4(1985), 5:374~378

红 外 研 究
Chin. J. Infrared Res.

驻波场 Wiggler 自由电子激光器

雷仕湛

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

摘要——本文分析了以驻波辐射场作 Wiggler 的自由电子激光器的工作条件,计算了激光器的增益。

一、引　言

自由电子激光器的特点是可以通过改变相对论电子的能量或者改变 Wiggler 的空间周期长度,实现连续调谐激光器的输出波长,原则上可以获得从远红外至远紫外、甚至 X 射线波段的激光。产生的激光波长为[1]

$$\lambda_r = \frac{\lambda_w(1+K^2)^{-1}}{2\gamma^2}, \tag{1}$$

式中 K 是与 Wiggler 参数有关的常数; γ 是相对论因子,实质上是电子的能量与质能 m_0c^2 的比值; λ_w 是 Wiggler 的空间周期长度。由式 (1) 可以看出,要获得短波长的激光,需要使用能量很高的相对论电子束。最近有人企图利用自由电子激光器的工作原理实现在 X 射线波段的激光振荡[2],但在技术上将会遇到很大的困难。

获得短波长辐射的另外一条途径是使用周期长度 λ_w 尽可能短的 Wiggler。例如,使用能量为 54 MeV 的相对论电子束,如果 Wiggler 的空间周期长度取 10 μm,这种自由电子激光器的辐射波长将达到 X 射线波段。然而,要用普通的空间周期静磁场或静电场构成空间周期长度为微米量级的 Wiggler 是极不容易的。我们在这里提出使用由微波或激光辐射建立的驻波场作为 Wiggler,其空间周期长度可以达到微米量级,甚至更短。

二、基　本　方　程

假如 Wiggler 是由沿 z 方向周期变化的驻波辐射场建立的,驻波波长为 λ_w。这种 Wiggler 的磁场 $\boldsymbol{B}_w$ 和电场 $\boldsymbol{E}_w$ 分别为

$$\boldsymbol{B}_w = B_w[\hat{x}e^{-i(k_w z+\varphi_B)} - i\hat{y}e^{-i(k_w z+\varphi_B)}] + c.\ c., \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_w = E_w[\hat{x}e^{i(k_w z+\varphi_B)} - i\hat{y}e^{i(k_w z+\varphi_B)}] + c.\ c.。 \tag{3}$$

式中 B_w、E_w 是驻波的振幅, $k_w = 2\pi/\lambda_w$, φ_B 是初位相, $\hat{x}$、$\hat{y}$ 是沿横向坐标的单位矢。

本文 1985 年 2 月 13 日收到。本文在国际第八届激光会议上报告。

假如相对论电子束的横向线度足够小，可以略去 Wiggler 场和辐射场的横向变化，那么，Wiggler 的矢势 $\boldsymbol{A}_w$ 可以写成

$$\boldsymbol{A}_w=[A_w e^{-i(k_w z+\varphi_w)}+A_w e^{i(k_w z+\varphi_w)}]\hat{e}+c.c., \tag{4}$$

式中 A_w 是 Wiggler 场的矢势振幅，$\hat{e}=\hat{x}-i\hat{y}$。辐射场的矢势 $\boldsymbol{A}_r$ 可写为

$$\boldsymbol{A}_r=[A_r e^{i(k_r z-W_r t+\varphi_r)}+A_r e^{-i(k_r z-W_r t+\varphi_r)}\hat{e}+c.c., \tag{5}$$

式中 A_r 是辐射场的矢势振幅，$k_r=2\pi/\lambda_r$，λ_r 是辐射场的波长，ω_r 是辐射场的圆频率，φ_r 是辐射场的初位相。

相对论电子的哈密顿算符 H 为

$$H=c[(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+m_0c^2]^{\frac{1}{2}}=\gamma m_0c^2, \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是相对论电子的正则动量，m_0 是电子的静止质量，c 是光速。相对论电子的哈密顿算符的运动方程是：

$$\left.\begin{aligned} p_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\\ q_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}。\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 p_i 是相对论电子的正则动量的三个分量，q_i 是它的三个位置坐标。把式 (3)、(4) 代入式 (5)，由式 (7) 可以求得：

