

单输出环形腔光学双稳系统分析*

罗利国 陈继述

(山东大学光学系) (宁波大学物理系)

摘要——提出了一种单输出环形腔光学双稳系统，给出了在纯吸收情况下输入输出间的定态方程，光强定态曲线呈反向 S 型，临界 O 值为 2。线性化稳定性分析表明反向 S 型曲线的中间段永远是不稳定的，其右侧分支的一部分也可能失稳。

一、引 言

光学双稳性的理论研究主要采用环形腔和 F-P 腔两种模型。环形腔模型可以同时研究透射双稳和反射双稳输出，所以又称之为双输出环形腔双稳系统^[1,2]。此系统已被推广到自由运转激光器(FRL)和有注入信号的激光器(LIS)^[2]，最近已报道了双环形腔双稳系统^[3]。

本文提出一种新的环形腔光学双稳系统(参见图 1)，此系统与双输出系统的主要区别是把反射输出和透射输出叠加成一个输出，我们称之为单输出的环形腔双稳系统。

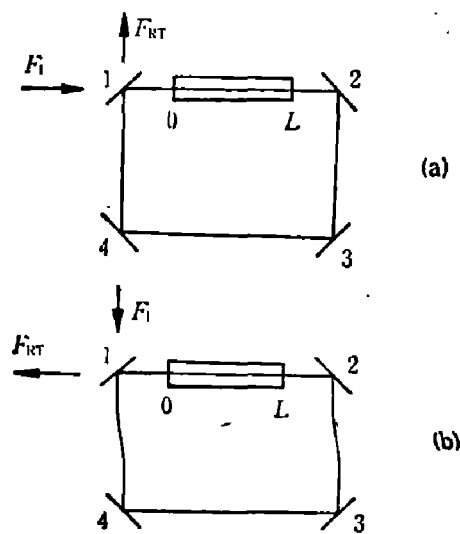


图 1 单输出系统

Fig. 1 Ring cavity with single output.

本文 1987 年 1 月 6 日收到。修改稿 1987 年 3 月 9 日收到。

* 中国科学院科学基金资助课题。

二、定态方程

图 1(b) 与图 1(a) 除入射光与出射光位置调换外, 其余均相同。图中 F_I 和 F_{RT} 分别为输入和输出光场, 镜 1 的强度反透率为 R , 2、3、4 均为全反射镜。设图 1(a) 中长度为 L 的介质由均匀加宽的双能级原子组成, 在纯吸收和腔共振的条件下, 其麦克斯韦-布洛赫 (M-B) 方程^[2] 为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right) F &= \alpha P, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \gamma_{\perp} [FD - P], \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel} [FP + D + 1]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $F = E\mu/\hbar(\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel})^{1/2}$ 为介质中归一化的电场慢变化包络 (简称光场), P 为原子的极化量, D 为原子在上下能级的几率之差, α 为非饱和吸收系数, γ_{\perp} 、 γ_{\parallel} 分别为 P 、 D 的弛豫速率。光场满足下述边界条件^[4]:

$$F(0, t) = \sqrt{T} F_I(t) + \sqrt{R} F(L, t - \Delta t), \quad (2a)$$

$$F_{RT}(t) = -\sqrt{R} F_I(t) + \sqrt{T} F(L, t - \Delta t). \quad (2b)$$

式中 $\Delta t = (\mathcal{L} - L)/c$, F_I 、 F_{RT} 分别表示输入和输出光场, \mathcal{L} 为环形腔总长度, c 为光速。

令方程组 (1) 中 $\dot{F} = \dot{P} = \dot{D} = 0$, 即可得定态解:

$$D_s(z) = -\frac{1}{1 + F_s^2(z)}, \quad (3a)$$

$$P_s(z) = -\frac{F_s(z)}{1 + F_s^2(z)}, \quad (3b)$$

$$\frac{d}{dz} F_s(z) = -\frac{\alpha F_s(z)}{1 + F_s^2(z)}. \quad (3c)$$

式 (3c) 对 z 由 0 到 L 积分, 得

$$\ln \frac{F_s(0)}{F_s(L)} - \frac{1}{2} [F_s^2(0) - F_s^2(L)] = \alpha L. \quad (4)$$

