

# 差分图象跟踪算法改进

徐 天 宁

(中国科学院上海技术物理研究所)

**摘要**——本文对差分图象跟踪算法的误差进行了分析,给出了图象统计特性、算法参数和测量精度之间的定量关系。在此基础上提出了一种预测反推算法和一种补偿算法。实验证实这两种新方法均能大幅度提高差分法的精度。

## 一、前 言

差分图象跟踪算法是七十年代发展起来的一种性能较好的方法,这种方法对一定时间间隔内的两次采样图象进行统计运算,直接得到两次采样时间间隔内图象位移的估计值,该估计值是连续的,不以象元中心距为单位离散。和其它方法相比,差分法具有计算量小,计算需要的内存量小、便于实时进行等特点,因此受到了一定的重视。国外一些文章介绍了差分法用于电视图象位移、飞机地速度测量等方面的研究成果<sup>[1, 3, 4]</sup>。John M. Fitts 设计了使用差分法的相关跟踪器并取得了专利。本文对差分算法进行了仔细分析,得出了估值及估值误差与图象统计特性、差分步长等参数的定量关系式。找出了以往文献中差分估值的实际误差远大于理论误差的原因。在此基础上提出了两种改进算法,这两种算法均能提高差分估值的精度,使之接近理论极限。一维模拟实验证实了这两种算法的优良性能。

## 二、算 法 分 析

本文直接引用差分法的结果<sup>[2]</sup>。在图 1 的象面坐标中,差分法估值公式为

$$\hat{x}_0 = (FB - GA) / (F^2 - GO), \hat{y}_0 = (FA - BO) / (F^2 - GO). \quad (1)$$

式 (1) 中  $\hat{x}_0$ 、 $\hat{y}_0$  分别为位移估值的  $x$  轴和  $y$  轴分量,单位为象元中心距,  $A = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M$

$$\frac{\Delta S(n, m) D_x(n, m)}{\sigma^2(n, m)}, B = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{\Delta S(n, m) D_y(n, m)}{\sigma^2(n, m)}, C = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{D_x^2(n, m)}{\sigma^2(n, m)}, G = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{D_y^2(n, m)}{\sigma^2(n, m)}, F = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{D_x(n, m) D_y(n, m)}{\sigma^2(n, m)}, D_x(n, m) = S(n+1, m) - S(n, m),$$

本文 1985 年 9 月 4 日收到。

$D_y(n, m) = S(n, m+1) - S(n, m)$ ,  $\Delta S = S'(n, m) - S(n, m)$ ,  $\sigma^2(n, m)$  为噪声方差。

这里  $S$  是时间变量  $t-\tau$  时刻的图象, 称为参考图象, 它可以是  $t-\tau$  时刻的一帧瞬时图象, 也可以是  $t-\tau$  时刻以前数帧图象经某种运算后(如滤波以除噪声)的结果。  $S'$  称为瞬时

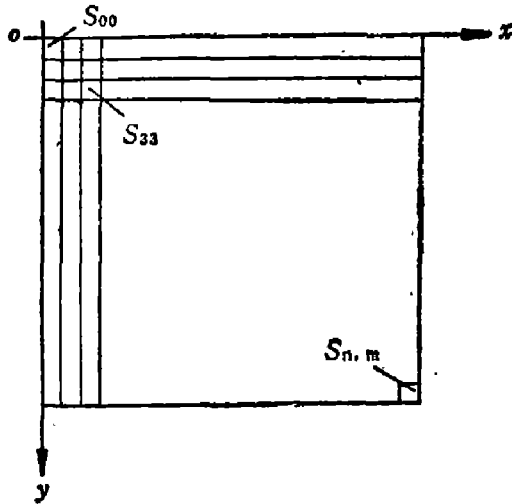


图1 象面坐标

Fig. 1 Image plane coordinate

图象, 是  $t$  时刻采样得到的一帧图象。当图象相关长度远小于图象尺寸时,  $|F| \ll G$ ,  $|F| \ll C$ 。设  $\sigma(n, m) = \sigma_0$ , 公式(1)可简化为:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_0 &\doteq \frac{A}{C} = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \Delta S(n, m) D_x(n, m)}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M D_x^2(n, m)}, \\ \hat{y}_0 &\doteq \frac{B}{G} = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \Delta S(n, m) D_y(n, m)}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M D_y^2(n, m)}. \end{aligned} \right\} (2)$$