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=0,$$

$$\dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=0。$$

即横向正则动量是一个常量，由初始条件确定。如果假定相对论电子进入 Wiggler 的横向速度 $v_\perp=0$，那么这个常数可以取为零，即 $\boldsymbol{P}_\perp=0$。这表明，相对论电子的动力学横向动量 $\boldsymbol{P}_\perp$ 为

$$\boldsymbol{P}_\perp=-e\boldsymbol{A}=m_0c\gamma\boldsymbol{\beta}_\perp, \tag{8}$$

式中 $\boldsymbol{\beta}_\perp=\frac{\boldsymbol{v}_\perp}{c}$。由式 (8) 可以得到相对论电子横向单位速度矢量

$$\boldsymbol{\beta}_\perp=-\frac{e\boldsymbol{A}}{m_0c\gamma}。 \tag{9}$$

相对论电子在 Wiggler 中的运动状态由洛伦兹力运动方程描述：

$$\frac{d\gamma}{dt}=-\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\boldsymbol{\beta})=-\frac{e}{m_0c}[\boldsymbol{E}+c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}]。 \tag{11}$$

由式 (10)、(11) 可得：

$$\frac{d}{dt}(\gamma\beta_z)=\frac{d}{dt}\gamma, \tag{12}$$

式中 β_z 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的 Z 分量。对式(12)积分，得：

$$\gamma(1-\beta_z)=\gamma_0(1-\beta_{z0}), \tag{13}$$

式中 γ_0 是相对论电子进入 Wiggler 时的相对论因子，$\gamma_0=(1-\beta_{z0})^{-\frac{1}{2}}$；$\beta_{z0}=v_{z0}/c$，$v_{z0}$ 是相对论电子进入 Wiggler 时的纵向运动速度。由式(10)得：

$$\frac{d\gamma}{dt}=-\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{\beta}_\perp\cdot\boldsymbol{E}_\perp。\tag{14}$$

把式(9)代入式(14),得:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{e^2\gamma}{m_0c^2\gamma}\boldsymbol{A}_\perp\cdot\boldsymbol{E}_\perp。\tag{15}$$

把式(4)、(5)代入式(15),得:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{e^2\gamma}{m_0^2c^2\gamma}A_wE_r[\sin\theta+\cos\theta]。\tag{16}$$

式中 $\theta=(k_w-k_r)z+\omega_rt+\varphi_B-\varphi_r$。

从式(16)可以看出与采用空间周期静磁场 Wiggler 不同的是，相对论电子能量在频率共振点上、即在 $\theta=0$ 这一点上也有变化。对 θ 求时间 t 的全微分,得:

$$\dot\theta=(k_w-k_r)c\beta_z+\omega_r。\tag{17}$$

由此可以得出,只要相对论电子的纵向运动速度 v_z 满足

$$v_z<\frac{c(\omega_w+\omega_r)}{\omega_r},$$

那么，当相对论电子的运动与矢势之间的相位取 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$ 时，相对论电子即产生辐射。当相位取 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时,产生的辐射功率达到极大。

当 $\frac{5\pi}{4}<\theta<2\pi$ 或 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时，相对论电子被 Wiggler 场加速。而当 $\theta=\frac{7}{4}\pi$ 时，相对论电子吸收 Wiggler 场的能量达到极大。

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{5}{4}\pi$ 时,相对论电子既不发射辐射，也不吸收 Wiggler 场的能量，相对论电子的能量保持不变。

三、结果和讨论

考虑到相对论电子在 Wiggler 中的能量变化并不是很大，可以把相对论因子写成下面的多项式:

$$\gamma=\gamma_0+\delta\gamma_1+\delta\gamma_2+\cdots,\tag{18}$$

式中 $\delta\gamma_1$、$\delta\gamma_2\cdots$ 分别是 γ 的一级小量、二级小量……。根据式(13),相对论电子的纵向单位速度矢 β_z 可以近似地写成

$$\beta_z=1-\frac{\gamma_0}{\gamma}(1-\beta_{z0})\doteq\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}(1-\beta_{z0})+\beta_{z0}。\tag{19}$$

