5 (1986), 4:247~256

红 外 研 究
Chin. J. Infrared Res.

黑体辐射中若干物理量的解析表示

戴显熹 王新德 徐新闻
(复旦大学物理系) (中国科学院上海技术物理研究所) (复旦大学物理系)

摘要——本文导出了波段光子出射度 $N_{0,\lambda}$、波段辐射出射度 $M_{0,\lambda}$ 的解析表达式。并证明了光子相对微分出射度 $K_{\Delta N}(\lambda, T)$ 和相对辐射微分出射度 $K_{\Delta m}(\lambda, T)$ 的严格关系式。这些表达式对于黑体辐射测量自动化、数值表的精密计算、误差的可靠估计、减少独立黑体辐射函数数目、包含辐射函数的方程的求解、编制精密的有关程序等都是有利的。

一、引 言

1900 年 Max Planck 发表了能量量子化假设与黑体辐射公式[1]。1964 年 M. A. Брамсон 出版了«热体红外辐射参考数据表»[2], 1984 年, 朱焕文等出版了«黑体辐射数据表»[3]。然而,随着测量与计量的精度与自动化程度的提高,数据表的运用受到许多限制:

(1) 数据表不可能过分庞大, 因而限制了计算精度。例如, 波段辐射出射度 $M_{0,\lambda}$ 的计算精度尽管可达 10^{-5},但其反函数不可能也具有如此高的精度。

(2) 难以将庞大的数据表无错误地存贮在计算机中。

(3) 物理数据表的计算值与数学表不同, 因为它依赖于物理常数。由于制表工作量巨大,物理用表不可能随时适应物理常数的调整与变化。

(4) 一般计算中运用辛普森积分方法, 由于参数不同, 积分区域变化多样, 精度不易控制。例如文献[3]中,虽然计算相当仔细详尽,但也难免个别数据上的紊乱。

对于任何一类数值计算, 有一个核心问题是保证它的精度。计算不当或误差的积累均可能导致精度的损失。为了克服这一系列困难, 人们有必要去设计精确度足够高而又简便的解析表达式来表示黑体辐射中的各类积分(我们称之为普朗克积分)。同时, 给出各种参量的严格的函数关系,各种表达式的适用范围以及误差的可靠估计。本文给出的表达式,取不到 7 项,即可保证误差小于 10^{-6}。

二、黑体辐射中若干重要关系

为了便于公式推导,将黑体辐射的若干重要关系作一简要的回顾[4]。

本文 1986 年 2 月 19 日收到。

由于麦克斯韦方程的线性性，辐射场可以看作理想的光子气体，单个光子的能量 ε 和动量 $\boldsymbol{p}$ 与频率 ν 及波矢 $\boldsymbol{k}$ 的关系为

$$\varepsilon=h\gamma=\hbar\omega=cp, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k},\ k=2\pi/\lambda。 \tag{2.2}$$

由于光子数不守恒，热平衡条件导致光子化学势为零，即 $\mu=0$。根据玻色分布，单粒子态上的光子平均填布数为

$$\bar{n}(\nu)=\frac{1}{e^{h\nu/KT}-1}。 \tag{2.3}$$

在体积 V 内，动量在 $P\to P+dP$ 范围内的光子状态数为

$$2.\frac{4\pi P^2dPV}{h^3}=\frac{8\pi V}{c^3}\nu^2d\nu, \tag{2.4}$$

因此频率在 $\nu\to\nu+d\nu$ 内光子能量密度为

$$\rho_\nu d\nu=\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3d\nu}{e^{h\nu/KT}-1}。 \tag{2.5}$$

黑体辐射场的自由能 F、吉布斯自由能 G、热力势 Ω 的关系为

$$\begin{aligned}F&=G-PV=-PV=\Omega\\&=KT\frac{8\pi V}{c^3}\int_0^\infty\nu^2\ln(1-e^{-h\nu/KT})d\nu\\&=-\frac{4\sigma}{3c}VT^4,\end{aligned} \tag{2.6}$$