对定态情况, 边条件式 (2a)、(2b) 分别变为:

$$F_s(0) = \sqrt{T} F_{IS} + \sqrt{R} F_s(L), \quad (5)$$

$$F_{RTS} = -\sqrt{R} F_{IS} + \sqrt{T} F_s(L). \quad (6)$$

引入

$$\eta = F_s(L), \quad y = \frac{F_{IS}}{\sqrt{T}}, \quad x = \frac{F_{RTS}}{\sqrt{T}}, \quad (7)$$

由 (4)、(5)、(6) 消去 $F_s(0)$ 和 $F_s(L)$ 便得到输入输出之间的定态方程:

$$\ln(\sqrt{R}x + y) - \ln(x + \sqrt{R}y) + \frac{1}{2}(\sqrt{R}x + y)^2 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{R}y)^2 = \alpha L. \quad (8)$$

由式 (8) 可知, 只要给定 αL 和 T , 即确定 x 和 y 的关系。但式 (8) 难于给出简洁的解析分析, 故以下的分析均限于采用平均场近似, 即:

$$\alpha L \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0, \quad \text{但} \quad \frac{\alpha L}{2T} = O(\text{常数}). \quad (9)$$

在此近似下,由式(4)知 $F_s(0)$ 和 $F_s(L)$ 为同数量级的量,再由式(5)、(6)知 x 和 y 也为同一数量级的量。因此得 $F_{RT}=0(\sqrt{T})$ 、 $F_I=0(\sqrt{T})$, 这表示平均场近似只适用于无限小输入光场和无限小输出光场,所以它只是不十分符合实际的近似。

将式(8)中的各项对 T 展开,取到 T 的线性项为止,得到平均场近似下的定态方程:

$$y = x + \frac{4C(x+y)}{1+(x+y)^2} \quad (10)$$

式(10)仍比较复杂。在条件(9)下,由式(6)、(7)可得:

$$x = -y + \eta_0 \quad (11)$$

联立式(10)、(11),得到 x, y 的简洁的定态参量方程:

$$y = \frac{1}{2} \eta + \frac{2C\eta}{1+\eta^2}, \quad (12a)$$

$$x = \frac{1}{2} \eta - \frac{2C\eta}{1+\eta^2} \quad (12b)$$

利用式(12),对每一个给定的腔内光场 η 都可确定唯一的输入 y 与唯一的输出 x 。

图2为对应不同 C 值的光场输入输出定态曲线。图3为 $C=3$ 时输入光强 y^2 与输出光强 x^2 的定态曲线,呈反向S型。

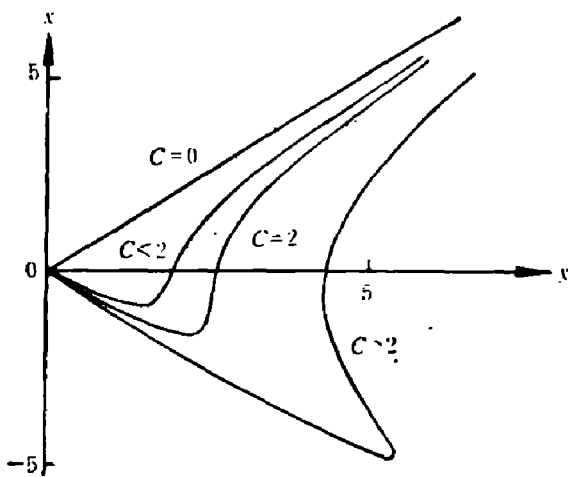


图2 对应于不同 C 值的输入输出定态曲线
Fig. 2 Steady state input-output curves for different C values.

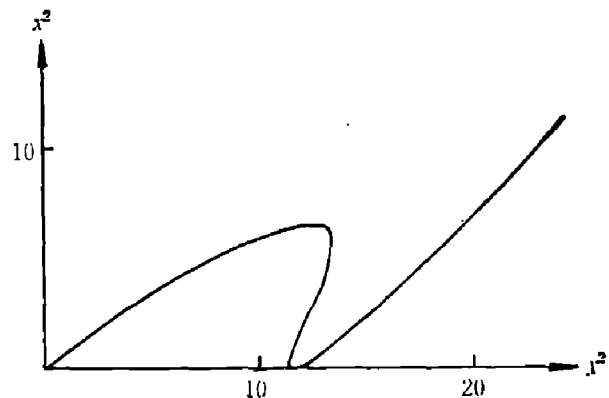


图3 $C=3$ 时输出输入光强定态曲线
Fig. 3 Steady state curve of output versus input light intensities for $C=3$.