式(2)是式(1)的近似, 并且比式(1)更简单, 将二维问题分解为两个一维估值的组合。可以证明(见附录 I), 当式(1)中的差分点对称选择时, 在图象自相关函数圆对称条件下, 式(1)在统计意义上

与式(2)相等。本文主要以式(2)为研究对象。

先推导算法的误差方差公式。由估值理论给出的极大似然估计的误差方差为<sup>[5]</sup>

$$\text{Var}\{\hat{\mathbf{X}}\} = (\mathbf{H}^T \mathbf{V}_V^{-1} \mathbf{H})^{-1}, \quad (3)$$

其中  $\mathbf{V}_V$  为噪声协方差矩阵,  $\mathbf{H}$  为量测矩阵。观测  $\mathbf{Z}$  与参数  $\mathbf{X}$ 、噪声  $\mathbf{V}$  的关系, 表示为<sup>[5]</sup>

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V}. \quad (4)$$

$\mathbf{Z}$  为参考图象和瞬时图象对应象元的差矢量, 并有:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} S'_1 - S_1 \\ S'_2 - S_2 \\ \vdots \\ S'_{N'} - S_{N'} \end{bmatrix}.$$

对于一维情况,  $\mathbf{X} = x_0$ 。

量测矩阵  $\mathbf{H}$  为参考图象  $k$  步长的差分矢量, 在以往的文献中, 为满足线性近似, 差分步长通常取 1 或 2 个象元中心距<sup>[4,5]</sup>, 在此用参数  $k$  代替, 目的在于更细致地研究步长对统计量方差的影响。

$$\mathbf{H} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} S_{k+1} - S_1 \\ S_{k+2} - S_2 \\ \vdots \\ S_{k+N'} - S_{N'} \end{bmatrix} \quad (N' = N - k).$$

同时, 沿用算法推导中关于噪声样点不相关的假设, 噪声协方差矩阵为  $\mathbf{V}_V = \sigma_0^2 \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  为  $N' \times N'$  单位阵。由以上条件即可求出误差方差

$$\text{Var}\{\hat{x}_0\} = (\mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{H})^{-1}$$

$$= \left\{ (S_{k+1} - S_1, \dots, S_{k+N'} - S_{N'}) \cdot (\sigma_0^2 \mathbf{I})^{-1} \begin{bmatrix} S_{k+1} - S_1 \\ S_{k+2} - S_2 \\ \vdots \\ S_{k+N'} - S_{N'} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot k^2$$

$$= \frac{\sigma_0^2 k^2}{\sum_{i=1}^{N'} (S_{k+i} - S_i)^2}$$

将其分母展开,得:

$$\text{Var}\{\hat{x}_0\} = \frac{\sigma_0^2 k^2}{\sum_{i=1}^{N'} (S_i^2 + S_{k+i}^2 - 2S_i S_{k+i})} = \frac{\sigma_0^2 k^2}{N' (ES_i^2 + ES_{i+k}^2 - 2ES_i S_{i+k})}$$