式中 σ 为斯忒藩-玻耳兹曼常数。

熵 S、内能 E、比热 C_v、光压 P、总光子数 N 分别为

$$S=\frac{16\sigma}{3C}VT^3, \tag{2.7}$$

$$E=F+TS=\frac{4\sigma}{C}VT^4, \tag{2.8}$$

$$C_v=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=\frac{16\sigma}{C}VT^3, \tag{2.9}$$

$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=\frac{4\sigma}{3C}T^4, \tag{2.10}$$

$$N=\frac{8\pi V}{C^3}\frac{(KT)^3}{h^3}\Gamma(3)\zeta(3)。 \tag{2.11}$$

式(2.11)中 $\Gamma(z)$、$\zeta(z)$ 分别为欧拉 Γ-函数和黎曼 ζ 函数。

单色辐射出射度 m_ν 或 m_λ 为

$$m_\nu d\nu=\frac{C}{4}\rho_\nu d\nu=\frac{2\pi}{C^2}\frac{h\nu^3d\nu}{e^{h\nu/KT}-1}, \tag{2.12}$$

$$m_\lambda=\frac{2\pi hC^2}{\lambda^5(e^{ch/\lambda KT}-1)}。 \tag{2.13}$$

m_ν 和 m_λ 的极大值分别出现于 ν_m 和 λ_m 处，它们显然满足维恩位移定律：

$$\lambda_m=\frac{\alpha_0}{T}=\frac{2897.790327(\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K})}{T}。 \tag{2.14}$$

下文将直接引用以上这些重要的熟知结果。

三、波段光子出射度 $N_{0,\lambda}$, $R_n(x)$ 和 $R'_n(x)$

波长自 0 到 λ 的单位面积单位时间辐射光子数 $N_{0,\lambda}$ 为[3]

$$N_{0,\lambda}=\int_0^\lambda \frac{2\pi C\,d\lambda}{\lambda^4(e^{hC/\lambda KT}-1)}。\tag{3.1}$$

显然

$$N_{0,\infty}=\int_0^\infty \frac{2\pi C\,d\lambda}{\lambda^4(e^{hC/\lambda KT}-1)}=\frac{4\pi}{C^2}\frac{K^3}{h^3}\zeta(3)T^3\equiv\alpha T^3,\tag{3.2}$$

$$\zeta(3)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^3}=1.20205690\cdots。\tag{3.3}$$

相对光子出射度 $K_N(\lambda T)$ 的定义为[3]

$$K_N(\lambda T)=\frac{N_{0,\lambda}}{N_{0,\infty}}=\frac{\int_0^\lambda \lambda^{-4}(e^{Ch/\lambda KT}-1)^{-1}d\lambda}{\int_0^\infty \lambda^{-4}(e^{Ch/\lambda KT}-1)^{-1}d\lambda}。\tag{3.4}$$

引入无量纲参数 $x=\frac{h\nu}{KT}=\frac{Ch}{\lambda KT}$，获得一个标度律

$$N_{0,\lambda}=\alpha T^3R_n(x),\tag{3.5}$$

$$R_n(x)\equiv K_N(\lambda T)=1-\frac{1}{2\zeta(3)}\int_0^x\frac{\xi^2 d\xi}{e^\xi-1},\tag{3.6}$$

$$R'_n(x)=\frac{N_{\lambda,\infty}}{N_{0,\infty}}=\frac{1}{2\zeta(3)}\int_0^x\frac{\xi^2 d\xi}{e^\xi-1}。\tag{3.7}$$

只要算出 $R_n(x)$、$R'_n(x)$，仅需初等运算，即可获得各种 T、λ 下的 $N_{0,\lambda}$ 和 $N_{\lambda,\infty}$。这样，出现了下列形式的积分，即普朗克积分：

$$\int_0^x\frac{\xi^\alpha d\xi}{e^\xi-1}=\int_0^x\xi^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)\xi}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\cdot\gamma[\alpha+1,\ (n+1)x],\tag{3.8}$$

式中 $\gamma[y,\ z]$ 为不完全 Γ 函数，其定义为[5,6]

$$\gamma[y,\ z]=\int_0^z e^{-t}t^{y-1}dt\ (\mathrm{Re}\ y>0)。\tag{3.9}$$

当 y 为整数时，$\gamma(y,\ z)$ 恰好是初等函数，

$$\gamma(y,\ z)=(y-1)!\left[1-e^{-z}\sum_{m=0}^{y-1}\left(\frac{z^m}{m!}\right)\right]。\tag{3.10}$$

