

# 方形空腔表面有效发射率的计算

陈宏磐 李铁桥 陈守仁 褚载祥

(哈尔滨工业大学精密仪器系)

**摘要**——本文给出了构成大面积黑体所经常采用的方形空腔的表面有效发射率的精确数学计算公式,同时应用数值积分的方法,给出了几种典型空腔的计算结果。

文中的计算方法也适用于截面为正三角形、正六边形空腔有效发射率的计算。

## 一、概 述

对于漫射轴对称空腔,可以应用 Walsh 定理,很容易地推导出腔内各面元间角系数的表达式,再应用数值积分的方法,便可求出腔壁表面各点有效发射率的精密数值解,其方法已经比较完善<sup>[1~6]</sup>。但是对于非轴对称空腔,不能直接应用 Walsh 定理给出计算公式,目前对于这种腔形的研究还不充分,尤其能够给出精确计算结果的有实用价值的方法尚未见到。在这种情况下,我们应用朗伯定律推导出空腔内各面元间角系数的表达式(以直角坐标表示),再通过对腔壁表面进行矩形区域的划分,求出腔壁有限面元间角系数的精确表达式,进而把空腔有效发射率的积分方程转化为一组元数有限的代数方程组。通过求解该代数方程组,即可求出空腔壁面各点有效发射率的数值解。

## 二、计算有效发射率的基本方程

众所周知,实际物体单位表面积的辐射功率( $W$ )与同温度下绝对黑体单位面积辐射功率( $W_B$ )之比,称为物体表面发射率或黑度系数。以  $\varepsilon$  表示,

$$\varepsilon = \frac{W}{W_B}。$$

对于黑体空腔,腔壁各面元除自身辐射外,还要反射其它面元对它的辐射。由一个面元发出的这两部分辐射功率的总和,称之为有效辐射功率。单位面元有效辐射功率和同温度下绝对黑体单位面元辐射功率之比,叫做该面元的有效发射率,或称视在发射率。可表示为

$$\varepsilon_a(n) = \frac{\varepsilon W_B + \rho H(n)}{W_B}, \quad (1)$$

---

本文 1983 年 9 月 19 收到。

其中,  $\varepsilon W_B$  为  $n$  点单位面元在半球空间内的自身辐射功率;  $\rho H(n)$  为该面元的反射功率;  $\rho$  为反射系数,  $\rho=1-\varepsilon$ ;  $H(n)$  为  $n$  点单位面元接收到壁面其它面元总的辐射功率。

$$H(n) = \frac{1}{dS_n} \iint_S dW_1, \quad (2)$$

其中,  $S$  为空腔全部内表面积 (略去腔口的入射辐射);  $dW_1$  为  $S$  上任意一点  $P$  的面元  $dS_p$  对  $dS_n$  的辐射功率。对于漫射等温表面:

$$dW_1 = W_B \varepsilon_a(P) \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi D^2} dS_p dS_n, \quad (3)$$

式中,  $\varepsilon_a(P)$  为  $dS_p$  面元的有效发射率;  $D$  为  $n$  和  $P$  两点间的距离;  $\varphi_1, \varphi_2$  分别为面元  $dS_n$  和  $dS_p$  法线方向与两点连线间的夹角。

令  $g_n(P) = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi D^2} dS_p$  为面元  $dS_p$  对  $dS_n$  的辐射交换角系数。将  $dW_1$  的表达式代入式(1)和式(2), 得到

$$\varepsilon_a(n) = \varepsilon + (1-\varepsilon) \iint_S \varepsilon_a(P) g_n(P) dS_n, \quad (4)$$

式(4)即为计算等温漫射空腔壁面有效发射率的基本方程式。

### 三、方形空腔有效发射率计算公式

图1为一方形空腔, 它由一个方形腔底  $S_0$  和四个相同的方形侧面  $S_1 \sim S_{IV}$  组成。设腔底外接圆半径为  $R$ , 空腔深度为  $L$ 。以腔底中心为原点设置直角坐标系: 使  $OX$  轴垂直指向侧壁  $S_I$ ,  $OY$  轴垂直指向侧壁  $S_{II}$ ,  $OZ$  轴指向腔口。