$$= \frac{\sigma_0^2 k^2}{2N' \sigma_s^2 [1 - R(k)]}, \quad (5)$$

式中  $\sigma_s^2 = E[S_i - ES_i]^2$  为信号方差,  $R(x)$  为归一化的图象自相关函数,  $\text{Var}\{\hat{x}_0\}$  的单位是象元间隔的平方。式(5)给出了估值误差方差和象点数、信噪比以及图象特性、差分步长的定量关系。从式(5)可以看出,当信噪比、象点数确定后,估值的绝对误差方差与  $k^2/1-R(k)$  因子成正比,而相对误差方差当图象位移接近  $k$  时近似正比于  $1/1-R(k)$ 。据此,当  $N' = 1000$ 、 $\frac{\sigma_s}{\sigma_0} = 20$ 、 $k = 2$ 、 $R(2) = 0.95$  时,  $\text{Var}\{\hat{x}_0\} = 1 \times 10^{-4}$ 。均方差为  $1 \times 10^{-2}$ , 但实际测量数据均方差为  $6 \times 10^{-2}$ 。文献[1]、[3]分别用  $248 \times 217$  和  $100 \times 100$  象元的二维图象进行运算,精度也仅为 10%,理论和实验的差距说明统计本身和图象之间还有更复杂的关系。

在估值算法的推导中曾作了线性近似的假设,即假设差分步长范围内图象灰度变化是线性的,作这种假设是为了避免推导过于复杂,但从统计角度来看,这实际是假设图象自相关函数在近零点区域是线性的。理论和实验都可以证明,图象的自相关函数通常是非线性的,而且近零点区域是其非线性最明显的区域,线性近似的误差不可忽略。进行简单的推导即可得出图象统计特性和估值公式之间的关系。

设参考图象和瞬时图象之间存在  $x_0$  长度的位移,  $0 \leq x_0 \leq k$ 。由式(2)可得估计值

$$\hat{x}_0 = k \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N'} (S_i - S_{i+k})(S_i - S'_i)}{\sum_{i=1}^{N'} (S_i - S_{i+k})^2} = k \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N'} S_i^2 + \sum_{i=1}^{N'} S_{i+k} S'_i - \sum_{i=1}^{N'} S_i S_{i+k} - \sum_{i=1}^{N'} S_i S'_i}{\sum_{i=1}^{N'} S_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N'} S_i S_{i+k} + \sum_{i=1}^{N'} S_{i+k}^2}. \quad (6)$$

根据图象弱平移假设,子样的算术平均值可作为主体的数学期望的估计量,即用  $E$  代替  $\frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N'}$ , 可得

$$\hat{x}_0 = k \cdot \frac{ES_i^2 + ES_{i+k} S'_i - ES_i S_{i+k} - ES_i S'_i}{ES_i^2 - 2ES_i S_{i+k} + ES_{i+k}^2},$$

再由图象弱平稳假设 ( $ES_i^2 = ES_{i+k}^2$ ), 可得:

$$\hat{x}_0 = \frac{k}{2} \cdot \left( 1 + \frac{ES_{i+k} S'_i - ES_i S'_i}{ES_i^2 - ES_i S_{i+k}} \right). \quad (7)$$

设  $S$  和  $S'$  之间仅有平移,无比例变化,且图象信噪比足够高,这时  $S'_i \doteq S_{i+x_0}$ , 代入式(7),得

$$\hat{x}_0 = \frac{k}{2} \cdot \left( 1 + \frac{ES_{i+k}S_{i+x_0} - ES_iS_{i+x_0}}{ES_i^2 - ES_iS_{i+k}} \right) \quad (8)$$

式(8)经归一化,可得:

$$\hat{x}_0 = \frac{k}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{R(k-x_0) - R(x_0)}{1 - R(k)} \right] \quad (9)$$

式(9)即是估值和图象特性的函数关系。由式(9)可以看出:(1)估值曲线由采样时的图象自相关函数唯一确定。(2)估值的线性度依赖于差分步长范围内图象相关函数的线性度。(3)式(6)有三个线性不变点,即估值曲线通过 $(0, 0)$ 、 $(\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$ 、 $(k, k)$ 。