所以，

$$\int_0^x\frac{\xi^2 d\xi}{e^\xi-1}=2!\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x}\left[\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{x}{(n+1)^2}+\frac{x^2/2}{(n+1)}\right]\right\}。\tag{3.11}$$

收敛最慢的下列级数可以严格求和，并为初等函数：

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x}\frac{1}{(n+1)}=\frac{x^2}{2}\ln[1-e^{-x}],\\&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}=\zeta(3)。\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

由此得到光子相对出射度 $R'_n(x)$ 和 $R_n(x)$ 的表达式：

$$R'_n(x)=1+\frac{1}{2\zeta(3)}\left\{x^2\ln(1-e^{-x})-2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x}\left[\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{x}{(n+1)^2}\right]\right\},\tag{3.13}$$

$$R_n(x)=\frac{1}{2\zeta(3)}\left\{-x^2\ln(1-e^{-x})+2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x}\left[\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{x}{(n+1)^2}\right]\right\}。\tag{3.14}$$

取 N 项时，$R_n(x)$、$R_n'(x)$ 对应的余项为

$$r_n(N,\ x)\equiv r_n'(N,\ x)=\frac{1}{\zeta(3)}\sum_{n=N+1}^{\infty}e^{-(n+1)x}\left[\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{x}{(n+1)^2}\right],\tag{3.15}$$

绝对误差(余项)的估计在数值计算中是非常重要的，不难获得 $r_n(N,\ x)$ 等的一个有用估计式：

$$r_n(N,\ x)\leqslant\frac{1}{\zeta(3)}e^{-(N+2)x}\left[\frac{1}{(N+2)^3}+\frac{x}{(N+2)^2}\right]\frac{1}{1-e^{-x}}。\tag{3.16}$$

$R_n(x)$、$R_n'(x)$ 的下界估计为

$$R_n(x)>\frac{1}{2\zeta(3)}\{-x^2\ln(1-e^{-x})+2e^{-x}(1+x)\},\tag{3.17}$$

$$R_n'(x)>1+\frac{1}{2\zeta(3)}\left\{x^2\ln(1-e^{-x})-2(1+x)\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right\}。\tag{3.18}$$

相对误差的表达式为

$$\eta(R_n,\ N,\ x)<\frac{e^{-(N+2)x}\left[\frac{1}{(N+2)^3}+\frac{x}{(N+2)^2}\right]}{2\{-x^2\ln(1-e^{-x})+2e^{-x}(1+x)\}(1-e^{-x})},\tag{3.19}$$

$$\eta(R_n',\ N,\ x)<\frac{2e^{-(N+2)x}\left[\frac{1}{(2+N)^3}+\frac{x}{(N+2)^2}\right]}{\left\{2\zeta(3)+\left[x^2\ln(1-e^{-x})-2(1+x)\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right]\right\}(1-e^{-x})}。\tag{3.20}$$

通过以上表达式可证明：

(1) 式(3.13)、(3.14)取 7 项，在 $x\geqslant2$ 时，即可保证 10^{-6} 的精确度。

(2) 当 $x>10$ 时，精确到 10^{-8}，可取

$$R_n'(x)=1+\frac{-1}{\zeta(3)}\left\{1+x+\frac{x^2}{2}\right\}e^{-x}。\tag{3.21}$$

当 $x>20$ 时，准确到 10^{-8}(式(3.21)可准确到 10^{-16})，有：

$$R_n(x)=+\frac{1}{\zeta(3)}\left\{1+x+\frac{x^2}{2}\right\}e^{-x}。\tag{3.22}$$

对于小的 x 的情况，例如 $x\leqslant2$，我们考察另一类展开式。利用伯努利多项式 $B_n(x)$ 的母函数[6,7]：

$$\frac{e^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^{n-1}}{n!}\quad(0<|t|<2\pi),\tag{3.23}$$