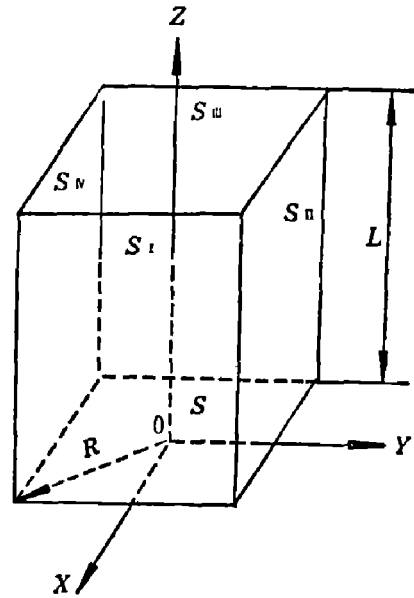


图1 方形空腔

方形空腔是由五个平面组成的。在写积分方程式(4)时, 因为包含该点在内的平面本身对它的辐射功率为零, 所以对于腔壁上任何一点, 其积分区域( $S$ )都是由其它四个平面组成的。例如当点  $n$  处于腔底  $S_0$  上时。

$$\varepsilon_a(n_0) = \varepsilon + (1-\varepsilon) \iint_{S_I+S_{II}+S_{III}+S_{IV}} \varepsilon_a(P) g_n(P) dS_n. \quad (5)$$

应用垂直分割的方法, 将空腔沿  $X, Y, Z$  坐标分别分割成  $I, J, K$  个对应段。则空腔所有壁面都被分割成相应的有限个小的矩形区间, 对于每一个小区间取有效发射率的平均值代替它的实际分布。由于空腔表面有效发射率的分布是一个缓变函数, 只要区间的划分足够小, 就可以保证

这样的替代具有足够的精确性。这样处理之后, 可以把整个积分转化成在每个小区间上进行积分、然后求和。当在每个小区间上进行积分时, 我们便可以把此区间上有效发射率看做为一个常数, 提到积分号外面, 而只进行各区间对计算点角系数的积分。做出有关的各积分式, 则式(4)便被转化成相应的代数方程式。

1) 当所求点  $n$  在腔底  $S_0$  上时, 设  $n$  点坐标为  $x_0, y_0$ , 则积分式(4)的代数形式为

$$\varepsilon_a(x_0, y_0) = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \left\{ \sum_{S_I + S_{III}} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \varepsilon_a(j, k) G_0(j, k) + \sum_{S_{II} + S_{IV}} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \varepsilon_a(i, k) G_0(i, k) \right\}; \quad (6)$$

式中  $\varepsilon_a(j, k)$  和  $\varepsilon_a(i, k)$  为相应壁面 ( $S_I, S_{III}$  和  $S_{II}, S_{IV}$ ) 上第  $j$  行 ( $j=1, 2, \dots, J$ ) 或第  $i$  行 ( $i=1, 2, \dots, I$ ), 第  $k$  列 ( $k=1, 2, \dots, K$ ) 的小矩形区间有效发射率的平均值:

$$\varepsilon_a(j, k) = \frac{1}{4} [\varepsilon_a(y_{j-1}, z_{k-1}) + \varepsilon_a(y_{j-1}, z_k) + \varepsilon_a(y_j, z_{k-1}) + \varepsilon_a(y_j, z_k)],$$

$$\varepsilon_a(i, k) = \frac{1}{4} [\varepsilon_a(x_{i-1}, z_{k-1}) + \varepsilon_a(x_{i-1}, z_k) + \varepsilon_a(x_i, z_{k-1}) + \varepsilon_a(x_i, z_k)],$$

上式中带有下标的变量  $x, y, z$  分别为小矩形区间相应端点的坐标值。

式(6)中  $G_0(j, k)$  和  $G_0(i, k)$  为壁面相应小区间对腔底计算点角系数的积分函数。对于  $S_I$  和  $S_{III}$  面为

$$G_0(j, k) = \frac{|a - x_0|}{2\pi} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{(a - x_0)^2 + z_k^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(y_j - y_{j-1}) \sqrt{(a - x_0)^2 + z_k^2}}{(a - x_0)^2 + (y_j - y_0)(y_{j-1} - y_0) + z_k^2} - \frac{1}{\sqrt{(a - x_0)^2 + z_{k-1}^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(y_j - y_{j-1}) \sqrt{(a - x_0)^2 + z_{k-1}^2}}{(a - x_0)^2 + (y_j - y_0)(y_{j-1} - y_0) + z_{k-1}^2} \right|;$$