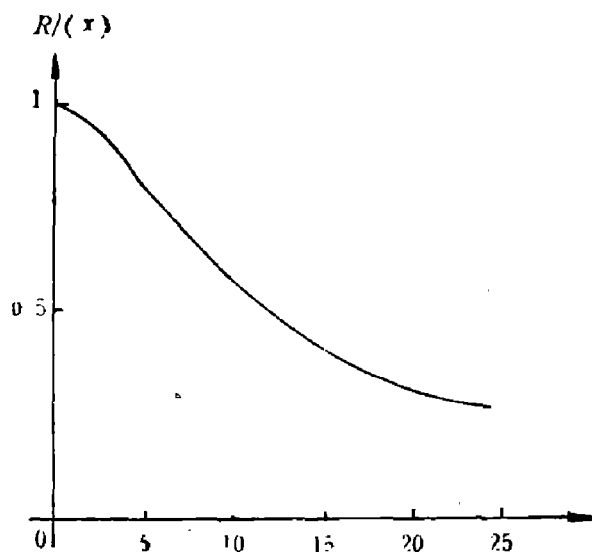


图2 图象自相关函数

Fig. 2 Self-correlation function of the image

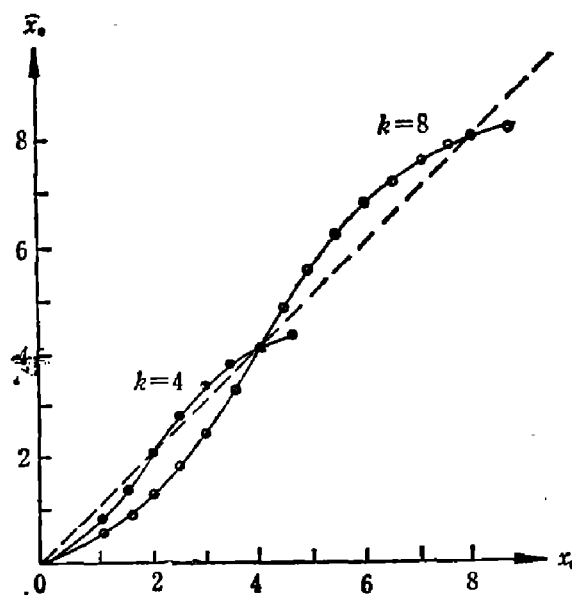


图3 实验测量曲线

Fig. 3 The measured result

实验测得某航摄照片的图象自相关函数如图2,对应测得的估值曲线如图3,与理论分析结果完全一致。估值和图象特性之间的这种非线性关系正是引起估值误差的主要原因。实际图象总是非平稳的,这种非平稳将引起估值曲线的变化,反映到估值结果中就是误差方差增加。笔者对不同表观的图片做了大量试验,当 $k=1$ 或 $k=2$ 时,算法本身的这种非线性引起的误差约为5~15%。当 $k>2$ 时,相对误差变化不大。

由上面的分析,可知算法误差主要由两部分组成,一部分是噪声引入的统计误差,另一部分是因算法本身对图象敏感而产生的非线性误差。增加样点数或信噪比可有效地减小前者,而后者则无法用变动参数的简单办法减小,只有改进算法。下面介绍两种提高精度的方法。

### 三、预测插值法数据修正

使用这种方法的主要依据是:(1)原算法的估值曲线由采样时的图象特性确定。(2)实验证实,对于一般的图象过程,虽然在大范围内显示出非平稳性,但在小范围内(比如相关长度以内)的统计特性变化是很小的。(3)当位移接近差分步长 $k$ 时,估值数据的相对误差(由噪声引起的部分)正比于 $1/1-R(k)$ 因子,根据对一般图象的分析,可知适当增加 $k$ 时,这

种误差将显著减小。

据此，即可采用以下步骤提高测量精度：(1)用式(6)算出位移估值 $\hat{x}_0$ 。(2)将当时已存入计算机的参考图象用程序平移1、2、...、 $k-1$ 象元作为瞬时图象，用式(6)算出相应的 $\hat{x}'_{01}$ 、 $\hat{x}'_{02}$ ... $\hat{x}'_{0k-1}$ ，这些点即是当前估值曲线上对应于整数象元的点。(3)以0、 $\hat{x}'_{01}$ 、 $\hat{x}'_{02}$ ... $\hat{x}'_{0k-1}$ 、 $k$ 点为插值点进行内插运算，求得内插函数 $F(x_0)$ ，这就是当前估值曲线的预测。(4)令 $F(x_0) = \hat{x}_0$ ，求解得到位移值 $x_0$ 。

