 看作连续变化的量, 取 $C=30, x=14.5$, 则由式(46)得到的 $\text{Re}\lambda_n-\bar{a}_n$ 关系曲线如图 3(a) 所示。显然, 倘若至少有一个腔频使得 \bar{a}_n 处于 $\bar{a}_{\min} < \bar{a}_n < \bar{a}_{\max}$ 区间, 定态就是不稳定的。图 3(b) 和 3(c) 分别给出入射场为高斯 TEM₀₀ 模, 在单横模模型中的平面波近似和非平面波近似的情况^[1]。

致谢——本文在写作过程中得到宁波大学陈继述教授的热情指导, 又承蒙审阅了全文, 作者在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Lugiato L. A. and Milani M. *Z. Phys.*, **B50**(1983), 171.
- [2] Lugiato L. A. and Milani M., *Opt. Commun.* **48**(1983), 57.
- [3] Svelto O., *Progress in Optics*, Ed. by Wolf E., Amsterdam, North-Holland, Vol. XII, P. 3, 1974.
- [4] Yariv A., *Introduction to Optical Electronics*, 2nd Ed., New York, John Rinehart Winson, 1976.
- [5] Bonifacio R. and Lugiato L. A., *Lett. Nuovo Cimento*, **21**(1978), 505.
- [6] Bonifacio R. and Lugiato L. A., *Lett. Nuovo Cimento*, **21**(1978), 510.

STABILITIES IN GAUSSIAN CAVITY MODE

FAN XIJUN

(Department of Physics, Shandong Normal University)

ABSTRACT

The electric field injected into a unidirectional ring cavity with spherical mirrors is assumed to be the TEM_{10} mode of a Gaussian beam. In the framework of the single transverse mode model, the stabilities of the stationary state case and the purely absorptive case are discussed. The results show that the instabilities may appear.