

关于 D^* 测量中均方根转换系数的讨论

许生龙 尹达人

(昆明物理研究所)

摘要——本文采用传递函数的方法计算了圆光斑经扇形调制盘调制后产生的频谱公式,给出了均方根转换系数的计算公式,并对使用这些公式中存在的一些问题进行了讨论。

一、前言

一八六〇年基尔霍夫提出了一个理想黑体应该满足的条件:“一个等温密封腔的辐射应是黑体辐射,如果在密封腔壁上开一个小孔,小孔发出的辐射逼真地模拟了黑体辐射。”他指出:“重要的是密封腔要真正等温,小孔的面积应比密封腔内表面的面积小得多^[1]”。

假若按照上述设想研制的黑体,黑体腔口的辐射分布可作均匀圆光斑处理。

McQuistan R. B. ^{[2][3]} 给出了均匀圆光斑经栅栏型调制盘直线扫描及扇形调制盘圆扫描的频谱公式,讨论了等效正弦调制的条件。本文的工作是对他的分析方法作出改进。作者认为没有必要一定要引入等效正弦调制的概念, D^* 计算中需要的是直接给出均方根转换系数计算公式。本文还对使用这些关系时发生的一些错误作出澄清。

二、均方根转换系数的讨论

红外探测器测量中,用一个扇形调制盘对黑体孔进行调制。响应率 $\mathcal{R}_{r,m,s} = \frac{V_{r,m,s}}{P_{r,m,s}}$, 其中 $V_{r,m,s}$ 是探测器输出信号基波的均方根值, $P_{r,m,s}$ 是探测器接收的经调制盘调制的辐射功率基波的均方根值,一般地说,经调制盘调制的辐射功率的峰-峰值 $P_{s,s}$ 是已知的,可按下式计算:

$$P_{s,s} = \frac{\sigma(T_{500}^4 - T_{300}^4)A_0 B_D}{\pi H^2},$$

其中 σ 是斯忒藩-玻尔兹曼常数, T_{500} 是黑体温度 (500 K), T_{300} 是调制盘所处的室温 (300 K), A_0 是黑体光栏的面积, B_D 是探测器的面积, H 是探测器到黑体腔口的距离。

困难在于计算均方根转换系数 α ——黑体孔调制波形的均方根值与峰-峰值之比:

$$P_{r,m,s} = \alpha P_{s,s}. \quad (1)$$

本文 1981 年 12 月 9 日收到。修改稿 1982 年 10 月 8 日收到。

在文献[4]中,我们已求得红外扫描系统信号波形及其频谱的计算通式:

$$P(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} Q(f_x, f_y) R^*(f_x, f_y) \exp[2\pi j(f_{xx'} + f_{yy'})] df_x df_y, \quad (2)$$

$$\mathcal{P}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \exp[-2\pi jft] dt, \quad (3)$$

其中 $Q(f_x, f_y)$ 是目标象函数的空间频谱, $R(f_x, f_y)$ 是调制盘的传递函数, $x'(t)$ 及 $y'(t)$ 是调制盘相对光斑的运动规律。在极坐标中,式(2)可表示成:

$$P(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} Q(\rho, \varphi) R^*(\rho, \varphi) \exp[2\pi j\rho\xi' \cos(\varphi - \theta')] \rho d\rho d\varphi, \quad (4)$$

若调制盘以角速度 ω 相对光斑作圆运动,则

$$\xi' = l, \theta' = \omega t, \quad (5)$$

其中 l 是光斑中心离调制盘中心的距离,见图1。

把式(4)、(5)代入式(3)得到:

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^p \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} Q(\rho, \varphi) R^*(\rho, \varphi) J_p(2\pi\rho l) \exp[-jp\phi] \rho d\rho d\varphi \cdot \delta\left(f - \frac{p\omega}{2\pi}\right). \quad (6)$$