$x_0$ 即是消除了非线性误差的无偏的估计值。很明显，这种方法降低了对图象特性的要求，仅要求在差分步长范围内图象自相关函数可用内插函数逼近，且方程 $F(x_0) = \hat{x}_0$ 具有唯一解。实际上绝大多数图象都能满足这种要求。利用已知的估值曲线的对称性还能进一步减小计算量，可以只求出 $\hat{x}'_{01}$ 、 $\hat{x}'_{02}$ ... $\hat{x}'_{0(\frac{k}{2}-1)}$ ，然后加上0和 $\frac{k}{2}$ 点进行内插(参看图4)得到 $F^*(x_0)$ 。令

$$F(x_0) = \begin{cases} F^*(x_0) & 0 \leq x_0 \leq \frac{k}{2}, \\ k - F^*(k - x_0) & \frac{k}{2} < x_0 \leq k, \end{cases}$$

即得全部曲线的内插函数。使用这种方法在附录2中描述的实验系统上测得的一组数据如表1。

表1 预测校正法实验结果

Table 1 The experimental result of the prediction-correction method  $x_{0c}$  displacement after correction

$x_0$	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00
$\hat{x}_0$	0.32	0.75	1.18	1.66	2.22	3.80	3.38	4.05	4.60	5.20	5.77	6.32	6.85	7.27	7.68	7.98
$x_{0c}$	0.53	0.97	1.48	1.99	2.54	3.02	3.49	4.05	4.55	5.00	5.54	6.02	6.55	6.98	7.52	7.98

根据表1作出的误差曲线如图5。这组数据是随机单次测量得到的，没加任何平均或选择，它足以说明这种方法是成功的。数据的均方差为0.03象元，测量参数为 $k=8$ 、 $N'=1016$ 、 $\sigma_0^2=4$ 、 $\sigma_s^2=700$ ，实验所用图象 $R(8)$ 的平均值为0.65。将这组数据代入式(5)，可得理论误差： $\text{Var}\{\hat{x}_0\}=5.12 \times 10^{-4}$ ，均方根值为0.02。考虑到实验中其它噪声的影响，如气流扰动、运动平台抖动等，实际精度和理论值可以认为是相当接近的。

对于某一实际系统，象元数往往是确定的，信噪比也可控制在一定的范围内，这时，差分步长 $k$ 的选取则直接影响测量的相对精度。前边已经讨论过，当图象位移接近 $k$ 时(这可用改变采样时间间隔或光学系统放大率来实现)，相对误差与 $1-R(k)$ 因子成反比。而一般图象的自相关函数在相关长度内总是递减的，也就是说增加 $k$ 可提高相对精度，同时扩大