其中 $B_n(x)$ 为伯努利多项式：

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_kx^{n-k}。\tag{3.24}$$

C_k^n 为组合数，B_k 为伯努利数。

$$\left.\begin{aligned}&B_n=B_n(0),\\&B_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\zeta(2n)\quad(n\geqslant0),\\&B_1=-\frac{1}{2},\\&B_{2n+1}=0\quad(n\neq0)。\end{aligned}\right\}\tag{3.25}$$

故普朗克积分为

$$\int_0^x \frac{\xi^\alpha d\xi}{e^\xi-1}=\int_0^x \xi^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \xi^{n-1} d\xi = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot \frac{x^n}{(n+\alpha)}。 \tag{3.26}$$

所以

$$R_n'(x)=\frac{1}{2\zeta(3)}\int_0^x \frac{\xi^2 d\xi}{e^\xi-1}=\frac{x^2}{2\zeta(3)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\cdot\frac{x^n}{(n+2)} \quad (0\leqslant x<2\pi)。 \tag{3.27}$$

其中 $|x|=2\pi$ 显然是由于 $\xi=2\pi i$ 是母函数的奇点。由阿培尔定理，收敛半径不大于 2π，代入伯努利数，得:

$$R_n'(x)=\frac{x^2}{2\zeta(3)}\Big[\frac{1}{2}-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{48}-\frac{x^4}{4320}+\frac{x^6}{241920}-\frac{x^8}{12096000} +1.7397297\times10^{-8}x^{10}-3.7744215\times10^{-11}x^{12}+\cdots\Big], \tag{3.28}$$

$$R_n(x)=1-R_n'(x)。 \tag{3.29}$$

现在来估计余项，显然应取 N 为偶数，有:

$$r_n(N,x)\equiv r_N'(N,x)=\frac{x^2}{2\zeta(3)}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\,\frac{x^n}{(n+2)} <\frac{x^2}{2\zeta(3)}\cdot\frac{B_{N+2}}{(N+2)!}\cdot\frac{x^{N+2}}{(N+4)}。 \tag{3.30}$$

利用递降交错级数的性质，获得 $R_n(x)$ 与 $R_n'(x)$ 的下界:

$$R_n(N,x)>1-\frac{x^2}{4\zeta(3)}, \tag{3.31}$$

$$R_n'(N,x)>\frac{x^2}{2\zeta(3)}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)。 \tag{3.32}$$

从而获得取 N 项时相对误差的估计式:

$$\eta(R_n,N,x)<\frac{x^2}{2\zeta(3)}\cdot\frac{B_{N+2}}{(N+2)!}\cdot\frac{x^{N+2}}{(N+4)}\Big/\Big[1-\frac{x^2}{4\zeta(3)}\Big], \tag{3.33}$$

$$\eta(R_n',N,x)<\frac{B_{N+2}}{(N+2)!}\,\frac{x^{N+2}}{(N+4)}\Big/\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)。 \tag{3.34}$$

由以上表达式不难证明，在 $x\leqslant2$ 时，式(3.28)、(3.29)只须取 7 项，即能保证 10^{-7} 的精度。它们与式(3.13)、(3.14)联立，就可以给出 $(0\leqslant x<\infty)$ 的 $R_n(x)$ 与 $R_n'(x)$ 的完整表达式。

四、光子的相对微分辐射出射度 $K_{\Delta N}(\lambda,T)$

有时我们需要讨论内插，需要考虑 $N_{0,\lambda}$ 的温度微商:

$$\Delta N_{0,\lambda}\equiv\frac{d}{dT}N_{0,\lambda}=3\alpha T^2R_n(x)-x\alpha T^2\frac{d}{dx}R_n(x), \tag{4.1}$$

式中

$$\frac{d}{dx}R_n(x)=-\frac{dR'(x)}{dx}=-\frac{1}{2\zeta(3)}\cdot\frac{x^2}{e^x-1}, \tag{4.2}$$

所以

$$\Delta N_{0,\lambda}=3\alpha T^2R_n(x)+\frac{\alpha T^3}{2\zeta(3)}\cdot\frac{x^3}{e^x-1}。 \tag{4.3}$$