为了求得自由电子激光器的增益,下面我们先求一级小量 $\delta\gamma_1$。由式(16)得:

$$\delta\dot\gamma_1=\frac{e^2}{\gamma_0m_0c^2}A_wE_r[\sin(\theta_0+\theta_0')+\cos(\theta_0+\theta_0')],\tag{20}$$

式中
$$\theta_0=[(k_w-k_r)c\beta_{z0}+\omega_r]t,$$
$$\theta'_0=\varphi_B-\varphi_r。$$

对式(20)积分,得

$$\delta\gamma_1=\frac{e^2A_wE_r}{(k_w-k_r)c\beta_{z0}+\omega_r}[\sin\theta_0-\cos\theta_0-\sin\theta_0'+\cos\theta_0']。\tag{21}$$

由于 θ_0' 可以取任意值，在 $0\sim2\pi$ 范围内对 $\delta\gamma_1$ 求平均，得 $\langle\delta\gamma_1\rangle=0$。为了得到自由电子激光器的增益，还需要求二级小量 $\delta\gamma_2$。由式(16)可得：

$$\gamma_0\delta\dot{\gamma}_2=\frac{e^2}{m_0^2c^2}A_wE_r[\sin(\theta_0+\theta_0'+\delta\theta_0)+\cos(\theta_0+\theta_0'+\delta\theta_0)]-\gamma_0\delta\dot{\gamma}_1,\tag{22}$$

式中

$$\delta\theta_0=\frac{(k_w-k_r)c(1-\beta_{z0})\delta\gamma}{\gamma_0}t。$$

利用三角函数展开 $\sin(\theta_0+\theta_0'+\delta\theta_0)$ 和 $\cos(\theta_0+\theta_0'+\delta\theta_0)$，并考虑到 $\theta_0\gg\delta\theta_0$，

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\theta_0+\theta_0'+\delta\theta_0)\doteq\delta\theta_0\cos(\theta_0+\theta_0')+\sin(\theta_0+\theta_0'),\\&\cos(\theta_0+\theta_0'+\delta\theta_0)\doteq\cos(\theta_0+\theta_0')-\delta\theta_0\sin(\theta_0+\theta_0')。\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

把式 (20)、(21) 代入式 (22)，利用关系式 (23)，对时间 t 积分，并在 $0\sim2\pi$ 范围内对 θ_0' 求平均，求得：

$$\begin{aligned}\langle\delta\gamma_2\rangle=\mathscr{A}\{&\cos[(k_w-k_r)c\beta_{z0}+\omega_r]t\\&+[(k_w-k_r)c\beta_{z0}+\omega_r)]t\sin[(k_w-k_r)c\beta_{z0}+\omega_r]t-1\}。\end{aligned}\tag{24}$$

这里

$$\mathscr{A}=\left(\frac{e^2A_wE_r}{m_0^2c^2\gamma_0}\right)^2\frac{(k_w-k_r)c(1-\beta_{z0})}{[(k_w-k_r)c\beta_{z0}+\omega_r]^2}。\tag{25}$$