对于  $S_{II}$  和  $S_{IV}$  面为

$$G_0(i, k) = \frac{|a - y_0|}{2\pi} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{(a - y_0)^2 + z_k^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(x_i - x_{i-1}) \sqrt{(a - y_0)^2 + z_k^2}}{(a - y_0)^2 + (x_i - x_0)(x_{i-1} - x_0) + z_k^2} - \frac{1}{\sqrt{(a - y_0)^2 + z_{k-1}^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(x_i - x_{i-1}) \sqrt{(a - y_0)^2 + z_{k-1}^2}}{(a - y_0)^2 + (x_i - x_0)(x_{i-1} - x_0) + z_{k-1}^2} \right|。$$

这两个式中的常数  $a$  为

$$a = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} R}{2} & (\text{对于 } S_I \text{ 或 } S_{II} \text{ 面}); \\ -\frac{\sqrt{2} R}{2} & (\text{对于 } S_{III} \text{ 或 } S_{IV} \text{ 面}). \end{cases}$$

2) 当所求点  $n$  在侧面上时, 由于四个侧面上有效发射率分布情况是完全相同的, 所以列出一个侧面(如  $S_I$ )上有效发射率的分布即可。设  $n$  点的坐标为  $y_1, z_1$ , 则其有效发射率为

$$\varepsilon_a(y_1, z_1) = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \left\{ \sum_{(S_0)} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \varepsilon_a(i, j) G_1(i, j) + \sum_{S_{II} - S_{IV}} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \varepsilon_a(i, k) G_1(i, k) + \sum_{(S_{III})} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \varepsilon_a(j, k) G_1(j, k) \right\}, \quad (7)$$

式中  $\varepsilon_a(i, j)$  为腔底  $S_0$  上第  $i$  行 ( $i=1, 2, \dots, I$ ), 第  $j$  列 ( $j=1, 2, \dots, J$ ) 小矩形区间有效发射率的平均值:

$$\varepsilon_a(i, j) = \frac{1}{4} [\varepsilon_a(x_{i-1}, y_{j-1}) + \varepsilon_a(x_{i-1}, y_j) + \varepsilon_a(x_i, y_{j-1}) + \varepsilon_a(x_i, y_j)];$$

上式中  $\varepsilon_a(i, k)$  和  $\varepsilon_a(j, k)$  与式(6)中意义相同。

式(7)中  $G_1(i, j)$ ,  $G_1(i, k)$ ,  $G_1(j, k)$  分别为腔底  $S_0$ , 侧面  $S_{II}$  和  $S_{IV}$ , 以及侧面  $S_{III}$  相应小区间对  $S_I$  面计算点 ( $y_1, z_1$ ) 角系数的积分函数, 为

$$G_1(i, j) = \frac{z_1}{2\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{\left(x_i - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + z_1^2}} \cdot \operatorname{tg}^{-1} \frac{(y_j - y_{j-1}) \sqrt{\left(x_i - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + z_1^2}}{\left(x_i - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + (y_j - y_1)(y_{j-1} - y_1) + z_1^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\left(x_{i-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + z_1^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(y_j - y_{j-1}) \sqrt{\left(x_{i-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + z_1^2}}{\left(x_{i-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + (y_j - y_1)(y_{j-1} - y_1) + z_1^2} \right|;$$

$$G_1(i, k) = \frac{|a - y_1|}{2\pi} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{\left(x_i - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + (a - y_1)^2}} \right. \\ \times \operatorname{tg}^{-1} \frac{(z_k - z_{k-1}) \sqrt{\left(x_i - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + (a - y_1)^2}}{\left(x_i - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + (a - y_1)^2 + (z_k - z_1)(z_{k-1} - z_1)} \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\left(x_{i-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + (a - y_1)^2}} \right. \\ \left. \times \operatorname{tg}^{-1} \frac{(z_k - z_{k-1}) \sqrt{\left(x_{i-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + (a - y_1)^2}}{\left(x_{i-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 + (a - y_1)^2 + (z_k - z_1)(z_{k-1} - z_1)} \right|;$$