光子的相对微分辐射出射度 $K_{\Delta N}(\lambda T)$ 的定义为

$$K_{\Delta N}(\lambda T)=\frac{\Delta N_{0,\lambda}}{\Delta N_{0,\infty}}=\frac{1}{3\alpha T^2}\int_0^\lambda\frac{\partial}{\partial T}\left[2\pi C\lambda^{-4}\left(e^{\frac{hC}{\lambda KT}}-1\right)^{-1}\right]d\lambda, \tag{4.4}$$

利用式(4.3),有:

$$K_{\Delta N}(\lambda T)=R_n(x)+\frac{1}{6\zeta(3)}\cdot\frac{x^3}{e^x-1}。\tag{4.5}$$

这说明 $K_{\Delta N}(\lambda,\ T)$ 可以用 $R_n(x)$ 通过初等函数表示。

将 $N_{0,\lambda}(T)$ 用 T 的幂级数展开作出插计算时,高阶微商均含有 $R_n(x)$,实际上,相当的计算工作量是对 αT^3 作级数展开,这是不必要的。我们利用"$R_n(x)$ 的各阶微商均为初等函数"这一事实,则有:

$$N_{0,\lambda}(T_2)=\alpha T_2^3R_n(x_2)=\alpha T_2^3\left[R_n(x_1)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^m R_n(x)}{m!}\bigg|_{x=x_1}(x_2-x_1)^m\right]。\tag{4.6}$$

知道 $R_n(x_1)$,经过初等运算,即可得 $N_{0,\lambda}(T_2)$。

五、波段辐射出射度$M_{0,\lambda}$及其相对出射度$K_M(\lambda,T)$

黑体辐射中常要测量波长从0到λ的的辐射通量密度 $M_{0,\lambda}$,其定义为

$$M_{0,\lambda}\equiv\int_0^{\lambda}m_{\lambda}d\lambda。\tag{5.1}$$

由(2.13)得到积分表达式[3]

$$M_{0,\lambda}=2\pi hC^2\int_0^{\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda^5(e^{hC/\lambda KT}-1)}。\tag{5.2}$$

改用频率 ν 作积分变量,式(5.2)可简化为

$$M_{0,\lambda}=\frac{2\pi h}{C^2}\int_{\nu}^{\infty}\frac{\nu^3d\nu}{e^{h\nu/KT}-1}。\tag{5.3}$$

故有斯忒潘-玻耳兹曼定律:

$$M_{0,\infty}=\sigma T^4。\tag{5.4}$$

相对辐射出射度 $K_M(\lambda T)$ 的定义为[3]

$$K_M(\lambda T)\equiv\frac{M_{0,\lambda}}{M_{0,\infty}}=\frac{\int_0^{\lambda}C_1\lambda^{-5}(e^{C_2/\lambda T}-1)^{-1}d\lambda}{\int_0^{\infty}C_1\lambda^{-5}(e^{C_2/\lambda T}-1)^{-1}d\lambda}。\tag{5.5}$$

引入无量纲量 $x=\frac{h\nu}{KT}=\frac{hC}{\lambda KT}$ 不难看出存在一个标度律

$$M_{0,\lambda}=\sigma T^4\left[1-\frac{15}{\pi^4}\int_0^x\frac{\xi^3d\xi}{e^{\xi}-1}\right]=\sigma T^4R_m(x)。\tag{5.6}$$

所以,有:

$$R_m(x)\equiv K_m(\lambda T)=1-\frac{15}{\pi^4}\int_0^x\frac{\xi^3d\xi}{e^{\xi}-1},\tag{5.7}$$

$$M_{\lambda,\infty}=\sigma T^4R'_m(x),\tag{5.8}$$

$$R'_m(x)=\frac{15}{\pi^4}\int_0^x\frac{\xi^3d\xi}{e^{\xi}-1}=1-R_m(x)。\tag{5.9}$$

仿照第三节,利用不完全 $\gamma(\alpha,\ z)$ 函数的性质,得到:

$$R_m(x)=\frac{15}{\pi^4}\left\{-x^3\ln(1-e^{-x})+3\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x}\left[\frac{2}{(n+1)^4}+\frac{2x}{(n+1)^3}+\frac{x^2}{(n+1)^2}\right]\right\},\tag{5.10}$$

$$R'_m(x)=1+\frac{15}{\pi^4}\left\{x^3\ln(1-e^{-x})-3\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x}\left[\frac{2}{(n+1)^4}+\frac{2x}{(n+1)^3}+\frac{x^2}{(n+1)^2}\right]\right\}。\tag{5.11}$$