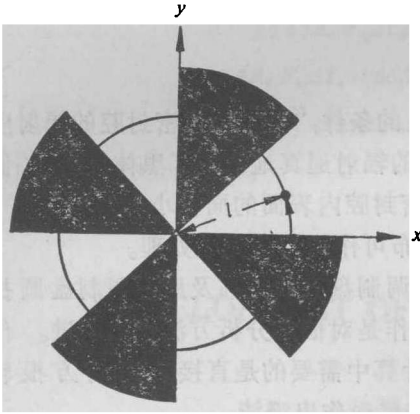


图1 扇形调制盘及其扫描方式

对于一个半径为 R 的均匀圆光斑,

$$Q(\rho) = \frac{RJ_1(2\pi R\rho)}{\rho}, \quad (7)$$

对于一个有 n 个齿的扇形调制盘,

$$R(\rho, \varphi) = \frac{\delta(\rho)}{4\pi\rho} + \frac{n}{\pi^2\rho^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi/2 (-j)^{kn} \cos kn\phi. \quad (8)$$

把式(7)、(8)代入式(6),利用文献[5]中式

$$(29): \text{当 } 0 < R < l \text{ 时, } \int_0^{\infty} \frac{J_1(2\pi R\rho) J_n(2\pi\rho l)}{\rho^2} d\rho =$$

$$= \frac{\pi R}{p} {}_2F_1\left[\frac{p}{2}, -\frac{p}{2}; 2; \left(\frac{R}{l}\right)^2\right], \text{得到: 当 } R > l \text{ 时,}$$

$$\mathcal{P}(f) = \frac{\pi R^2}{2} \delta(f) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{kn} \frac{2R^2}{k} \sin k\pi/2 {}_2F_1\left[kn/2, -kn/2; 2; \frac{R^2}{l^2}\right] \delta\left(f - \frac{kn\omega}{2\pi}\right), \quad (9)$$

其中 ${}_2F_1\left[kn/2, -kn/2; 2; \frac{R^2}{l^2}\right]$ 是超比函数。其基波振幅为

$$C_1 = 2R^2 {}_2F_1\left[\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}; 2; \frac{R^2}{l^2}\right]. \quad (10)$$

对于一个周期性变化的非正弦量,在一个周期内的均方根值

$$P_{r.m.s} = \sqrt{C_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i^2}{2}},$$

其中 C_0 及 C_i 分别是频谱中的直流分量及 i 次谐波。考虑 D^* 测量中一般经选频滤波,测量的仅是基波,所以

$$P_{r.m.s} = \frac{C_1}{\sqrt{2}}, \text{ 而 } P_{s.s} = \pi R^2,$$

则均方根转换系数 α 可表示成:

$$\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{2} \pi R^2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left| {}_2F_1 \left[\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}; 2; \frac{R^2}{l^2} \right] \right| \quad (11)$$

我们自编程序,对式(11)进行了计算。当 $n=25$ 时,得到表 1 的结果。这一计算的意义在于:对于 D^* 测量设备,仅就计算均方根转换系数而言,只要 $R < l$,可以取任意的 n, l, R ,据式(11)计算 α ,就可计算 D^* 。这对 D^* 测量设备的设计带来了很大方便。

表 1 $n=25$ 时 α 的计算值

α $R(\text{mm})$	$l(\text{mm})$		
	75	85	95
5	0.3104	0.3389	0.3595
6	0.2595	0.2961	0.3236
7	0.2057	0.2501	0.2843
8	0.1522	0.2025	0.2426

必须指出,文献^[1]按美国圣巴巴拉研究中心数据得出的表 9-3“各种调制器几何图形的均方根转换系数”,除第一个值外都有错误。例如当 $x=0.5$ 时($x = \frac{\theta_1}{\theta_2}$,其中 θ_1 是光点直径对调制盘中心夹角, θ_2 是一对齿槽对调制盘中心夹角),不可能产生严格的三角波,该书却按三角波来计算,这样就带来了较大的误差。从最近美国进口黑体的说明书知,美国圣巴巴拉研究中心已对这一数据进行了修正,其结果见表 2,式中齿宽/光栏直径 $= \frac{\pi l}{2nR}$,我们自编程序对式(11)进行了计算,证明表 2 的结果基本正确,仅对 $\frac{\pi l}{2nR} < 2.0$ 及 $n < 10$ 还要作修正。