单输出环形腔出现双稳态的临界 C 值 C_{crit} 可确定如下:由式(10)对 x 求导,并令:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (13)$$

得方程

$$(x+y)^4 + 2(1-2C)(x+y)^2 + 1 + 4C = 0. \quad (14)$$

由于在双稳临界 ($C=C_{crit}$) 时,满足式(13)的 $(x+y)^2$ 的两个根应该彼此相等,由两根相等的条件得 $C_{crit}=2$ 。

三、定态的线性稳定性分析

将方程组(1)中各变量记为:

$$\left. \begin{aligned} F(z, t) &= F_s(z) + \delta F(z, t), \\ P(z, t) &= P_s(z) + \delta P(z, t), \\ D(z, t) &= D_s(z) + \delta D(z, t). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中定态值 $F_s(z)$ 、 $P_s(z)$ 、 $D_s(z)$ 已在上节讨论。将式(15)代入式(1)，得到微扰量 $\delta F(z, t)$ 、 $\delta P(z, t)$ 、 $\delta D(z, t)$ 的微分方程组：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta F(z, t) &= \alpha \delta P(z, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta P(z, t) &= \gamma_{\perp} [D_s(z) \delta F(z, t) + F_s(z) \delta D(z, t) - \delta P(z, t)] \\ &\quad + \gamma_{\parallel} \delta F(z, t) \delta D(z, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta D(z, t) &= -\gamma_{\parallel} [F_s(z) \delta P(z, t) + P_s(z) \delta F(z, t) + \delta D(z, t)] \\ &\quad - \gamma_{\perp} \delta F(z, t) \delta P(z, t). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

微扰量的边界条件由式(2a)得到：

$$\delta F(0, t) = \sqrt{R} \delta F(L, t - \Delta t). \quad (17)$$

为简便起见，我们只计算 $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \gamma$ 的情况，这一计算不难推广到 $\gamma_{\perp} \neq \gamma_{\parallel}$ 的情形。取定态偏离量如下：

$$\left. \begin{aligned} \delta F(z, t) &= e^{\lambda t} \delta F_{\lambda}(z) + O.C., \\ \delta P(z, t) &= e^{\lambda t} \delta P_{\lambda}(z) + O.C., \\ \delta D(z, t) &= e^{\lambda t} \delta D_{\lambda}(z) + O.C. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将式(18)代入线性化后的式(16)，经化简并用式(3)和式(17)，可得 λ 的闭合形式方程：

$$\lambda = -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R} + \frac{c\alpha}{\mathcal{L}} \int_0^L dz \frac{\gamma [\gamma F_s^2(z) - (\lambda + \gamma)]}{[(\lambda + \gamma)^2 + \gamma^2 F_s^2(z)] [1 + F_s^2(z)]}, \quad (19)$$

式中 $\alpha_n = \frac{c}{\mathcal{L}} 2\pi n$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

由式(19)直接求解 λ 过于复杂，故我们只限于在空腔近似和平均场近似条件下解式(19)。

1. 空腔近似

此时 $\alpha=0$ ，由式(19)得：

$$\lambda_n = -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R}. \quad (20)$$

式(20)表明对应不同 n 值的所有 λ_n 的实部都是负的，因而空腔总是稳定的。式(20)还表明场对定态的偏离量在空腔内的指数衰减系数为 $\left| \frac{c}{\mathcal{L}} \ln \sqrt{R} \right|$ 。

2. 平均场近似

此时可取 $F_s(z) = F_s(L) = \eta$ ，将式(19)进行积分运算，并把含 K 的无穷小量写在方程式右边，即得

$$\begin{aligned} &(\lambda + i\alpha_n) [(\lambda + \gamma)^2 + \gamma^2 \eta^2] \\ &= -K \left\{ \frac{1}{2} [(\lambda + \gamma)^2 + \gamma^2 \eta^2] + 2O \cdot \frac{\gamma(\lambda + \gamma) - \gamma^2 \eta^2}{1 + \eta^2} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $K = cT/\mathcal{L} \propto T$ 。

式(21)是 λ 的三次方程，对每个整数 n ， λ 有三个根，记为 λ_{nj} ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $j=$