它们的余项为

$$\begin{aligned}r_m(N,x)&\equiv r'_m(N,x)\\&=3\,\frac{15}{\pi^4}\sum_{n=N+1}^{\infty}e^{-(n+1)x}\left[\frac{2}{(n+1)^4}+\frac{2x}{(n+1)^3}+\frac{x^2}{(n+1)^2}\right]\\&<3\left(\frac{15}{\pi^4}\right)e^{-(N+2)x}\left[\frac{2}{(N+1)^4}+\frac{2x}{(N+1)^3}+\frac{x^2}{(N+1)^2}\right]\Big/(1-e^{-x})。\end{aligned}\tag{5.12}$$

为了计算相对误差,必须仔细地估计 $R_m(x)$ 和 $R_n(x)$ 的下界:

$$R_m(x)>\frac{15}{\pi^4}\{-x^3\ln(1-e^{-x})+3(2+2x+x^2)e^{-x}\},\tag{5.13}$$

$$R'_m(x)>1+\frac{15}{\pi^4}\left\{x^3\ln(1-e^{-x})-3(2+2x+x^2)\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right\}。\tag{5.14}$$

从而获得相对精度的表示式:

$$\eta(R_m,N,x)\equiv\frac{r_m(N,x)}{R_m(x)}<\frac{3e^{-(N+2)x}\left[\frac{2}{(N+2)^4}+\frac{2x}{(N+2)^3}+\frac{x^2}{(N+2)^2}\right]}{\{-x^3\ln(1-e^{-x})+3e^{-x}(2+2x+x^2)\}(1-e^{-x})},\tag{5.15}$$

$$\eta(R'_m,N,x)\equiv\frac{r'_m(N,x)}{R_m(x)}<\frac{\frac{45}{\pi^4}e^{-(N+2)x}\left[\frac{2}{(N+2)^4}+\frac{2x}{(N+2)^3}+\frac{x^2}{(N+2)^2}\right]}{\left\{1+\frac{15}{\pi^4}\left[x^3\ln(1-e^{-x})-3(2+2x+x^2)\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right\}(1-e^{-x})}。\tag{5.16}$$

由这些相对精度表达式可以证明:

(1) 当 $x\geqslant2$ 时,取 7 项,$R'_m(x)$ 和 $R_m(x)$ 就均可保证 10^{-6} 的精度。

(2) 当要求之精度为 10^{-8} 时,如 $x>10$,则:

$$\left.\begin{aligned}R'_m(x)&\doteq1-\frac{15}{\pi^4}\{6+6x+3x^2+x^3\}e^{-x},\\R_m(x)&\doteq\frac{15}{\pi^4}\left\{(6+6x+3x^2+x^3)e^{-x}+\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{2}\right)e^{-2x}\right\}。\end{aligned}\right\}\tag{5.17}$$

如 $x>20$,则

$$\left.\begin{aligned}R'_m(x)&\doteq1\\R_m(x)&\doteq\frac{15}{\pi^4}\{(6+6x+3x^2+x^3)e^{-x}\}。\end{aligned}\right\}\tag{5.18}$$

对于小 x 的情况,例如 $x\leqslant2$,我们将利用伯努利多项式的母函数及第三节中的处理方法,得到

$$R'_m(x)=\frac{15}{\pi^4}x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{x^n}{(n+3)}。\tag{5.19}$$

展开式前面几项可以写为

$$\begin{aligned}R'_m(x)=\frac{15}{\pi^4}x^3\Big[&\frac{1}{3}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{60}-\frac{x^4}{5040}+\frac{x^6}{272160}\\&-\frac{x^8}{13305600}+1.6059044\times10^{-9}x^{10}+\cdots\Big],\end{aligned}\tag{5.20}$$

$$R_m(x)=1-\frac{15}{\pi^4}x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{x^n}{(n+3)}。\tag{5.21}$$