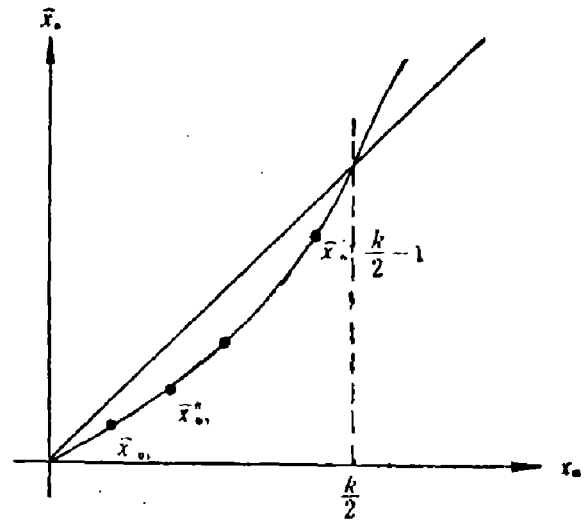


图4 预测内插图解

Fig. 4 Demonstration of prediction-interpolation

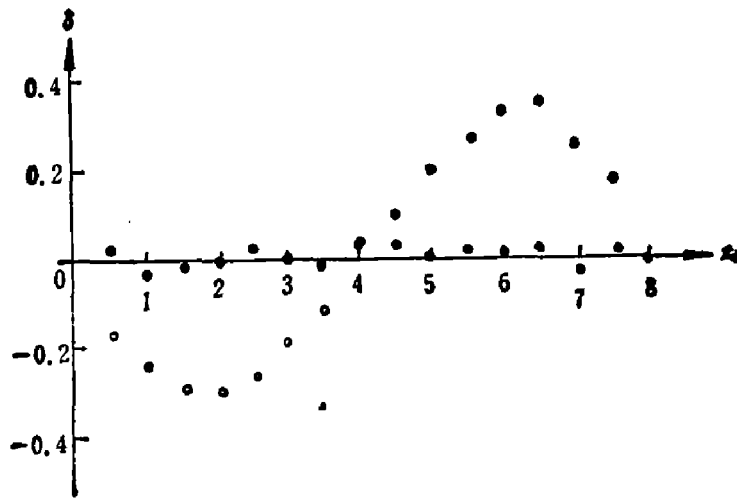


图5 预测校正方法实验结果

○: 校正前; ●: 校正后

Fig. 5 The experimental result of the prediction-correction method

○: before correction; ●: after correction

测量范围,但  $k$  增加时计算量也随之增加。实验表明选择  $k$  值使  $R(k)$  在  $0.5 \sim 0.7$  之间对于自相关函数近似高斯函数的图象是合适的。

预测法的精度有很大提高,但计算量增加了  $\left(\frac{k}{2} - 2\right)$  倍,计算过程也复杂化了。这种方法适用于一些对测量速度要求不太高的情况。

#### 四、补偿算法

由理论和实验结果的分析,得出两点算法依据:(1)原算法测量曲线有良好的对称性。(2)改变差分相对起点和终点可使测量曲线平移。例如,公式

$$\hat{x}_0 = k \cdot \frac{\sum (S_{i+\frac{k}{2}} - S_{i-\frac{k}{2}})(S'_i - S_i)}{\sum (S_{i+\frac{k}{2}} - S_{i-\frac{k}{2}})^2} \quad (10)$$

对应图6中的曲线;公式

$$\hat{x}_2 = k \cdot \frac{\sum (S_{i+k} - S_i)(S'_i - S_i)}{\sum (S_{i+k} - S_i)^2} \quad (11)$$

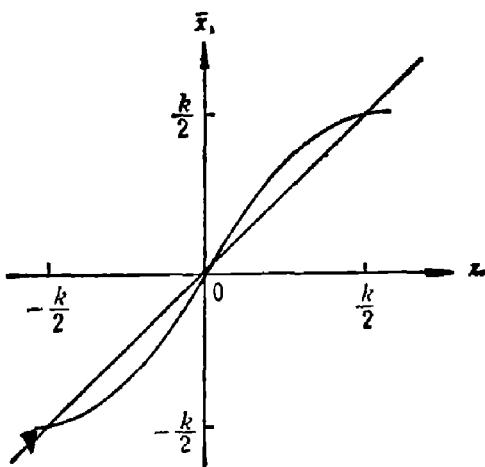


图6 对应式(10)的曲线

Fig. 6 The curve with respect to Eq. (10)

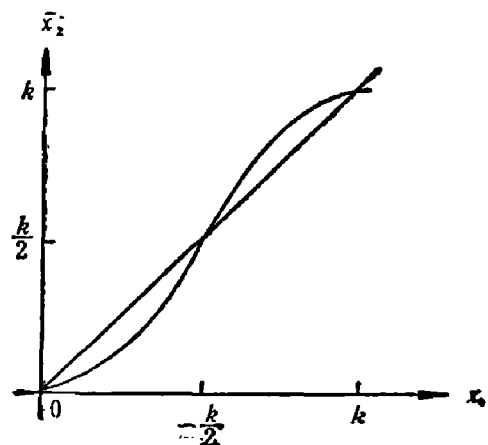


图7 对应式(11)的曲线

Fig. 7 The curve with respect to Eq. (11)