1, 2, 3)。由于 K 是无穷小量, 故可将 λ 按 K 的幂次展开, 并仅取到 K 的线性项为止。即记 $\lambda_{nj} = \lambda_{nj}^{(0)} + K\lambda_{nj}^{(1)}$, 代入式(21), 得到有用的解:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{n1}^{(0)} &= -i\alpha_n, \\ \lambda_{n1}^{(1)} &= -\frac{1}{2} + \frac{2C(\eta^2 - 1 + i\tilde{\alpha}_n)}{(1 + \eta^2)[(1 - i\tilde{\alpha}_n)^2 + \eta^2]} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n/\gamma$ 。对于 λ_{n1} , 由于 $\text{Re}(\lambda_{n1}^{(0)}) = -\gamma$, 不引起失稳现象, 故不予讨论。由式(22)可知, $\text{Re}(\lambda_{n1}^{(0)}) = 0$, 所以定态失稳范围应由 $\text{Re}(\lambda_{n1}^{(1)})$ 来确定。不同的 n 对应定态偏离量中不同的模, $n=0$ 的模称为共振模。当 $\text{Re}(\lambda_{n1}^{(1)}) > 0$ 时, 定态中第 n 模使系统的定态失稳。此结论表明, 在线性化理论中, 可以单独计算定态偏离量中不同的模。

由式(22)得到

$$\text{Re}(\lambda_n^{(1)}) = -\left[\frac{1}{2} + \frac{2C}{1 + \eta^2} \cdot \frac{(1 - \eta^2)(1 + \eta^2 - \tilde{\alpha}_n^2) + 2\tilde{\alpha}_n^2}{(1 + \eta^2 - \tilde{\alpha}_n^2)^2 + 4\tilde{\alpha}_n^2} \right] \quad (23)$$

可以证明, 对 $n=0$ 的共振模, 失稳条件 $\text{Re}(\lambda_{01}^{(1)}) > 0$ 要求腔内光场 η 满足 $\eta_1 < \eta < \eta_2$ 。其中:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1^2 &= 2C - 1 - 2\sqrt{C^2 - 2C}, \\ \eta_2^2 &= 2C - 1 + 2\sqrt{C^2 - 2C} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

该范围对应的定态曲线上的失稳范围可通过式(24)与式(12b)分别给出 x_1^2 和 x_2^2 两点, 则此两点之间的定态曲线上的所有定态都是不稳定的。根据式(10), 令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 则可得双稳区上下两个临界点的方程为

$$(x+y)^4 + 2(1-2C)(x+y)^2 + 1+4C = 0 \quad (25)$$

将式(11)代入式(25), 便可得到与该两临界点对应的腔内光场 η 的方程, 求解得:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1^2 &= 2C - 1 - 2\sqrt{C^2 - 2C}, \\ \eta_2^2 &= 2C - 1 + 2\sqrt{C^2 - 2C} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

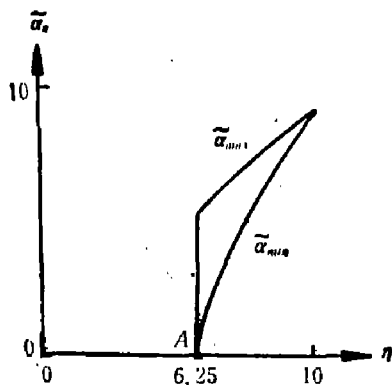


图4 $\tilde{\alpha}_n$ - η 平面上定态中间段以外的失稳区($C=10$)

Fig. 4 Unstable part outside the middle steady state section on the plane of the variables η and $\tilde{\alpha}_n$ for $C=10$.

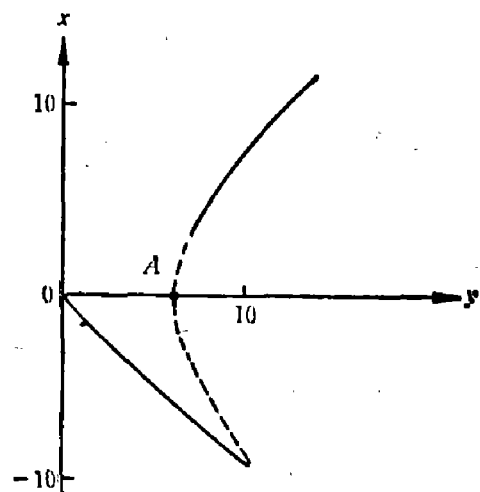


图5 振幅定态曲线上对应的失稳区($C=10$)

Fig. 5 Steady state curve of output versus input amplitudes with stable and unstable parts for $C=10$.