利用递降交错级数的特点，估计余项：

$$r_m(N,\ x)\equiv r'_m(N,\ x)=\frac{15}{\pi^4}x^3\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{x^n}{(n+3)}\right|$$

$$<\frac{15}{\pi^4}x^3\frac{|B_{N+2}|}{(N+2)!}\cdot\frac{x^{N+2}}{(N+5)}。\tag{5.22}$$

$R_m(x)$ 和 $R'_m(x)$ 的下界即为

$$R_m(x)>1-\frac{15}{\pi^4}\frac{x^3}{3}=1-\frac{5x^3}{\pi^4},\tag{5.23}$$

$$R'_m(x)>\frac{15}{\pi^4}x^3\left[\frac{1}{3}-\frac{x}{8}\right]。\tag{5.24}$$

相对误差的表达式为

$$\eta(R_m,\ N,\ x)<\frac{15}{\pi^4}x^3\frac{|B_{N+2}|}{(N+2)!}\frac{x^{N+2}}{(N+5)}\bigg/\left(1-\frac{5x^3}{\pi^4}\right),\tag{5.25}$$

$$\eta(R'_m,\ N,\ x)<\frac{|B_{N+2}|}{(N+2)!}\cdot\frac{x^{N+2}}{(N+5)}\bigg/\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{8}\right)。\tag{5.26}$$

根据这些相对误差表达式，不难证明，当 $x\leqslant 2$，令式(5.20)、(5.21)取 7 项(即 $N=10$)，则有

$$\eta(R_m,\ N,\ x)<1.8\times10^{-7},\tag{5.27}$$

$$\eta(R'_m,\ N,\ x)<1.7\times10^{-6}。\tag{5.28}$$

在高温、长波区，例如 $x\leqslant 0.1$ 时，

$$\left.\begin{aligned}&M_{0,\lambda}\doteq\sigma T^4\left[1-\frac{5x^3}{\pi^4}\right],\\&\eta(R_m)<2\times10^{-6}。\end{aligned}\right\}\tag{5.29}$$

六、相对微分辐射出射度 $K_{\Delta M}(\lambda, T)$

$\Delta M_{0,\infty}$ 的定义是 $M_{0,\infty}$ 的温度微商[3]：

$$\Delta M_{0,\infty}=\frac{d}{dT}M_{0,\infty}=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{C_1}{\lambda^5(e^{C_2/\lambda T}-1)}\right]d\lambda=4\sigma T^3,\tag{6.1}$$

$$\Delta M_{0,\lambda}=\frac{d}{dT}M_{0,\lambda}=\int_0^{\lambda}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{C_1}{\lambda^5(e^{C_2/\lambda T}-1)}\right]d\lambda$$

$$=\frac{C_1C_2}{T^2}\int_0^{\lambda}\frac{e^{C_2/\lambda T}}{\lambda^6(e^{C_2/\lambda T}-1)^2}d\lambda。\tag{6.2}$$

相对微分辐射出射度 $K_{\Delta M}(\lambda,\ T)$ 的定义为

$$K_{\Delta M}(\lambda T)=\Delta M_{0,\lambda}/\Delta M_{0,\infty}=\frac{C_1C_2}{4\sigma}\int_0^{\lambda T}\frac{e^{C_2/y}}{y^6(e^{C_2/y}-1)^2}dy。\tag{6.3}$$

式(6.2)、(6.3)较为复杂，它们与已知函数的关系不明显。我们由第五节中获得的标度律式(5.6)不难得到 $\Delta M_{0,\lambda}$ 的一个有用表达式：

$$\Delta M_{0,\lambda}=\frac{4}{T}M_{0,\lambda}+\frac{15}{\pi^4}\sigma T^4\frac{x^4}{e^x-1}。\tag{6.4}$$

这说明 $\Delta M_{0,\lambda}$ 与 $M_{0,\lambda}$ 只相差一个初等函数，因此，已知 $M_{0,\lambda}$ 后，只须加一个初等函数，就可以算出 $\Delta M_{0,\lambda}$，即文献[3]中的表 6(P221～247)。