表 2 均方根转换系数

齿宽/光栏直径	α	我们的计算值
1.0	0.325	0.311 ($n=2$), 0.324 ($n=7$), 0.325 ($n \geq 10$)
1.5	0.391	0.389 ($n=2$), 0.390 ($n=3$), 0.391 ($n \geq 4$)
2.0	0.416	0.416 ($n \geq 2$)
2.5	0.428	0.428 ($n \geq 2$)
3.0	0.435	0.435 ($n \geq 2$)
4.0	0.442	0.442 ($n \geq 2$)
5.0	0.445	0.445 ($n \geq 2$)
6.0	0.446	0.446 ($n \geq 2$)
7.0	0.447	0.447 ($n \geq 2$)
8.0	0.448	0.448 ($n \geq 2$)
9.0	0.449	0.449 ($n \geq 2$)
10.0	0.449	0.449 ($n \geq 2$)

McQuistan R. B. [3] 引入了我们称之为等效正弦调制的概念, 它的物理意义是: 一个圆孔的辐射功率按正弦调制可表示为: $N'(t) = \frac{\pi R^2}{2}(1 - \cos \omega t)$, 其基波振幅为 $\frac{\pi R^2}{2}$, 而一个圆光斑经扇形调制盘调制, 其基波振幅与 $\frac{\pi R^2}{2}$ 相等的条件, 即等效正弦调制的条件。

1958 年 McQuistan, R. B. [2] 得出了均匀圆光斑经栅栏型调制盘直线扫描的等效正弦调制的条件:

$$R/r = 0.87。$$

其中 R 是黑体光栏半径, r 是栅栏调制盘幅条宽之一半。

1959 年 McQuistan R. B. 又讨论了符合实际使用情况的均匀圆光斑经扇形调制盘调制的等效正弦调制的条件:

$${}_2F_1\left[\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}; 2; \frac{R^2}{l^2}\right] = \frac{\pi}{4}。 \quad (12)$$

他用一个粗略的图表给出了计算结果, 使用起来很不方便。我们自编了程序算出了方程 (12) 的解, 同时证明了 (见附录), 当 $\frac{R^2}{l^2} \ll 1, n \gg 1$ 时,

$${}_2F_1\left[\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}; 2; \frac{R^2}{l^2}\right] \doteq \frac{2J_1\left(\frac{nR}{l}\right)}{nR/l}。$$

而方程 $\frac{J_1(x)}{x} = \pi/8$ 的解析解为 $x = 1.36$ 。计算结果如表 3 所示。

从上述计算可知, 经扇形调制盘调制的等效正弦调制的条件, 完全可以使用:

$$\frac{nR}{l} = 1.36 (n > 5)。$$

当满足等效正弦调制的关系式 (12) 时, 其均方根转换系数 $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.3535$ 。

从上述讨论可以看出, 等效正弦调制的条件不是一定要引入的, 直接引入均方根转换系

表 3 方程 (12) 的解

n	R/l [方程 (12) 的解]	$\frac{R}{l} = \frac{1.36}{n}$
2	0.6550	0.6800
3	0.4463	0.4532
4	0.3372	0.3400
5	0.2707	0.2720
6	0.2260	0.2267
7	0.1939	0.1942
8	0.1698	0.1700
9	0.1510	0.1511
10	0.1360	0.1360
11	0.1236	0.1236
12	0.1133	0.1133

数的概念就行了。由于国内红外界还在使用这些公式，我们觉得有必要来讨论这一问题。

经过测试及理论计算，我们认为可以定义 Q 作为 D^* 测试设备的性能判据：

$$Q = \frac{1}{2V_{10}} \sum_{k=1}^{\infty} (V_{1k}^+ + V_{1k}^-)$$

其中 V_{10} 是第一个主频的振幅，一般使用 800 Hz 幅值； V_{1k}^+ 及 V_{1k}^- 是在主频附近各次旁频的幅值， V_{1k}^+ 代表频率大于主频的那一些旁频，例如 840 Hz 幅值， V_{1k}^- 代表频率小于主频的那些一旁频，例如 760 Hz 幅值。对于我们的测试系统， $V_{10}=1$ ， $V_{11}^+=0.049$ ， $V_{11}^-=0.054$ ， $Q=5.1\%$ ， Q 值小，代表测量设备好。这一判据从直观上也很好理解，就是旁频幅值增加，必然减少主频的幅值。当然这只代表 D^* 测量设备性能优劣的一个指标。