对应图 7 中的曲线。设图象有一位移  $x_0$  在  $0 \sim \frac{k}{2}$  之间, 由式(10)、(11)估算得到  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ 。令

$$\hat{x}_0 = \frac{(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)}{2},$$

$\hat{x}_0$  即为消除了大部分非线性误差的估值, 这种方法的精度优于 1%。将两个公式合并, 可得到更简单的形式:

$$\hat{x}_0 = \frac{k}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sum S'_i (S_{i+\frac{k}{2}} + S_{i+k} - S_{i-\frac{k}{2}} - S_i)}{\sum (S_i - S_{i+k})^2} \right]. \quad (12)$$

与式(6)相比, 式(12)仅增加了  $N'$  次加法。由于计算简单, 这种方法很容易用硬件实现。用类似的方法可组合成不同的公式用于测量不同范围内的位移, 甚至可用更高阶的组合进一步减小非线性误差。当数据测量实时性要求较高时, 这种方法是适用的。

## 五、结 束 语

以上通过对差分法的理论分析和实验, 找出了差分法估值和图象统计特性的联系, 并据此提出了两种校正原算法非线性的方法。经改进的算法测量范围大, 精度高, 对图象要求降低, 其综合性能有相当大的提高。由于篇幅所限, 本文主要讨论一维图象及计算, 所得结论可推广到二维, 所用的图象也可以是广义的, 如高度图等, 这对于图象跟踪及配准、地速度测量等方面的研究具有一定的理论意义和实用价值。

## 附 录

### I 对称差分统计特性证明

对于差分估值公式

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_0 &= (FB - GA) / (F^2 - GC) \cdot k, \\ \hat{y}_0 &= (FA - BC) / (F^2 - GC) \cdot k, \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

其近似公式是

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_0 &\doteq \frac{A}{C} \cdot k, \\ \hat{y}_0 &\doteq \frac{B}{G} \cdot k. \end{aligned} \right\} \quad (A2)$$

要证明它们在差分点对称选择条件下在统计意义上是等价的, 只要证明式中的  $F$  因子在此条件下的统计值为零即可。

对称差分象点的位置关系见图 8。由  $F$  的表达式(为简便, 用  $\Sigma$  表示  $\sum_{m=2}^M \sum_{n=1}^N$ )

$$F = \Sigma \frac{D_x(n, m) D_y(n, m)}{\sigma^2(n, m)},$$

沿用正文假设  $\sigma_0 = \sigma(n, m)$ , 可得:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma D_x(n, m) D_y(n, m) = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma [S_r(n + \frac{k}{2}, m) - S_r(n - \frac{k}{2}, m)] [S_r(n, m + \frac{k}{2}) - S_r(n, m - \frac{k}{2})] \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left\{ \Sigma S_r(n + \frac{k}{2}, m) S_r(n, m + \frac{k}{2}) - \Sigma S_r(n + \frac{k}{2}, m) S_r(n, m - \frac{k}{2}) \right. \\ &\quad \left. - \Sigma S_r(n - \frac{k}{2}, m) S_r(n, m + \frac{k}{2}) + \Sigma S_r(n - \frac{k}{2}, m) S_r(n, m - \frac{k}{2}) \right\}. \end{aligned}$$