式(24)与式(26)完全相同,由此得出结论:共振模使定态曲线反向S形中间段的定态全部失稳(参见图6)。

对于 $n \neq 0$ 的模,由式(23)并令 $\text{Re}(\lambda_n^{(1)}) > 0$, 便得高阶模的失稳范围为:

$$\tilde{\alpha}_{\min} < \tilde{\alpha}_n < \tilde{\alpha}_{\max}, \quad (27)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\min}^2 &= (\eta^2 - 2C - 1) - 2\sqrt{C^2 - \eta^2}, \\ \tilde{\alpha}_{\max}^2 &= (\eta^2 - 2C - 1) + 2\sqrt{C^2 - \eta^2}. \end{aligned}$$

图4表明在 $\tilde{\alpha}_n - \eta$ 平面上算得的定态中间段以外的失稳范围,包在实线内的区域为失稳区。由式(12)可求得 $x-y$ 平面和 x^2-y^2 平面上的定态失稳区,结果如图5、6所示,图中实线为稳定区,虚线为不稳定区。由图6可知,除反向S形曲线中间段失稳外,其右侧分支的一部分定态也出现了失稳。

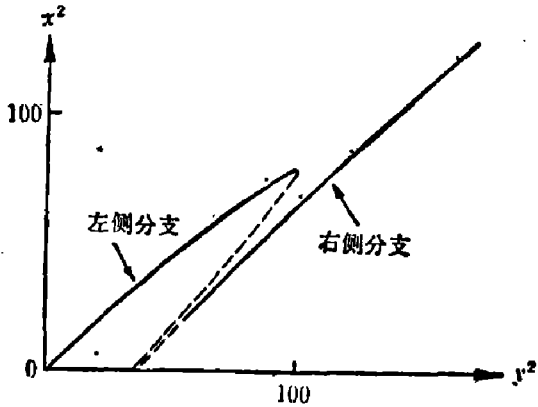


图6 输入输出光强定态失稳区($C=10$)

Fig. 6 Curve of output versus input intensities with stable and unstable parts for $C=10$.

除反向S形曲线中间段失稳外,其右侧分支的一部分定态也出现了失稳。

四、单输出与双输出系统的比较

对于双输出系统,在 N 个均匀加宽、双能级原子组成的介质的情况下, M-B 方程与单输出系统的式(1)相同。但在纯吸收和腔共振条件下的边界条件不是式(2),而是:

$$F_T = \sqrt{T} F(L, t), \quad (28a)$$

$$F_R = -\sqrt{R} F_I + \sqrt{RT} F(L, t - \Delta t), \quad (28b)$$

$$F(0, t) = \sqrt{T} F_I + R F(L, t - \Delta t). \quad (28c)$$

式中 F_I, F_R, F_T 分别为输入、反射输出和透射输出光场。在平均场近似下,引入 $y = \frac{F_I}{\sqrt{T}}$, $x_T = \frac{F_T}{\sqrt{T}}$, $x_R = \frac{F_R}{\sqrt{T}}$, 则透射定态方程为^[5]

$$y = x_T + \frac{2Cx_T}{1+x_T^2}. \quad (29)$$

由式(29)、(28b)及(9)得反射定态方程为

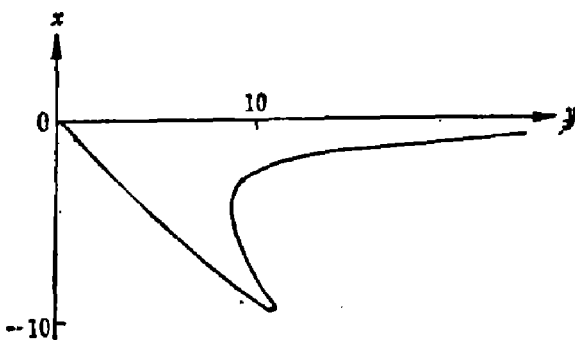


图7 双输出系统反射定态曲线($C=10$)

Fig. 7 Reflective steady state curve of the dual-output system for $C=10$.