令 $\psi=[(k_w-k_r)c\beta_{z0}+\omega_r]t$，式(24)可简写成：

$$\langle\delta\gamma_2\rangle=\mathscr{A}[\cos\psi+\psi\sin\psi-1]。\tag{26}$$

自由电子激光器的辐射是由相对论电子的动能转换来的。假定电子束的通量密度为 n_e，那么，自由电子激光器的辐射通量密度 I_r 为

$$I_r=-\Delta\gamma m_0c^2n_e=-\langle\delta\gamma_2\rangle m_0c^2n_e。\tag{27}$$

将式 (26) 代入式 (27)，就得到自由电子激光器的辐射通量密度与 Wiggler 的参数关系：

$$I_r=-\mathscr{A}[\cos\psi+\psi\sin\psi-1]m_0c^2n_e。\tag{28}$$

入射辐射场的通量密度 I_0 为

$$I_0=\frac{c}{4\pi}E_0^2。\tag{29}$$

根据式 (28)、(29)，我们求得采用这种 Wiggler 场的自由电子激光器的增益系数

$$G=-\mathscr{A}4\pi m_0cn_e[\cos\psi+\psi\sin\psi-1]。\tag{30}$$

在开始时刻，$\psi\ll1$，由式 (30) 得：

$$G=-4\pi m_0c\mathscr{A}n_et^2[(k_w-k_r)c\beta_{z0}+\omega_r]^2。\tag{31}$$

由式(31)可知，在开始阶段，增益系数 G 与时间 t 的平方成正比。而且，为了得到正的增益，必须满足：

$$k_r>k_w$$

或

$$\lambda_w>\lambda_r。$$

在这种条件下对相位 ψ 在 $0\sim\frac{\pi}{2}$ 范围内求平均，得：

$$\overline{G}_{0\sim\frac{\pi}{2}}=-4(4-\pi)m_0cn_e\mathscr{A}。\tag{32}$$

对 ψ 在 $\frac{\pi}{2}\sim\pi$ 范围内求平均，得：

$$\overline{G}_{\frac{\pi}{2}\sim\pi}=-8m_0cn_e\mathscr{A}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)。\tag{33}$$

对于 ψ 在 $\pi\sim\frac{3}{2}\pi$ 范围内求平均，得:

$$\overline{G}_{\pi\sim\frac{3\pi}{2}}=8m_0n_ec\mathscr{A}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)。\tag{34}$$

对 ψ 在 $\frac{3\pi}{2}\sim2\pi$ 范围内求平均，得:

$$\overline{G}_{\frac{3}{2}\pi\sim\pi}=4m_0cn_e\mathscr{A}(5\pi-4)。\tag{35}$$

从式(32)～(35)可以看出，对于 ψ 在 $0\sim\pi$ 范围内获得增益的条件是

$$\lambda_w>\lambda_r,$$

而对于 ψ 在 $\pi\sim2\pi$ 范围时，获得增益的条件就变成

$$\lambda_w<\lambda_r。$$

一般来说，$\lambda_w>\lambda_r$ 容易满足，而 $\lambda_w<\lambda_r$ 则不容易满足。因此，工作条件应该选择 ψ 在 $0\sim\pi$ 区间。对于已给定的 Wiggler 场和电子束，这相当于要求光脉冲时间 t 满足

$$t<\frac{\pi}{k_wc\beta_{z0}+(1-\beta_{z0})\omega_r}。\tag{36}$$

式(36)表明，波长越短的辐射，泵浦时间要求也越短。这种情况和原子发射激光的情况相类似，即发射短波长的能级寿命很短，要求泵浦脉冲时间很短，要求泵浦功率很高。

最后估计在给定的工作条件下，所能获得的激光增益系数。取驻波场的空间周期长度 $\lambda_w=1\,\text{mm}$，辐射功率密度为 $1\,\text{kW/cm}^2$，相对论电子束的相对论因子 $\gamma=100$，电子束流密度为 $10\,\text{A/cm}^2$，入射光辐射功率密度为 $10^4\,\text{kW/cm}^2$。根据式(1)，用这种 Wiggler 和相对论电子束，可以放大波长为 5000 Å 的光辐射。由式(30)求得平均增益系数约为 0.5/cm，与通常采用静磁场 Wiggler 自由电子激光器得到的结果相接近。

参 考 文 献

[1] Luis R. E. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976), 717～720.
[2] Colella R. and Lucclo A., *Opt. Comm.*, **50** (1984), 41～44.

A FREE-ELECTRON LASER WITH STANDING WAVE FOR WIGGLERS

LEI SHIZHAN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Operational conditions for free-electron lasers with standing wave for wigglers are analysed, and the laser gains are calculated.