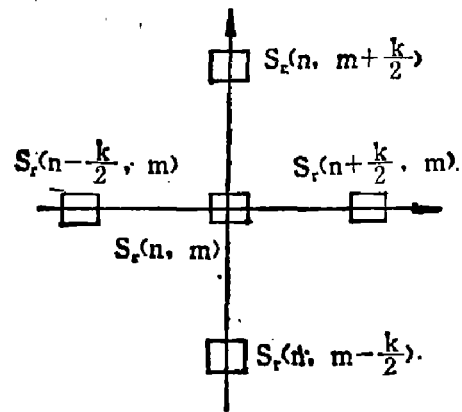


图 8 差分象点的位置

Fig. 8 The location of differential pixels

式中大括号内各项如除以总象元数  $M \cdot N$ , 就可看作是图象自相关函数  $R\left(n+\frac{k}{2}, m; n, m+\frac{k}{2}\right)$ ,  $R\left(n+\frac{k}{2}, m; n, m-\frac{k}{2}\right)$ ,  $R\left(n-\frac{k}{2}, m; n, m+\frac{k}{2}\right)$ ,  $R\left(n-\frac{k}{2}, m; n, m-\frac{k}{2}\right)$  的点估计值, 在图象自相关函数圆对称条件下, 这四点的值是相等的, 其估计值也应相等, 由此可得  $F=0$ 。这就证明了差分点对称选择时, 正文中式(1)和式(2)在统计意义上是等价的。

## II 实验装置

实验装置由 CCD 象机、CMC-80 单板机、运动平台及接口电路组成, 参见图 9。CCD 象机使用 1024 元线阵象感器; 接口电路是专门为本实验设计的高速同步 DMA 接口, 具有简单的指令控制功能; 运动平台由同步电机驱动, 移动速度连续可调, 平台上载有  $30 \times 30 \text{ cm}^2$  航空摄影照片, 系统模拟地面分辨率约为 4 m。

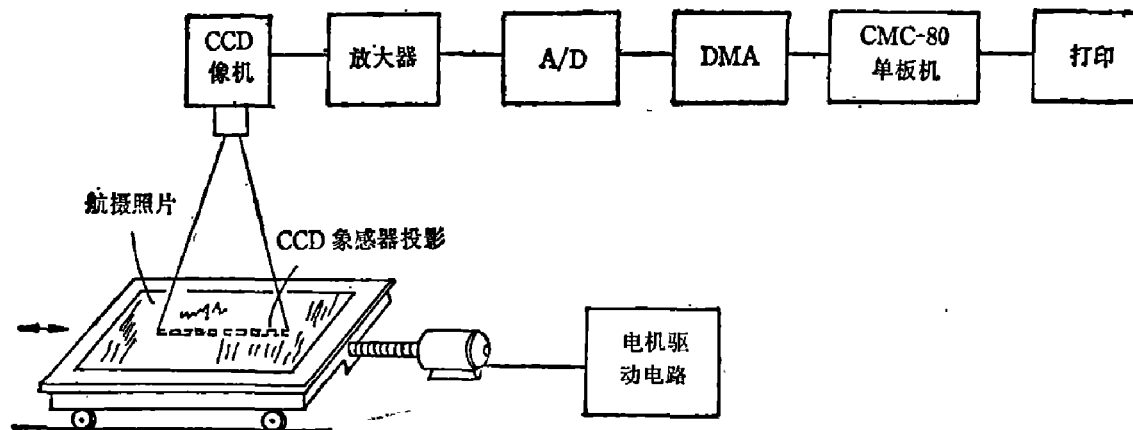


图 9 实验系统框图

Fig. 9 Block diagram of the experiment system

## 参 考 文 献

- [1] Limb J. O. and Murphy J. A., *IEEE Trans. Comm.*, **Com-23** (1975), 4: 474.
- [2] Sun Axelsson R. J., *On Optimum Algorithms for Image Tracking Systems Proceeding of EUSIPCO*, 1980.
- [3] Moshe Oron and Firschein O., *Opt. Eng.*, **21** (1982), 2: 370~375.
- [4] Giro Cafforio and Fabio Rocca, *IEEE Trans. Information Theory*, **IT-22** (1976), 5.
- [5] A. P. Sage and J. L. Melsa., *Estimation Theory with Applications to Communications and Control*, N. Y. Academic Press., 1971.

# THE IMPROVEMENT OF DIFFERENTIAL IMAGE TRACKING ALGORITHM

XU TIANNING

(Shanghai Institute of Technical Physics, Academia Sinica)

## ABSTRACT

The errors of a kind of image tracking algorithm, called differential algorithm, are analysed and the quantitative relations between image statistics, algorithm parameters and measurement accuracy are given. Based on the analyses, two methods which improve the algorithm performance a great deal are developed.