经过分析，我们认为：对于 D^* 测试设备中使用的黑体，腔体等温是最重要的，黑体发射率高是其次。这是因为腔体等温，体现在腔口辐射上才是均匀光斑，上述计算才有效。假若腔体有一定的温度梯度，腔口辐射不可能是均匀光斑，上述计算不成立。至于发射率的高低，不过在计算公式中乘一个不同的系数而已。

三、结 语

本文用传递函数的方法计算了圆光斑经扇形调制盘调制产生的频谱公式，给出了 D^* 测量中均方根转换系数的计算公式，并对使用这些公式时存在的一些问题进行了讨论。上述讨论是在黑体腔的辐射可作均匀光斑时成立。有些黑体，腔体有比较大的温度梯度，这样，均匀光斑的条件就不可能成立，需要另作讨论。

附 录

对于超比函数 ${}_2F_1[a, b; c; x] = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{[a]_2[b]_2}{2![c]_2}x^2 + \dots + \frac{[a]_n[b]_n}{n![c]_n}x^n + \dots$ ，其中 $[a]_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ ， $[a]_0 = 1$ ， $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ；

令 $a = m$ ， $b = -m$ ， $c = s > 0$ ，则 ${}_2F_1[m, -m; s; x] = 1 - \frac{m^2}{s}x + \frac{m^2(m^2-1)}{2!s(s+1)}x^2 + \dots$ ，

$$\begin{aligned} \text{其通项 } I &= (-1)^n \frac{m^2(m^2-1)(m^2-2^2)\dots[m^2-(n-1)^2]}{n![s]_n} x^n \\ &= (-1)^n \frac{m^{2n}\Gamma(s)}{n!\Gamma(n+s)} \left[1 - \frac{1}{m^2}\right] \left[1 - \frac{2^2}{m^2}\right] \dots \left[1 - \frac{(n-1)^2}{m^2}\right] x^n, \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(x)$ 是伽马函数。当 $m \rightarrow \infty$ 时，

$$I \doteq \frac{(-1)^n m^{2n} \Gamma(s)}{n! \Gamma(n+s)} x^n,$$

即当 $m \gg 1$ ， $x \ll 1$ 时， ${}_2F_1[m, -m; s; x] \doteq \Gamma(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m^{2n} x^n}{n! \Gamma(n+s)} = \frac{\Gamma(s)}{(m\sqrt{x})^{s-1}} J_{s-1}(2m\sqrt{x})$ ，

$$\text{当 } s=2 \text{ 时，} {}_2F_1[m, -m; 2; x] \doteq \frac{J_1(2m\sqrt{x})}{m\sqrt{x}}。$$

参 考 文 献

- [1] Hudson R. D., *IR System Engineering*, John Wiley, N. Y., 1969.
- [2] McQuistan R. B., *J. Opt. Soc. Amer.*, **48** (1958), 1: 63.
- [3] McQuistan R. B., *J. Opt. Soc. Amer.*, **49** (1959), 1: 70.
- [4] 许生龙、尹达人、*光学学报*, **2** (1982), 1: 79.
- [5] 爱尔台里, *高级超越函数* (中译本第二册) 上海科学技术出版社, 1959, 58.

DISCUSSION ON R. M. S. CONVERSION FACTOR IN MEASURING D^*

XU SHENLONG, YIN DAREN

(Kunming Institute of Physics)

ABSTRACT

In this paper, by the method of transfer function, the authors give out the formulae of calculating frequency spectra for a uniform spot modulated by a sectored reticle, and give out the formulae of calculating R. M. S. conversion factor. Some problems in using these formulae are discussed.