$$G_1(j, k) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{y_j - y_1}{\sqrt{2R^2 + (y_j - y_1)^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(z_k - z_{k-1}) \sqrt{2R^2 + (y_j - y_1)^2}}{2R^2 + (y_j - y_1)^2 + (z_k - z_1)(z_{k-1} - z_1)} \right. \\ \left. - \frac{y_{j-1} - y_1}{\sqrt{2R^2 + (y_{j-1} - y_1)^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(z_k - z_{k-1}) \sqrt{2R^2 + (y_{j-1} - y_1)^2}}{2R^2 + (y_{j-1} - y_1)^2 + (z_k - z_1)(z_{k-1} - z_1)} \right. \\ \left. + \frac{z_k - z_1}{\sqrt{2R^2 + (z_k - z_1)^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(y_j - y_{j-1}) \sqrt{2R^2 + (z_k - z_1)^2}}{2R^2 + (y_j - y_1)(y_{j-1} - y_1) + (z_k - z_1)^2} \right. \\ \left. - \frac{z_{k-1} - z_1}{\sqrt{2R^2 + (z_{k-1} - z_1)^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(y_j - y_{j-1}) \sqrt{2R^2 + (z_{k-1} - z_1)^2}}{2R^2 + (y_j - y_1)(y_{j-1} - y_1) + (z_{k-1} - z_1)^2} \right|;$$

式中  $a$  值与式(6)相同。

有了具体的函数表达式(6)和式(7),即可进行计算。然而当计算点处于空腔壁面交线上时,上述有关角系数的积分函数表达式中会出现不定型,所以应单独处理。

#### 四、方形空腔奇异点角系数的计算

关于空腔奇异点角系数的处理,已经进行了详尽的讨论,并给出了普遍的计算方法<sup>[7]</sup>,这里只给出相应的结论。

由于方形空腔相交壁面互相垂直,因此交线上奇异点角系数皆为  $\frac{1}{2}$ 。而腔底四个尖角

情况相同, 形成尖角的三个壁面其两面均互相正交, 相交点(尖点)间的角系数皆为  $\frac{3}{8}$ 。因此在计算处于交线或尖角上点的有效发射率时, 所涉及式(6)或式(7)的对应相交壁面  $S_p$  上的求和项为

$$\sum_{(S_p)} \dots = \begin{cases} \frac{1}{2} \varepsilon_a(\zeta, \xi) & (n \text{ 为交线上点时}); \\ \frac{3}{8} \varepsilon_a(\zeta, \xi) & (n \text{ 为尖点时}). \end{cases}$$

式中  $\varepsilon_a(\zeta, \xi)$  为  $S_p$  面上与  $n$  点相重合的点的有效发射率的值,  $(\zeta, \xi)$  为该点的位置坐标值。