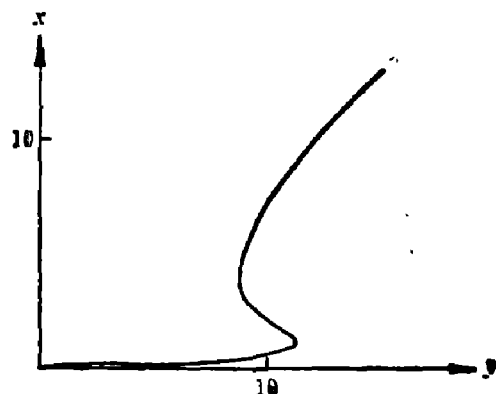


图8 双输出系统透射定态曲线($C=10$)

Fig. 8 Transmissive steady state curve of the dual-output system for $C=10$.

$$x_R = -\frac{2C(y+x_R)}{1+(y+x_R)^2} \quad (30)$$

图 7 为反射定态曲线, 图 8 为透射定态曲线。

由前面的讨论可知, 单输出双稳临界 C 值 $C_{crit}=2$, 而双输出系统的双稳临界 C 值为 $4^{[5]}$, 故单输出系统比双输出系统更容易出现双稳。

与双输出系统不同, 单输出系统对某一输入光场可以对应零点输出(参看图 2), 且此点以上定态曲线斜率较大, 利用此段制成光放大器件时, 由于该段工作点处于零输出附近, 故可减少偏置光对调制光的干扰。比较图 2 和图 7、8, 可定性看出单输出双稳系统的输出是双输出系统的反射输出和透射输出的叠加。还可通过式(10)与式(29)、(30)进行定量比较。

对两种系统的定态稳定性分析表明, 两种系统的失稳范围基本类似。这是由于两种系统的 M-B 方程相同, 且在平均场近似条件下边界条件方程(2a)和(28c)相似, 故腔内光场失稳条件也相似, 致使输出光场类似。因此我们断定, 在双输出系统中能产生的失稳现象在单输出系统中也都能出现。

五、模型的扩充问题

本文对单输出光学双稳系统的分析可以很方便地推广到自由运转激光器(FRL)和带注入信号的激光器(LIS)。将式(1)中的 α 换成 $-\sigma\alpha$ ($\sigma>0$), 给合边界条件(2)就可分析单输出 LIS 系统。如令式(2)中的 $F_I=0$, 就可分析单输出 FRL 系统。 $\sigma>0$ 表示粒子数处于反转状态, $\sigma\alpha$ 代表非饱和增益量。

在讨论 FRL 和 LIS 系统时, 如仍取平均场近似, 则应取 $C = -\frac{\sigma\alpha L}{2T} < 0$ 。图 9 给出 LIS 系统的定态曲线, 图中虚线表示的定态不存在, 它对应于负值的 η 。应指出的是, 一般环形腔激光器多是单输出系统。

对 FRL 和 LIS 系统的进一步研究将另文阐述。

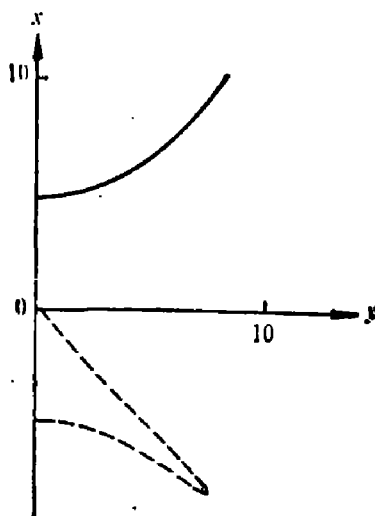


图 9 LIS 系统的定态曲线($C = -10$)

Fig. 9 Steady state curve of laser with injected signal for $C = -10$.

参 考 文 献

- [1] Benifacio R. and Lugiato L. A., *Lett. Nuovo Cim.*, **21**(1978), 505~510.
- [2] Lugiato L. A. et al., *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 1563~1588.
- [3] Mejias P. M. et al., *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 1836.
- [4] 梁铨廷主编, 物理光学, 机械工业出版社, 1980, p. 21.
- [5] Lugiato L. A., in *Progress in Optics*, Vol. XXI, Ed. E. Wolf, North-Holland Amsterdam, 1984, p. 71.

ANALYSIS OF RING CAVITY OPTICAL BISTABLE SYSTEM WITH SINGLE OUTPUT*

LUO LIGUO,

(*Department of Optics, Shandong University*)

CHEN JISHU

(*Department of Physics, Ningbo University*)

ABSTRACT

The ring cavity optical bistable system with single output is presented and analyzed. The steady state equation in the purely absorptive and resonant condition is given. The steady state curves in the mean field limit all exhibit a reverse "S" shape, and the critical value of the bistable cooperative coefficient C is equal to 2. The central section of the reverse "S"-shaped steady state curve proves to be always unstable. Moreover, a part of the steady state curve on the right hand of the central section may also lose its stability.

* Project supported by the science fund of Chinese Academy of Sciences