利用式(5.6)。还可以得到相对微分辐射出射度 $K_{\Delta M}(\lambda T)$ 的一个严格表达式:

$$K_{\Delta M}(\lambda, T)=R_m(x)+\frac{15}{4\pi^4}\frac{x^4}{e^x-1}。\tag{6.5}$$

代入式(5.10)或(5.11), 即得 $K_{\Delta M}(\lambda T)$ 的相应表示式。式(6.5)给出 $K_{\Delta M}(\lambda T)$ 与 $R_m(x)$ 的严格关系,表明它们只相差一个初等函数,因此算出 $R_m(x)$ 后,只须加上一个初等函数,即得出 $K_{\Delta M}(\lambda, T)$,即文献[3]中的表3(p19~23)。

由于 $\Delta M_{0,\lambda}$ 的各阶微商均不是初等函数,因此,从应用角度来看,作 $M_{0,\lambda}$ 函数高阶内插运算是不方便的。我们建议运用函数 $R_m(x)$,因为它的各阶导数全都是初等函数。根据式(5.6),有

$$M_{0,\lambda}(T_2)=\sigma T_2^4 R_m(x_2)=\sigma T_2^4\left[R_m(x_1)+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(x_2-x_1)^l}{l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l R_m(x)\Big|_{x=x_1}\right]。\tag{6.6}$$

七、结　语

本文通过详细的分析,得出以下结果:

(1) 微分辐射光子出射度 $\Delta N_{0,\lambda}$, $K_{\Delta N}(\lambda T)$ 与相对光子出射度 $R_n(x)$ 的关系式(4.3)、(4.5)、(4.6)。微分辐射出射度 $\Delta M_{0,\lambda}$, $K_{\Delta M}(\lambda T)$ 与相对出射度 $R_m(x)$ 的关系式(6.4)、(6.5)、(6.6)。

(2) 相对光子出射度 $R_n(x)$, $R_n'(x)$ 的级数表达式(3.13)、(3.14)、(3.27)、(3.38)、(3.29)及它们的相对精度的表达式(3.19)、(3.20)、(3.33)、(3.34)。相对辐射出射度 $R_m(x)$、$R_m'(x)$ 的级数表达式(5.10)、(5.11)、(5.19)、(5.20)、(5.21)及它们的相对精度的表达式(5.15)、(5.16)、(5.25)、(5.26)。并指出只须取7项即可保证 10^{-6} 的精度。

(3) 讨论了有关的标度律。

我们获得的这些关系式对于下列工作可能是有用的:精密地计算黑体辐射数据,核对数据表与编制数据表等;精密地可靠地估计误差;黑体辐射的自动化测试,编制简短、精密可靠的计算程序,求解包含黑体辐射函数的各种方程;减少独立的黑体辐射函数的数目。

(4) 我们用计算机进行了详细的数值计算,核对了这些理论公式。计算结果表明:计算速度显然比以往的公式快得多,计算速度可以快数倍至十倍,而且误差易于控制。在3600个数据计算中,凡与文献[3]中有数值表相对应的数值,在最高的 10^{-5} 精度下均一致。

参 考 文 献

[1] Planck M. and Deutsch Verh d., *Phys. Ges.*, **2** (1900), 202~204, 237~245.
[2] Брансон М. А., *Справочные Таблицы по Инфрасному Излучению Нагретых Тел*, 1964.
[3] 朱焕文等编,黑体辐射数据表,科学出版社,1984.
[4] 戴显熹,量子统计学,复旦大学讲义。
[5] Gradshteyn I. B. and Ryzik I. M., *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1980.
[6] 王竹溪、郭敦仁,特殊函数概论,科学出版社,1979.

THE ANALYTIC EXPRESSION OF SOME PHYSICAL QUANTITIES IN BLACK-BODY RADIATION

DAI XIANXI
(*Department of Physics, Fudan University*)

WANG XINDE
(*Shanghai Institute of Technical Physics, Academia Sinica*)

XU XINWENG
(*Department of Physics, Fudan University*)

ABSTRACT

The analytic expressions of the photon radiant exitance and the radiant exitance are derived. Two exact relations of the photon relative differential radiant exitance are given. All these expressions are useful for the automation of measurement, accurate calculation of datum table, reliable estimation of the errors, reduction of the number of independent special functions and for solution of some equations containing radiation functions and some relevant programmings in the blackbody radiation.