## 五、计算结果

本计算中, 取外接圆半径  $R$  为相对长度单位, 每个壁面沿坐标轴分成 16 等分, 即每个

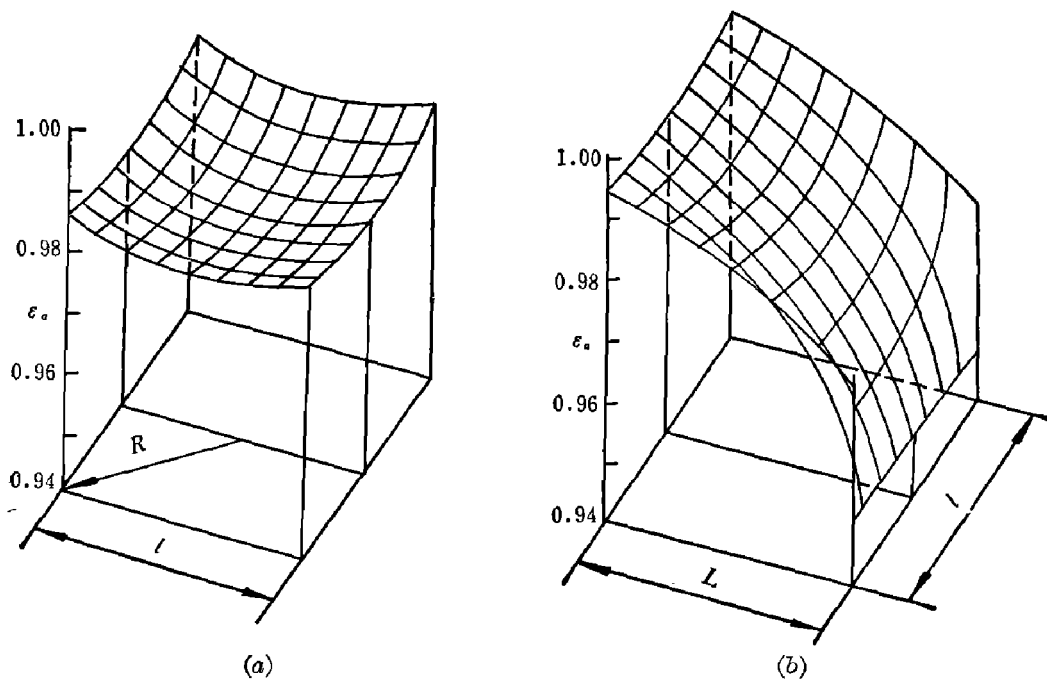


图2 方形空腔有效发射率沿壁面分布图

$L/R = \sqrt{2}$ ,  $L=l$ ,  $\varepsilon=0.9$   
(a) 腔底 (b) 腔壁

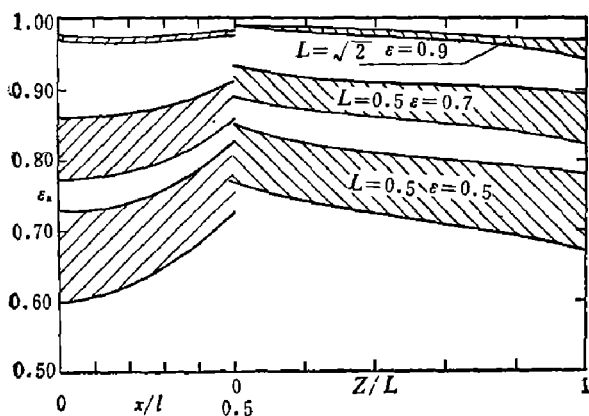


图3

有效发射率沿壁面中线和边界棱线上的分布曲线

壁面共分割成  $16 \times 16$  个小的计算区间。利用迭代法进行数值求解, 计算精度准确到小数点后第四位。

本文给出了腔长  $L=0.5$ 、材料发射率  $\varepsilon=0.5$  和  $0.7$ ; 腔长  $L=\sqrt{2}$  (即各棱长相等的正方体空腔)、 $\varepsilon=0.9$  的计算结果。

图2给出了  $L=\sqrt{2}$ 、 $\varepsilon=0.9$  正方体空腔壁面有效发射率的分布情况。图3给出了上述三种情况有效发射率沿壁面中线和边界棱线上的分布曲线, 这两条曲线之间的阴影部分即为壁面上任意点有效发射率的数值。

## 六、结 论

由图 2 和图 3 表明: 方形空腔和无盖圆柱空腔相似, 腔内有效发射率沿腔底的分布也是中心低、边缘高; 在侧壁上, 靠近腔底最高, 越靠近腔口下降得越快。在腔底与侧壁相交棱线上, 有效发射率亦不连续, 这是因为那里是两个相交壁面的奇异点。

与轴对称空腔不同的是, 由于侧壁为由相交的平面构成, 在交线处形成尖角, 使有效发射率在整个平面, 尤其在交角处, 比轴对称的圆柱空腔有所提高。并且在侧壁越接近腔口, 尖角有效发射率的提高越明显。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] De Vos J. C., *Physica*, **20**(1954), 669—689.
- [ 2 ] Sparrow E. M., Albers L. U., *J. Heat Transfer*, **82**(1960), 253~254.
- [ 3 ] Sparrow E. M., Albers L. U., Eckert E. R. G., *J. Heat Transfer*, **84**(1962), 73~79.
- [ 4 ] Bedford R. E., Ma C. K., *J. Opt. Soc. Amer.*, **64**(1974), 3:339~349.
- [ 5 ] Bedford R. E., Ma C. K., *J. Opt. Soc. Amer.*, **65**(1975), 5: 565~572.
- [ 6 ] Bedford R. E., Ma C. K., *J. Opt. Soc. Amer.*, **66**(1976), 7:724~730.
- [ 7 ] 李铁桥, 陈宏磐, 陈守仁, 褚载祥, *红外研究*, **3**(1984), 1:11.

## CALCULATION OF EFFECTIVE SURFACE EMISSIVITY OF SQUARE CAVITIES

CHEN HONGPAN, LI TIEQIAO, CHEN SHOUREN, CHU ZAI XIANG  
(Department of Precision Instrument, Harbin Institute of Technology)

### ABSTRACT

A formula is presented in this paper for the precise calculation of the surface emissivity of square cavities which are often used in making great-surface blackbodies. Results for some typical cavities are given with a numerical integration method.